Terminale S/Nombres complexes

1. Ecriture algébrique d'un nombre complexe :

Exercice 6788

Sachant que $\mathrm{i}^2=-1$, simplifier l'écriture des expressions suivantes :

a. i^2 b. i^3 c. i^4 d. i^5

c. i^{14} d. i^{100} e. i^{-1} f. i^{-3}

Exercice 3782

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = 3\cdot(2-\mathrm{i}) + \mathrm{i}\cdot(3+2\cdot\mathrm{i})$ b. $z_2 = (5+2\cdot\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})$

c. $z_3 = -5\cdot\mathrm{i}\cdot(5-4\cdot\mathrm{i}) - 3\cdot\mathrm{i}$ d. $z_4 = (5+2\cdot\mathrm{i})^2$

e. $z_5 = (2-\mathrm{i})^2 - 2\cdot(1+3\cdot\mathrm{i})^2$ f. $z_6 = (5+2\cdot\mathrm{i})\cdot(5-2\cdot\mathrm{i})$

Exercice 3788

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :

$z = (x+2\cdot\mathrm{i})\cdot(1-x\cdot\mathrm{i})$

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z.

2. a. Pour quelle*(s)* valeur*(s)* de x, z est un nombre réel?

   b. Pour quelle*(s)* valeur*(s)* de x, z est un imaginaire pur?

Exercice 5310

1. On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par :
   $P = 2\cdot z^3 + z^2 + 2\cdot z + 1$

   Vérifier que les trois nombres ci-dessous sont solutions des racines du polynôme P :

   $z_1 = -\mathrm{i}$; $z_2 = \mathrm{i}$; $z_3 = -\dfrac{1}{2}$

2. On considère le polynôme Q définie sur $\mathbb{C}$ par :
   $Q = z^3 - 2\cdot z^2 + 2\cdot z$

   Vérifier que le nombre complexe $z_4 = 1-\mathrm{i}$ est une racine du polynôme Q.

Exercice réservé 5311

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :
   $P = 2\cdot z^3 + 3\cdot z^2 + 2\cdot z - 2$

   Vérifier que les deux complexes z_1 et z_2 sont des racines du polynôme P où :

   $z_1 = -1+\mathrm{i}$; $z_2 = -1-\mathrm{i}$

2. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{C}$ par :
   $Q = z^3 + z^2 + 3\cdot z - 5$

   Vérifier que les deux complexes z_3 et z_4 sont des racines du polynôme Q où :

   $z_3 = -1-2\cdot\mathrm{i}$; $z_4 = -1+2\cdot\mathrm{i}$

Exercice réservé 3783

1. Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
   $A = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3$

2. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe :
   $B = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^{99}$

Exercice 5133

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ b. $z_2 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ c. $z_3 = \dfrac{-2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

Exercice réservé 3786

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = \dfrac{2}{\mathrm{i}}$ b. $z_2 = \dfrac{3}{2-4\cdot\mathrm{i}}$ c. $z_3 = \dfrac{-2}{1+\mathrm{i}}$

d. $z_4 = \dfrac{3-2\cdot\mathrm{i}}{5+3\cdot\mathrm{i}}$ e. $z_5 = \dfrac{2+3\cdot\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ f. $z_6 = \dfrac{2}{2+\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}}$

Exercice 5327

Donner la valeur de $Re(z)$ et $Im(z)$ pour chacun des complexes ci-dessous :

a. $z = (2+\mathrm{i})^2$ b. $z = \dfrac{3-4\cdot\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ c. $z = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}$

Exercice 5309

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$z_1 = 1+\mathrm{i}$; $z_2 = 5-2\cdot\mathrm{i}$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a. $z_1 + z_2$ b. $z_1 - z_2$ c. $z_1 - 2\cdot z_2$

d. $z_1 \cdot z_2$ e. $\dfrac{z_1}{z_2}$ f. $\dfrac{z_2}{z_1 - z_2}$

Exercice réservé 4249

Soit z un nombre complexe distincts de 0 et de i. On considère les nombres complexes n, p et q dont leur affixe est définie par : $n = \mathrm{i}\cdot z + 1 + \mathrm{i}$; $p = -z + 1 + \mathrm{i}$; $q = -\mathrm{i}\cdot z$

Etablir l'égalité suivante : $\dfrac{z-n}{p-n} = \mathrm{i} + \dfrac{1}{z}$

2. Equations :

Exercice 5324

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) définie par :
$(E): \quad z+2-\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})\cdot z$

Montrer que le nombre complexe $-1-2\mathrm{i}$ est solution de l'équation (E).

2. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (F) définie par :
$(F): \quad (z-1+2\cdot\mathrm{i})(z+2\cdot\mathrm{i})=z^2-\mathrm{i}$

Montrer que le nombre complexe $-\mathrm{i}$ est solution de l'équation (F).

Exercice 3799

Dans $\mathbb{C}$, résoudre les équations du premier degré suivantes :

a. $3\cdot z+\mathrm{i}\cdot z=0$ b. $z+2\cdot\mathrm{i}\cdot z=\mathrm{i}$

c. $z+2-\mathrm{i}\cdot(z+1)=0$ d. $\dfrac{z-5}{z-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$

Exercice réservé 6194

Résoudre les équations suivantes :

a. $(3+\mathrm{i})\cdot z-3\cdot(5\cdot z-2)=0$ b. $\dfrac{2-3\cdot z}{z+\mathrm{i}}=-2\cdot\mathrm{i}+z$

c. $(1+2\cdot\mathrm{i})(z-3\cdot\mathrm{i})=z+2+3\cdot\mathrm{i}$ d. $3+\mathrm{i}\cdot z+2\cdot\mathrm{i}=z$

Exercice 3817

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

1. Montrer que : $(1+\mathrm{i})^6=-8\cdot\mathrm{i}$.
2. On considère l'équation $(E): z^2=-8\cdot\mathrm{i}$
   a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).
   b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous écriture algébrique.
3. Déduire également de 1. une solution de l'équation :
$(E'): \; z^3=-8\cdot\mathrm{i}$

3. Conjugué : définitions :

Exercice 5326

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

a. $z=1+\mathrm{i}$ b. $z=2\cdot\mathrm{i}-3$ c. $z=\mathrm{i}\cdot(1+2\cdot\mathrm{i})$

d. $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}$ e. $z=\dfrac{2}{2-\mathrm{i}}$ f. $z=(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$

Exercice réservé 3789

Soit z un nombre complexe.

1. Démontrer que les deux nombres suivants sont des réels :
$z+\overline{z} \quad ; \quad z\cdot\overline{z}$
2. Démontrer que le nombre complexe $z-\overline{z}$ est un imaginaire pur.

4. Conjugué : propriétés algébriques :

Exercice 6789

Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes z_1 et z_2 sont des nombres complexes conjugués.

a. $z_1=(1+\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})$; $z_2=(1-i)\cdot(2+i)$

b. $z_1=\dfrac{\mathrm{i}-3}{2+2\cdot\mathrm{i}}$; $z_2=\dfrac{-\mathrm{i}-3}{2-2\cdot\mathrm{i}}$

c. $z_1=(1-\mathrm{i})^5$; $z_2=(1+\mathrm{i})^5$

Exercice 3824

Pour chacun des nombres complexes ci-dessous :

- sans calcul, donner une expression du nombre complexe conjugué du nombre z ;
- puis, donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\overline{z}$.

a. $z=(2-\mathrm{i})(5+3\cdot\mathrm{i})$ b. $z=\mathrm{i}\cdot(3+2\cdot\mathrm{i})-3+\mathrm{i}$

c. $z=\dfrac{5-2\cdot\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2}$ d. $z=\dfrac{(3-2\cdot\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}$

Exercice 5333

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 :
$z_1=\dfrac{3-2\cdot\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \quad ; \quad z_2=\dfrac{3+2\cdot\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

1. Que peut-on dire des nombres complexes z_1 et z_2 ?
2. a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre z_1.
   b. En déduire l'expression de z_1+z_2 et z_1-z_2.

Exercice réservé 6780

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation : $(\mathcal{E}): \; z^3+z^2-2=0$

1. Montrer que le nombre complexe z_1 défine par $z_1=-1-\mathrm{i}$ est solution de l'équation $\mathcal{E}$.
2. Justifier que le nombre complexe z_2 définie par $z_2=\overline{z_1}$ est également solution de l'équation $(\mathcal{E})$.
3. En remarquant que 1 est également solution de $(\mathcal{E})$, proposer une forme factorisée dans $\mathbb{C}$ du polynôme z^3+z^2-2.

On développera cette forme pour établir la factorisation.

5. Conjugué : équations :

Exercice 6790

Déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'égalité suivante :

$$2\cdot a+b\cdot(2+\mathrm{i})-3\cdot\mathrm{i}=a\cdot(\mathrm{i}-2)+b\cdot(1-2\cdot\mathrm{i})$$

Exercice 3800

Résoudre les équations suivantes :

a. $z+\overline{z}=6$ b. $z+\overline{z}=\mathrm{i}$

c. $z+2\cdot\overline{z}=8+\mathrm{i}$ d. $\mathrm{i}\cdot\overline{z}+2\cdot(z-5)=0$

Exercice réservé 6791

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{\overline{z}}{z+1}=1$ b. $(1-\overline{z})(\mathrm{i}\cdot z+2)=2$

6. Equations du second degré :

Exercice 3802

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

a. $z^2-3\cdot z+4=0$ b. $z^2-4\cdot z+4=0$

c. $3\cdot z^2+3\cdot z+2=0$ d. $z^2-4\cdot z-1=0$

Exercice réservé 5332

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $2z^2+2z+1=0$ b. $-z^2+2z-3=0$

c. $z^2+3z+3=0$ d. $-z^2-3z-2=0$

Exercice 3803

On considère la fonction complexe définie sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ par la relation :

$$f\colon z\longmapsto\frac{z-4}{z-2}$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par cette fonction.

Exercice 5331

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E):\ z^3+4\cdot z^2+2\cdot z-28=0$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :
$$(E):\ (z-2)(z^2+a\cdot z+b)=0$$

2. Résoudre l'équation (E).

Exercice réservé 3850

On considère l'équation (E) :

$$z^3-(4+\mathrm{i})\cdot z^2+(7+\mathrm{i})\cdot z-4=0$$

où z désigne un nombre complexe.

1. Montrer que (E) admet une solution réelle, noté z_1.

2. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$$z^3-(4+\mathrm{i})\cdot z^2+(7+\mathrm{i})\cdot z-4=(z-z_1)(z-2-2\cdot\mathrm{i})(a\cdot z+b)$$

3. Résoudre (E).

Exercice 6781

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ dépendant du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$;

$$x^2-3\cdot x+4=\lambda$$

Pour quelles valeurs de λ, l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admet deux solutions distinctes conjuguées.

Exercice 6811

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E):\quad z^2+2\cdot a\cdot z+a^2+1=0$$

où a désigne un nombre réel quelconque.

Une seule des propositions suivante est exacte. Recopier la réponse choisie et justifier cette proposition

a. Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.

b. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et elles sont conjuguées.

c. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et elles ne sont pas conjuguées.

d. Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

Exercice réservé 3851

1. Déterminer le nombre complexe α tel que :
$$\begin{cases}\alpha\cdot(1+\mathrm{i}) = 1+3\cdot\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\cdot\alpha^2 = -4+3\cdot\mathrm{i}\end{cases}$$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose :
$$f(z)=z^2-(1+3\cdot\mathrm{i})\cdot z+(-4+3\cdot\mathrm{i})$$
Montrer que $f(z)$ admet pour expression $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\cdot\alpha)$.

   En déduire les écritures algébriques des solutions de l'équation $f(z)=0$.

Exercice 6794

On donne le nombre complexe : $j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$$z^2+z+1=0$$

2. Démontrer les égalités suivantes :

   a. $j^3=1$ b. $j^2=-1-j$

3. On suppose l'existence de trois nombres complexes a, b et c vérifiant l'égalité :

$a+j{\cdot}b+j^2{\cdot}c=0$

a. Démontrer l'égalité : $a-c=j{\cdot}(c-b)$

b. Démontrer l'égalité : $a-b=j^2{\cdot}(b-c)$

7. Equations du second degré et changement de variables :

Exercice 6204

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère le polynôme : $z^2+6z+25$. Déterminer ses racines.

2. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :
$a=(1+2{\cdot}\mathrm{i})^2 \quad ; \quad b=(1-2{\cdot}\mathrm{i})^2$

b. En déduire les solutions de l'équation :
$z^4+6z^2+25=0$

Exercice réservé 6205

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère le polynôme : $4z^2-16z+25$. Déterminer ses racines.

2. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :
$a=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}{\cdot}\mathrm{i}\right)^2 \quad ; \quad b=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}{\cdot}\mathrm{i}\right)^2$

b. En déduire les solutions de l'équation :
$4z^4-16z^2+25=0$

Exercice 5958

Pour tout nombre z, on pose : $P(z)=z^4-1$.

1. Factoriser $P(z)$ en produit de facteurs du premier degré.

2. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(z)=0$, d'inconnue z.

3. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :
$\left(\frac{2{\cdot}z+1}{z-1}\right)^4=1$

8. Equations et conjugués :

Exercice 3787

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$x^2+x+1=0$

2. On considère le nombre complexe $j=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. Déterminer l'écriture algébrique des deux nombres complexes : $j^2 \quad ; \quad j^3$

b. Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants : $1+j+j^2 \quad ; \quad 1+\overline{j}+\overline{j}^{\,2}$

c. Dans $\mathbb{C}$, de quelle équation du second degré, le nombres j et $\overline{j}$ sont-ils solutions?

3. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$(1+j)^{2n+1}=-j^{n+2}$

Exercice réservé 6251

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. L'équation $(z-4)(z^2-4{\cdot}z+8)=0$ admet 3 solutions dans $\mathbb{C}$ dont une est réelle et les 2 autres sont conjuguées entre elles.

2. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :
$(E): \quad z-\overline{z}+2-4{\cdot}\mathrm{i}=0$
admet une solution unique.

3. On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie par :
$z_0=2 \quad ; \quad z_{n+1}=(1+\mathrm{i}){\cdot}z_n$
Le cinquième terme de la suite est un nombre réel.

4. A tout nombre complexe z, on associe un nombre complexe z' défini par :
$z'=z^2+2z+9$
L'ensemble des nombres complexes z tels que z' soit un réel est l'ensemble des nombres complexes $z=x+\mathrm{i}{\cdot}y$ où $y=0$.

9. Ensembles de solutions :

Exercice 6806

On considère les trois ensembles, définis ci-dessous, de couples de réels :

- $\mathcal{E}_1=\{(x\,;y) \mid 2{\cdot}x+y-1=0\}$
- $\mathcal{E}_2=\{(x\,;y) \mid x^2+y^2-2{\cdot}x+4{\cdot}y-4=0\}$
- $\mathcal{E}_3=\{(x\,;y) \mid x{\cdot}y+2{\cdot}y=0\}$

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.
Donner pour chacun des trois ensembles ci-dessus :

- la nature de leur représentation dans le plan,
- des élèments caractérisants leur représentation.

Exercice 6776

A tout nombre complexe z, on associe un nombre complexe z' défini par :
$$z' = z^2 + 4{\cdot}z + 3$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres complexes z tel que z' soit un nombre réel.

Exercice réservé 6782

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :
$$f(z) = z^2 + 2{\cdot}z + 9$$

Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}{\cdot}y$ où x et y sont des nombres réels.

1. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
$$f(z) = \left(x^2 - y^2 + 2{\cdot}x + 9\right) + \mathrm{i}{\cdot}\left(2{\cdot}x{\cdot}y + 2{\cdot}y\right)$$

2. On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que $(\mathcal{E})$ est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Exercice 6353

Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Laquelle? Jusifier votre réponse.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres complexes z vérifiant : $\dfrac{1}{z^2+1}$ soit un réel.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est :

1. l'ensemble des nombres réels ;
2. l'ensemble des imaginaires purs privé de i et de $-\mathrm{i}$;
3. la réunion de l'ensemble des nombres réels et de l'ensemble des imaginaires purs privé de i et $-\mathrm{i}$;
4. le nombre 0.

10. Module d'un nombre complexe :

Exercice 5345

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

a. $1 - 2{\cdot}\mathrm{i}$ b. $-5{\cdot}\mathrm{i}$ c. $(3 - 2{\cdot}\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})$

d. $-\mathrm{i}{\cdot}(1 - 2{\cdot}\mathrm{i})$ e. $\dfrac{1 + \mathrm{i}{\cdot}\sqrt{3}}{3{\cdot}\mathrm{i}}$ f. $\dfrac{3 - \mathrm{i}{\cdot}\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}$

11. Module : propriétés algébriques :

Exercice 3846

1. Etablir l'égalité suivante pour tout nombre complexe z non nul :
$$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\overline{\left(z^2 - 1\right)} = -\overline{z}^2{\cdot}\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$$

2. Pour tout nombre complexe z, on définit le nombre complexe z' par :
$$z' = \frac{(3 + 4{\cdot}\mathrm{i}){\cdot}z + 5{\cdot}\overline{z}}{6}$$

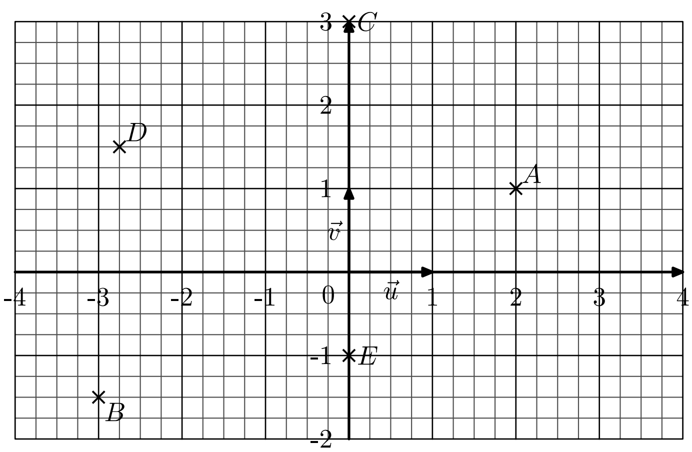
   a. Pour tout nombre complexe z, établir l'égalité :
$$\frac{z' - z}{1 + 2{\cdot}\mathrm{i}} = \frac{z + \overline{z}}{6} + \mathrm{i}{\cdot}\frac{z - \overline{z}}{3}$$

   b. En déduire que le nombre $\dfrac{z' - z}{1+2{\cdot}\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

12. Représentation graphique :

Exercice 3784

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ et les cinq points représentés ci-dessous :



1. Déterminer les écritures algébriques des affixes des points A, B, C, D, E.

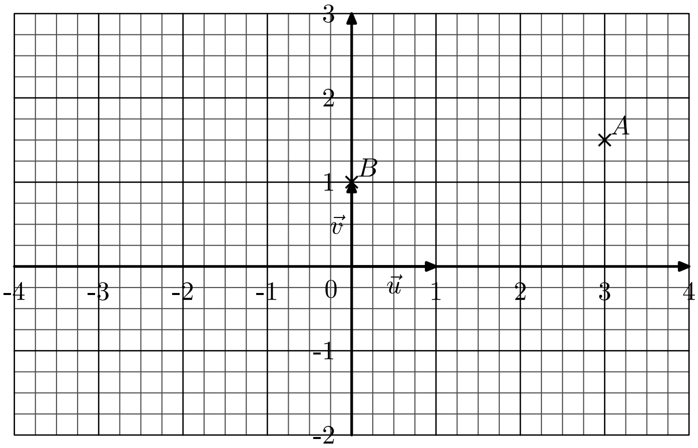
2. Placer dans le plan les points F, G, H et I d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 définies par :

$$z_1 = 3 - \mathrm{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{3}{2}\cdot\mathrm{i}$$
$$z_3 = -\frac{7}{4} + 2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_4 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\cdot\mathrm{i}$$

3. Déterminer l'affixe du milieu du segment $[EF]$.

Exercice 3785

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ ainsi que les points A et B représentés ci-dessous :



On note z_A et z_B les affixes respectives des points A et B.

1. Donner les écritures algébriques des affixes des points A, B.

2. a. Placer le point C d'affixe $-z_A$.

   b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en C?

3. a. Placer le point D d'affixe $\overline{z_A}$.

   b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en D?

4. a. Placer le point E d'affixe $-\overline{z_A}$.

   b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en E?

5. a. Placer le point F d'affixe $\dfrac{1}{2}\cdot z_A$.

   b. Que peut-on dire de la position du point F?

6. a. Placer le point G d'affixe $z_A + \left(-2 - 2\cdot\mathrm{i}\right)$.

   b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en G?

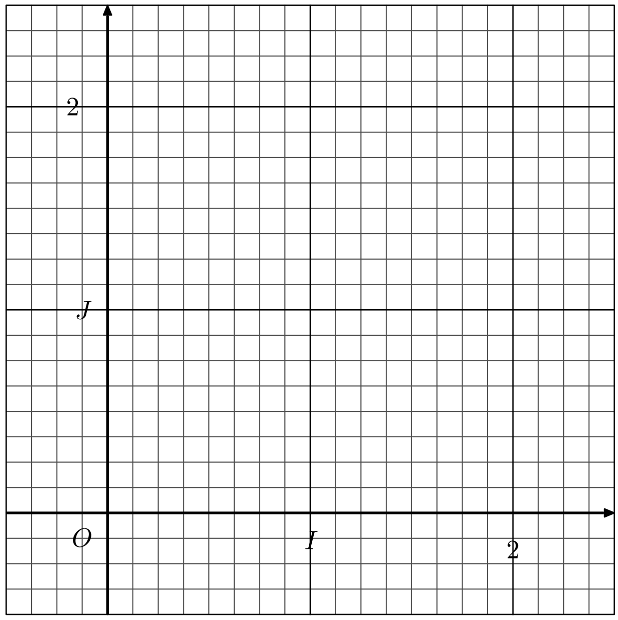
7. On considère le point H d'affixe z_H vérifiant l'égalité :
$$z_H - z_B = \frac{1}{2}\cdot\left(z_A - z_B\right)$$

   a. En résolvant l'équation, déterminer l'écriture algébrique de l'affixe z_H du point H.

   b. Que peut-on de la position du point H?

Exercice réservé 6796

On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.



1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives :
$z_1 = 0{,}5 + 0{,}5\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_2 = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_3 = 2 + 2\cdot\mathrm{i}$

   Placer les points A, B et C.

2. On considère la fonction f définies sur l'ensemble des nombres complexes non-nul par :
$f(z) = -\dfrac{1}{z^2}$

   a. Déterminer les nombres complexes z'_1, z'_2, z'_3 images respectives par la fonction f de z_1, z_2, z_3.

   b. Placer les points A', B', C' images respectives des nombres complexes z'_1, z'_2, z'_3.

3. Peut-on dire que la transformation du plan obtenue à l'aide de la fonction complexe f est une isométrie? Justifier votre réponse.

Exercice 6797

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par la relation :
$f(z) = z + \overline{z}^2$

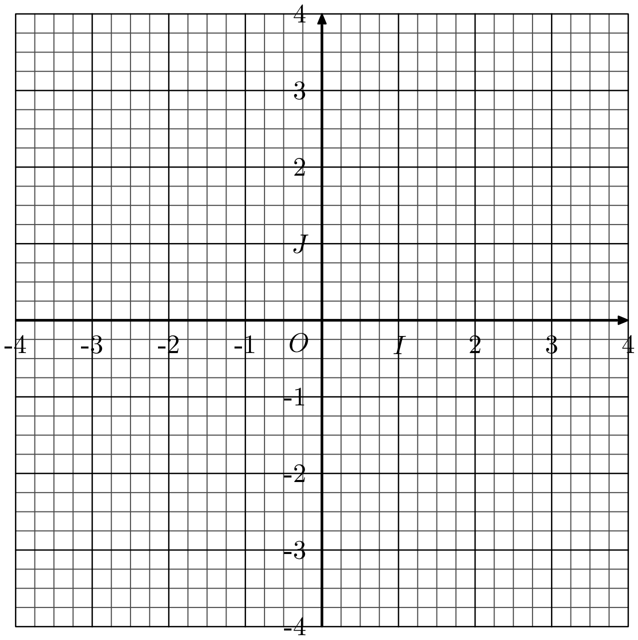
1. Notons a et b les nombres réels tels que z admettent pour écriture algébrique $z = a + \mathrm{i}\cdot b$.

   Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $f(z)$.

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres complexes z tels que $f(z)$ est un réel. C'est à dire :
$\mathcal{E} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid Im\left[f(z)\right] = 0\right\}$

   a. Soit z un nombre complexe appartenant à $\mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

   b. Représenter, dans le plan complexe ci-dessous et en rouge, l'ensemble $\mathcal{E}$.



Exercice 6792

On munit le plan complexe d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. On définit la suite $\left(z_n\right)$ de nombres complexes par :

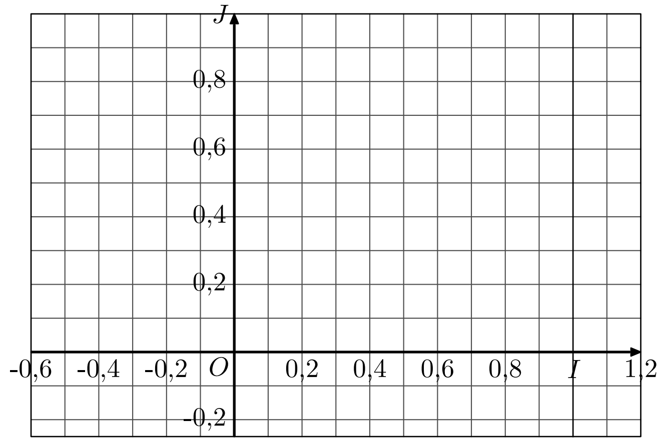
$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\right)\cdot z_n$$

1. Déterminer l'écriture algébrique des quatre premiers termes de la suite $\left(z_n\right)$.

2. A l'aide de votre calculatrice, déterminer l'écriture algébrique des termes z_4 et z_5.

3. Pour tout entier naturel n, on note M_n les images du nombre complexe z_n.

   a. Placer les points $M_0,\ldots,M_5$ dans le repère ci-dessous :



   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature des triangles OM_0M_1, OM_1M_2 et OM_2M_3.

Exercice réservé 3812

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

   $$(E)\ :\ z^3 + 4\cdot z^2 + 2\cdot z - 28 = 0$$

   a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive : $\left(z-2\right)\left(z^2+a\cdot z+b\right) = 0$

   b. Résoudre (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affize z vérifiant :
   $$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$$

   a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M. Montrer que :
   M appartient à (H) si, et seulement si, $x^2 - y^2 = 4$

   b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
   $$2 \quad ; \quad -3-\mathrm{i}\cdot\sqrt{5} \quad ; \quad -3+\mathrm{i}\cdot\sqrt{5}$$
   Vérifier que A, B et C appartient à (H).

13. Géométrie et module :

Exercice réservé 3843

On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = 1+3\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2}+2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_C = \frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+2\right)$$

Soit I le point du plan d'affixe $z_I = 2\cdot\mathrm{i}$

Montrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle de centre I. Préciser le rayon de ce cercle.

Exercice 3815

On considère les points B et C d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $7\cdot\mathrm{i}$.

Montrer que tout point M d'affixe z vérifiant :
$$z = 3\cdot\mathrm{i} + 4\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\theta} \quad \text{où } \theta\in\mathbb{R}$$
appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$.

Exercice 3813

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectives :
$$z_A = -1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$

1. Etablir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient :
   $$2(z+\overline{z}) + z\cdot\overline{z} = 0$$
   est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

2. Vérifier que les points A et B sont des éléments de Γ_2

Exercice réservé 6798

Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \left\{a+\mathrm{i}\cdot a \mid a\in\mathbb{R}\right\}$
L'image de cet ensemble dans le plan est la première bissectrice du plan.

On considère la fonction complexe définie sur $\mathbb{C}$ par la relation :
$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

Le but de l'exercice est de déterminer des caractéristiques de l'image de l'ensemble $\mathcal{E}'$ dans le plan où :
$$\mathcal{E}' = \left\{f(z) \mid z\in\mathcal{E}\right\}$$
C'est à dire la représentation dans le plan de toutes les images de l'ensemble $\mathcal{E}$ par la fonction f.

1. Soit z un élément de $\mathcal{E}$; il existe donc un réel a tel que :
$z = a + a{\cdot}\mathrm{i}$
Etablir que : $f(z) = \dfrac{1}{1+4{\cdot}a^4} - \dfrac{2{\cdot}a^2}{1+4{\cdot}a^4}{\cdot}\mathrm{i}$

2. a. Démontrer que : $\big|f(z) - 0{,}5\big| = 0{,}5$

   b. Que peut-on dire de l'image de l'ensemble $\mathcal{E}'$ dans le plan?

   c. Montrer que le point A d'affixe $0{,}5+0{,}5{\cdot}\mathrm{i}$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{E}'$. Affiner, si nécessaire, la réponse à la question b..

14. Modules et équations cartésiennes :

Exercice 3844

Soit z un nombre complexe, on considère les relations suivantes :
(E) : $|z - 2 + \mathrm{i}| = 5$; (F) : $|z + \mathrm{i}| = |z + 1 - 2{\cdot}\mathrm{i}|$

1. a. Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (E) est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

   b. Soit $a+\mathrm{i}{\cdot}b$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M ; déterminer une relation sur a et b caractérisant la relation (E).

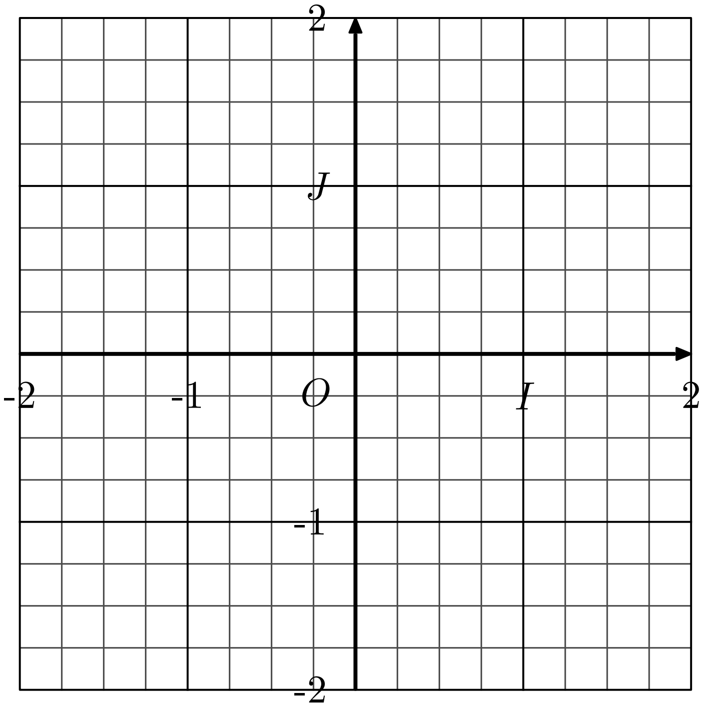
2. a. Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (F) est une droite. Préciser sa nature.

   b. Soit $a+\mathrm{i}{\cdot}b$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M ; déterminer une relation sur a et b caractérisant la relation (E).

Exercice réservé 6383

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$ orthonormé. On prendra comme unité $2\,cm$ sur chaque axe.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :
$f(z) = z^2 + 2{\cdot}z + 9$



1. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\big|f(z) - 8\big| = 3$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.

2. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x+\mathrm{i}{\cdot}y$ où x et y sont des nombres réels.

   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
   $x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}{\cdot}\big(2{\cdot}x{\cdot}y + 2{\cdot}y\big)$

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites (d_1) et (d_2) dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique en traçant ces droites.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 3835

1. Déterminer les racines du polynôme :
$P = \mathrm{i}{\cdot}z^2 - 2{\cdot}\mathrm{i}{\cdot}z + 3{\cdot}\mathrm{i}$

2. On considère le polynôme :
$Q = -\mathrm{i}{\cdot}z - 2{\cdot}z - \mathrm{i} + 17$ $\quad Q = \mathrm{i}{\cdot}z^3 + (1+\mathrm{i}){\cdot}z^2 - (2 - 3{\cdot}\mathrm{i}){\cdot}z + 3 + 9{\cdot}\mathrm{i}$

   a. Vérifier que le nombre complexe z_1 est une racine du polynôme Q où :
   $z_1 = -3 + \mathrm{i}$

   b. Déterminer la seconde racine de ce polynôme du second degré.

c. Donner la forme factorisée du polynôme Q.

Exercice réservé 3845

$$\left|\frac{\overline{z}+3\cdot\mathrm{i}}{z-6}\right| = \frac{1}{2}$$

Exercice réservé 4314

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2\cdot z^2-6\cdot z+9=0$

On désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives :

$$z_P = \frac{3}{2}\cdot\big(1+\mathrm{i}\big) \quad ; \quad z_Q = \frac{3}{2}\cdot(1-\mathrm{i}) \quad ; \quad z_R = -2\cdot\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$

2. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q. Vérifier que l'affixe z_S du point S est :

$$z_S = 3+\mathrm{i}\cdot\big(2\cdot\sqrt{3}-3\big)$$