Geogebra

Logiciel de géométrie dynamique

Activité pour la classe

LYCEE FRANÇAIS LFL LOMÉ

Table des matières

I. Présentation :

Geogebra est un logiciel de dessin dynamique permettant de créer des figures géométriques classiques mais aussi d'y associer des représentations de fonctions et la présence d'une feuille de calcul permet également de représenter des suites numériques ou complexes.

La possibilité de déplacer certains points après la construction d'une ficgure permet de mettre en avant des propriétés inhérentes à la figure et non pas à la position des points. Le déplacement d'un point sur un ensemble permet également de mettre en évidence le lieu géométrique où se trouvent intrinsèquement d'autres points.

Une expérimentation d'une épreuve pratique de mathématique au baccalauréat, organisée par l'inspection générale, a eu lieu durant les années 2008 et 2009. Cette épreuve se déroulait en une heure et le candidat devait mettre en place une situation mathématique, effectuer une conjecturation sur une propriété observée et ensuite passer à sa résolution théorique.
La notation mettait en avant la maîtrise des logiciels proposés, l'esprit de recherche mis en oeuvre par l'élève lors de la mise en place de conjecture et de la validation de celle-ci dans la partie théorique.

Ce livret présente beaucoup d'exercices tirés ou inspirés de ces épreuves expérimentales.

Le but principal de ces exercices est d'emmener les élèves à observer, à classer, à conjecturer. Le passage à la partie théorique conclut la démarche scientifique : valider une conjecture.

II. Descriptions des exercices :

A. Classe de Seconde :

Exercice 1 *(Enoncé p.19)*

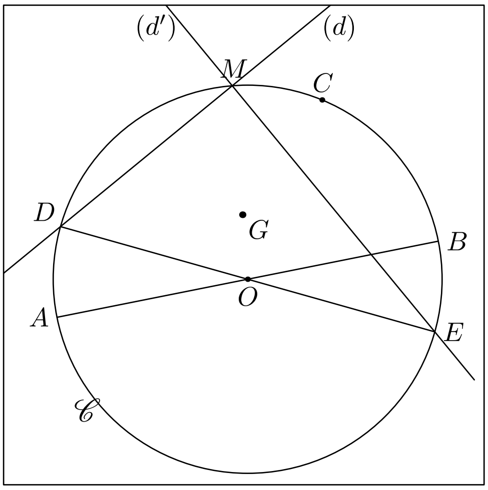
Création de la figure : Cette figure est un peu longue à construire du fait du grand nombre de points intervenants ; il faut également penser à cacher certaines droites utiles lors de la construcion. Pour la création du centre de gravité G du triangle DEM, deux méthodes sont possibles :

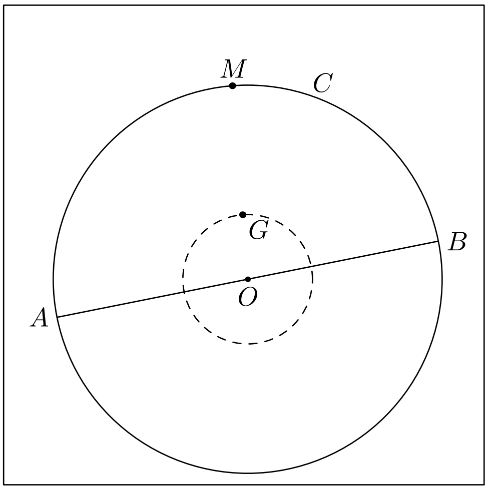
- par la géométrie classique, on trace les médianes issues des sommets D et E ;
- à l'aide du barycentre et de l'égalité vectorielle $3{\cdot}\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$.

  Le point G est obtenue dans le champ de saisie par la formule : `G=(1/3)*(M+D+E)`

Attention, la propriété "*O milieu de $[DE]$*" ne peut être utilisée tant qu'on n'a pas montré que le triangle DEM est rectangle en M

Mise en place de la conjecture : En faisant varier la position du point M, les élèves conjecturent que le point M est sur un cercle de centre O : l'affichage du lieu du point G relativement au point M permet de consolider leur conjecture.





La position du centre de gravité sur une médiane permet d'émettre une conjecture sur le rayon de ce cercle.

Outils mathématiques : Cet exercice fait intervenir les propriétés des triangles rectangles et de leur cercle circonscrit ainsi que la position du centre de gravité d'un triangle sur chacune de ses médianes.

Organisation du temps de travail : La construction et la conjecture étant assez simple, en une heure, tous les élèves devraient au moins commencer la partie théorique.

Exercice 2

(Enoncé p.19)

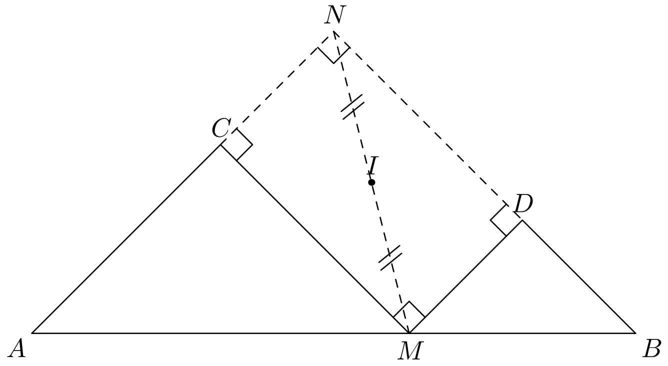
Création de la figure : Le point M doit être un point libre du segment $[AB]$ et les triangles AMC et MBD doivent être construit à partir de leur hypothénuse. La construction du triangle rectangle isocèle AMC peut se faire :

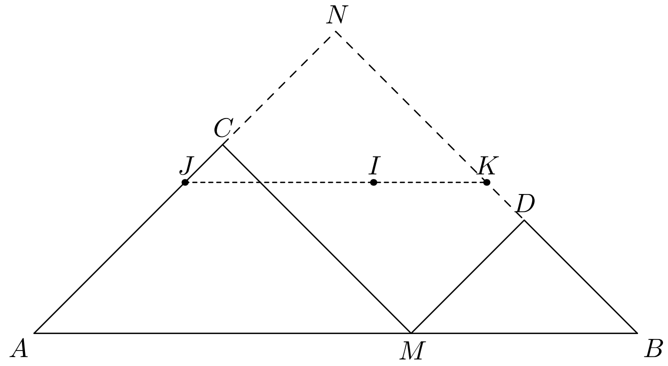
- soit à partir du cercle de diamètre $[AM]$ et de la médiatrice de $[AM]$;
- soit en traçant les deux angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{AMC}$.

De nombreux points intermédiaires interviennent dans la construction de cette figure : il est préférable de demander aux élèves de cacher les objets uniquement utilisés dans la construction de la figure.

Mise en place de la conjecture : Dans la question 1. c. , les élèves peuvent se contenter de signaler que le point I décrit un segment parallèle à la droite (AB).

L'apparition du point N, à la question 2. , permet de considérer le triangle ABN et le segment reliant les milieux des segments $[AN]$ et $[BN]$; l'élève peut alors préciser sa conjecture : il devra lui-même introduire les points J et K milieux des segments $[AN]$ et $[BN]$.





Outils mathématiques : Les propriétés des angles dans un triangle permettent de montrer que le quadrilatère $MDNC$ est un rectangle.

Les propriétés du rectangle permettent d'affirmer que le point I est le milieu du segment $[MN]$ quelque soit la position du point M sur $[AB]$.

Le théorème des milieux permet d'affirmer que la droite (IJ) est toujours parallèle à (AB).

Organisation du temps de travail : La construction de la figure est assez longue et peut poser des difficultés à certains élèves pour construire les triangles ACM et MDB en fonction du point libre M.

La partie théorique peut poser des difficultés en mobilisant des connaissances du collège et en obligeant les élèves à introduire eux-mêmes de nouveaux points dans la figure.

Plusieurs pistes peuvent être menées pour utiliser cette activité durant une heure de classe :

- Les élèves peuvent en travail personnel donner le programme de tracer "*à l'aide du compas et de la règle non-graduée*" de cette figure. La conjecture sera alors conduite devant le logiciel de géométrie dynamique ;
- La construction peut être faite en demi-groupe jusqu'à l'introduction des points J et K. La démonstration de la conjecture peut être laissée aux élèves en retard en devoir maison.
- On peut faire un travail préalable en groupe où sera présenté l'énoncé auquel la question 2. a. sera enlevée. La conjecture prendra alors plus de temps mais les propriétés de la figure seront plus facilement appréhendées par les élèves.

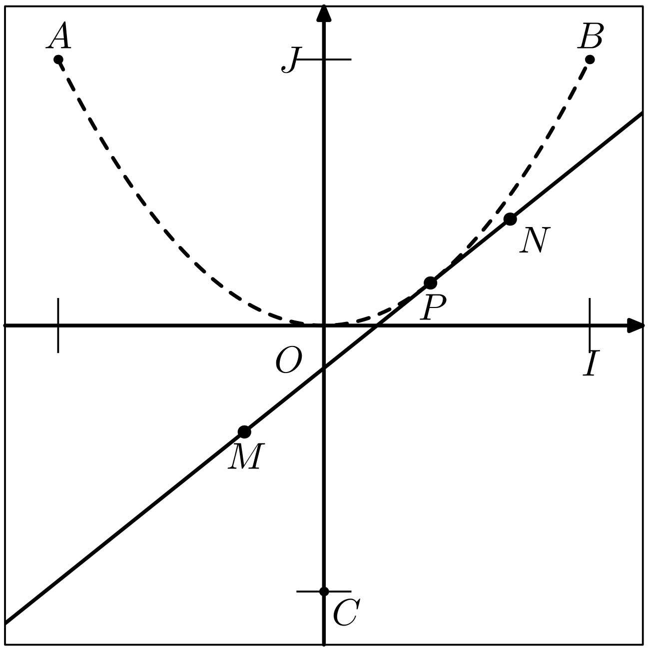
B. Classe de Première :

Exercice 3 *(Enoncé p.20)*

Création de la figure : Cet exercice nécessite d'utiliser le champ de saisie de Geogebra pour placer les barycentres des systèmes proposés. Une certaine maîtrise et rigueur dans la saisie est nécessaire mais la figure est assez vite réalisée.

Mise en place de la conjecture : Les conjectures sont assez évidente à mettre en oeuvre :

- le lieu géométrique du point P décrit une partie de la parabole d'équation $x \longmapsto x^2$;
- la droite (MN) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point P.



Outils mathématiques : La définition dans Geogebra du point `M` vient de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$ caractérisant le barycentre du système $\big\{ (A\,;t)\ ;\ (B\,;1-t) \big\}$.

L'écriture successive des coordonnées des barycentres M, N, P en fonction du paramètre t permet d'obtenir $P\left(1-2t\,;(1-2t)^2\right)$: l'élève doit alors reconnaitre les coordonnées d'un point appartenant à la parabole d'équation $y = x^2$.

L'alignement du barycentre de deux points et le calcul du coefficient directeur de la droite (MN) *(ainsi que l'abscisse du point P)* permettent d'affirmer que la droite (MN) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

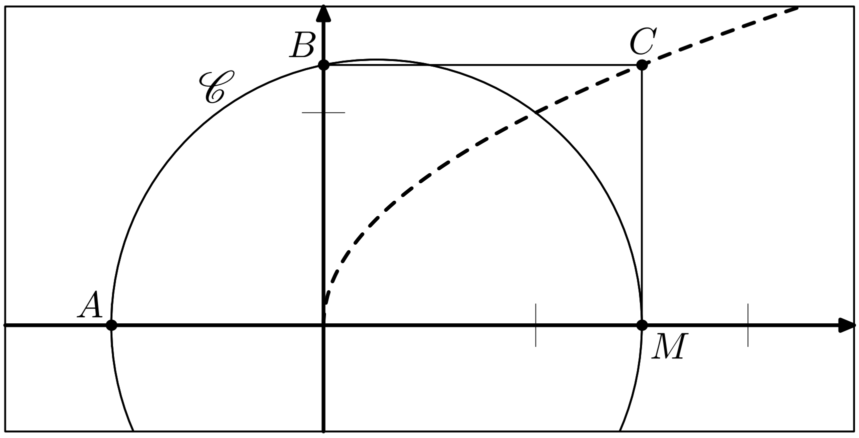
Organisation du temps de travail : La mise en place de la figure ne comporte pas de grandes difficultés. Par contre, la partie théorique nécessite un travail de grande rigueur quant à la recherche et l'utilisation des coordonnées des points M, N et P.
On peut commencer sur une séance d'une heure et demander à ce que la fin de la démonstration, ainsi que sa rédaction au propre, soit à terminer en travail personnel.

Exercice 4 *(Enoncé p.20)*

Création de la figure : La création de cette figure est assez rapide et facile à mettre en oeuvre. La lettre `x` miniscule est utilisée par Geogebra pour désigner la fonction qui a un couple de nombres retourne son abscisse ; il faut penser à nommer différemment le curseur par exemple xx.

Cet exercice permet de construire géométriquement la courbe représentative de la fonction racine carrée.

Mise en place de la conjecture : Les élèves doivent remarquer assez facilement que le lieu géométrique du point C est la courbe représentative de la fonction racine carrée.



Outils mathématiques : Les propriétés des triangles rectangles et des cercles permettent d'affirmer que le triangle ABM est rectangle en B ; on obtient $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

La relation de Chasles *(en utilisant le point O et l'orthogonalité des axes)* et la linéarité du produit scalaire permet d'obtenir l'égalité métrique recherchée.

Les points M et B étant les projetés orthogonaux du point C, on en déduit l'égalité :

$y_C{}^2 = x_C$

Organisation du temps de travail : La mise en place de la construction et la résolution de la partie théorique ne doit pas prendre plus d'une heure pour la majorité des élèves.

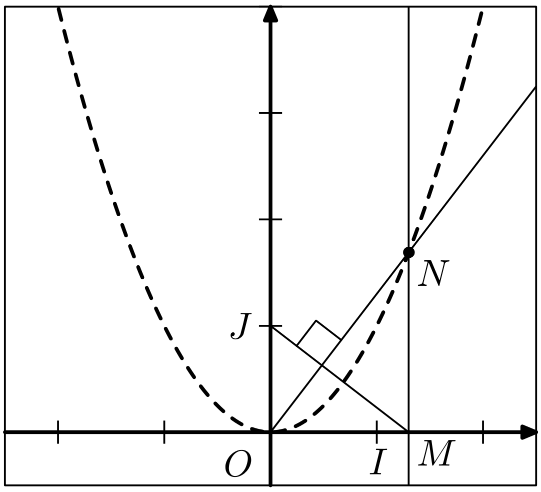
Exercice 5

(Enoncé p.21)

Création de la figure : La création de la figure est assez facile. L'utilisation du point J, unité de l'axe des ordonnées, peut ralentir légèrement les élèves.

Geogebra ne permet pas d'utiliser la lettre x miniscule d'un objet car elle est utilisée pour désigner une fonction interne. On peut nommer le curseur xx.

Mise en place de la conjecture : L'association du lieu géométrique du point N lorsque le point M décrit l'axe des abscisses à la courbe représentative de la parabole d'équation $x \longmapsto x^2$ est évidente.



Outils mathématiques : L'orthogonalité des deux droites entraine immédiatement la relation :

$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{JM} = 0$

La relation de Chasles avec l'utilisation du point O et l'orthogonalité des axes et les propriétés de bi-linéarité du produit scalaire permet d'obtenir la relation demandée.

On conclut en remarquant : $y_N = MN$

Organisation du temps de travail : La mise en place de la construction et la résolution théorique doit pouvoir se faire en une heure de cours pour la majorité des élèves.

Exercice 6 *(Enoncé p.21)*

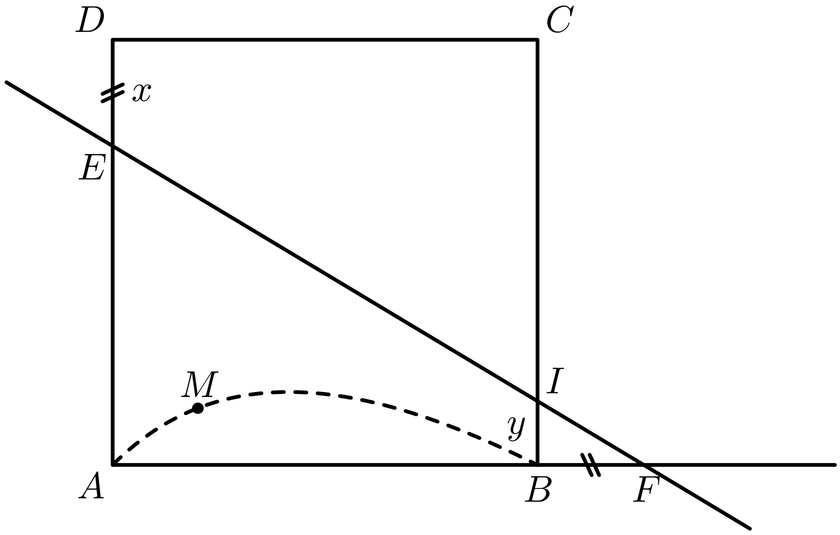
Création de la figure : La construction de la figure nécessite l'usage de la ligne de saisie de Geogebra :

- pour placer le point F, les élèves doivent extraire la distance DE et la placer dans une variable.

- pour construire le point M et plus particulièrement l'ordonnée du point M, les élèves doivent extraire la distance BI et la placer dans une variable.

La maitrise de la ligne de saisie permet de réaliser rapidement cette figure.

Mise en place de la conjecture : L'affichage du lieu géométrique du point M lorsque le point E varie sur le segment $[DA]$ permet de mettre en évidence le maximum de la distance IB qui est l'ordonnée maximale du point M.



Dans la fenêtre "*Algèbre*", on observe que le maximum du lieu géométrique définit par le point M a pour coordonnées $(0{,}42\,;0{,}17)$. Ainsi, la valeur maximale de IB est 0,17 lorsque $DE = 0{,}42$.

On peut augmenter la précision de calcul de Geogebra, à l'aide de la commande :

Options ⇝ Arrondi ⇝ 5 décimales

Outils mathématiques : En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle FEA, on obtient une relation entre x et y.

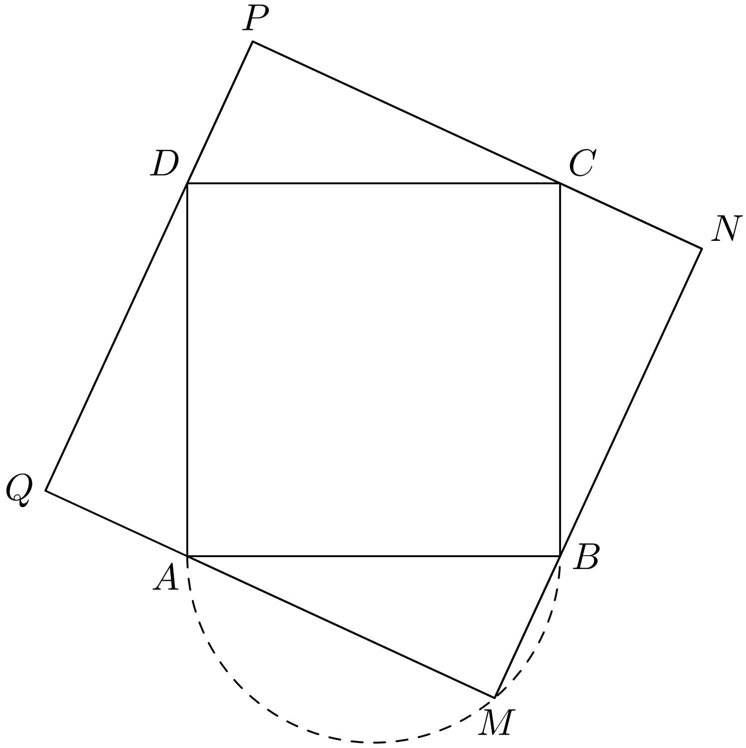
Une étude classique de fonction *(étude du signe de la dérivée et tableau de variation de la fonction)* permet d'obtenir la valeur maximale de la fonction f.

Organisation du temps de travail : Cet exercice permettra aux élèves de renforcer leur maitrise de la ligne de saisie de Geogebra : une grande hétérogénité risque d'être observée dans la construction de la figure.

La construction de la figure, la conjecture et la mise en place de la partie théorique peut être effectué en une heure de classe. Une rédaction correcte de la résolution théorique de la conjecture peut être demandée en tant que travail personnel.

Exercice 7 *(Enoncé p.22)*

Création de la figure : La construction des deux carrées est facile à réaliser.



La définition des variables `quot` et `val` nécessite l'utilisation du champ de saisie mais ne présente pas de réelles difficultés.

Mise en place de la conjecture : L'égalité des deux variables `quot` et `val` est immédiate. On peut pousser la comparaison de ces deuix variables en modifiant la précision utilisée par Geogebra :

Options ⇝ Arrondi ⇝ 5 décimales

Outils mathématiques : Pour établir leur conjecture, les élèves devront montrer l'égalité : $\dfrac{\mathcal{A}_{MNPQ}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = 1 + \sin(2{\cdot}\alpha)$.

En observant la correspondance entre les angles des triangles ABM et ADQ, on montre que ces deux triangles sont isométriques. On peut alors écrire $MQ = AM + MB$

L'utilisation des relations trigonométriques dans le triangle ABM permet d'exprimer la longueur MQ en fonction de x et de α.

Les formules d'addition des fonctions trigonométriques permet de conclure quant à l'égalité des variables `quot` et `val`.

Organisation du temps de travail : La construction de la figure ne pose pas de problème particulier ; la définition des variables `quot` et `val` pourra être un peu plus longue en fonction des élves.

La démonstration de la partie théorique peut demander un certain temps car mélangeant plusieurs compétences : géométrie plane, relations trigonométriques, manipulations algébriques.

Cet exercice est traitable pour la plupart des élèves en une heure.

C. Classe de Terminales :

Exercice 8 *(Enoncé p.23)*

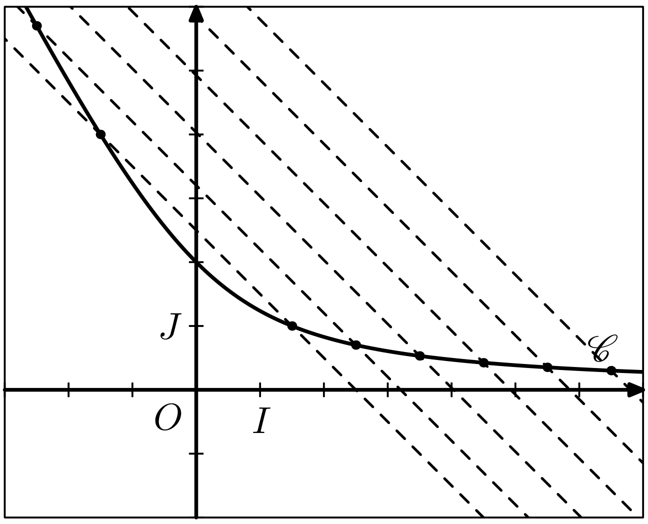
Création de la figure : La construction de cette figure fait appel au champ de saisie :

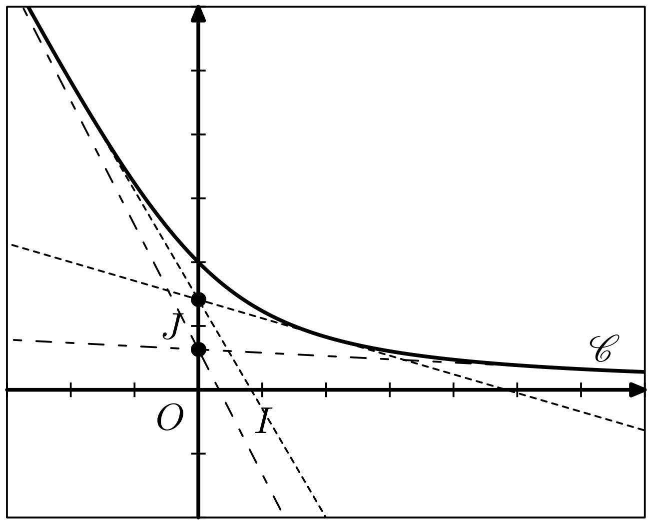
- le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ;
- l'utilisation d'un curseur pour définir la valeur numérique a ;
- la création des points M et N appartenant à $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives `-a` et `a`.

L'utilisation du champ de saisie reste assez simple.

Mise en place de la conjecture : Les conjectures sont assez faciles à observer en faisant varier la valeur de `a` :

- les droites (MN) sont parallèles entre elles : -1 est leur coefficient directeur ;
- les tangentes passant par les points M et N s'interceptent sur l'axe des ordonnées.





Outils mathématiques : De nombreuses notions sont mobilisées pour établir les conjectures *(calcul du coefficient directeur, expression de la dérivée, expression de tangentes à une courbe, détermination des points d'intersection de courbes)* mais la principale difficulté est de mobiliser ces notions avec la présence du paramètre a dans les calculs algébriques :

- Les coordonnées de M et de N ne sont pas des valeurs numériques : elles dépendent du paramètre a ;
- Les expressions des deux tangentes comportent la variable x et le paramètre a.

La partie théorique demande une bonne maitrise du calcul algébrique de la part des élèves et de la démarche à suivre pour résoudre les différentes questions.

Organisation du temps de travail : La mise en place de la figure est assez simple et devrait être rapide mais la partie théorique demande nettement plus de temps.

Sur une séance d'une heure, la mise en place de la figure, la conjecture et la détermination du coefficient directeur des droites (MN) seront faits par la plupart des élèves.

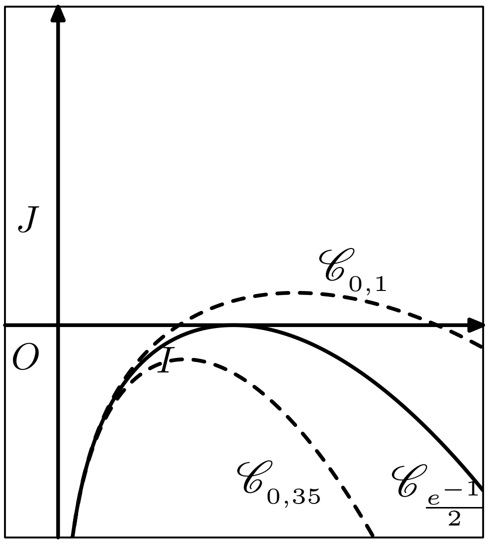
Les élèves peuvent continuer la démonstration du point d'intersection de la tangente en travail personnel; pour guider les élèves, il est possible de leur donner l'équation réduite de la tangente (d) en fonction de a.

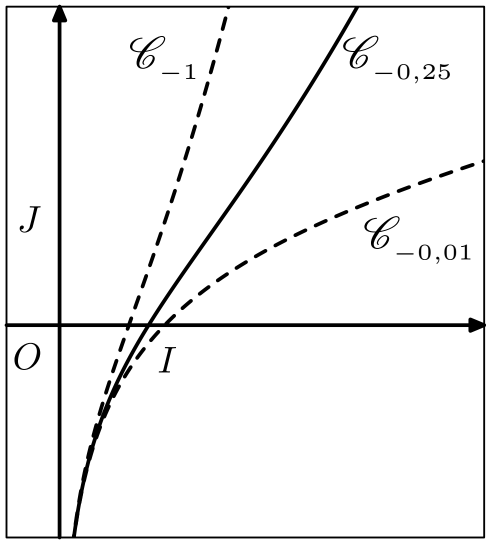
Exercice 9

(Enoncé p.24)

Création de la figure : La mise en place de la figure ne pose aucun problème et doit être effectuée rapidement.

Mise en place de la conjecture : L'observation, entrainant les conjectures, est également assez rapide. Il faut que les élèves fassent le lien entre les zéros de la fonction (E) *(et donc les intersections avec l'axe des abscisses)* et les solutions de l'équation (E).





Dans Geogebra, pour déplacer un curseur en fonction de son pas d'incrémentation, il faut utiliser les touches directionnelles du clavier *(on doit sélectionner au préalable le curseur)*.

Certains élèves peuvent avoir un doute sur les conjectures à faire pour $k \in]0\,;\,0{,}18[$: il est alors utile d'utiliser le zoom de Geogebra pour dissiper leur doute.

Outils mathématiques : Les preuves des deux conjectures passe par l'étude du signe de la fonction dérivée f_k' :

- Pour la première conjecture, aucune compétence particulière n'est demandée : il suffit d'observer que la fonction est strictement monotone et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

- Pour la deuxième conjecture, on observe que les fonctions f_k admettent un unique maximum ; les élèves doivent alors donner les coordonnées de cet extrémum en fonction du paramètre k. Une meilleure maitrise du calcul algébrique est demandée.

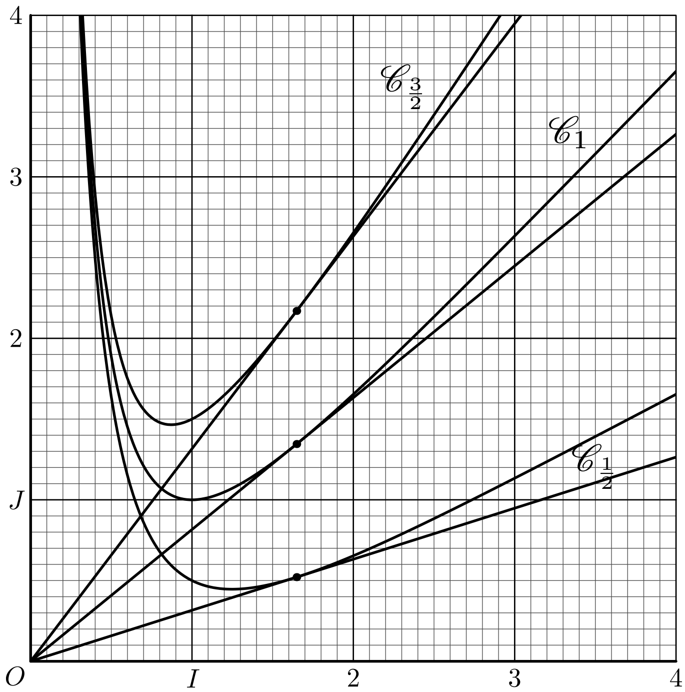
Organisation du temps de travail : La construction de la figure et la mise en place des conjectures doivent se faire assez rapidement. La démonstration de la première conjecture doit également se faire dans l'heure de classe.
La mise en place, en fin d'heure, de la démarche pour résoudre la seconde conjecture doit permettre aux élèves sous forme d'un travail personnel.

Exercice 10 *(Enoncé p.25)*

Création de la figure : Le tracé de cette figure est assez simple :

- L'utilisation d'un curseur permettant de faire varier la valeur du paramètre `k` et d'afficher les courbes de la famille $\mathscr{C}_k$.
- En plaçant un point libre sur la courbe $\mathscr{C}_k$ et en utilisant l'outil de tracer des tangentes dans Geogebra, on arrive facilement à déterminer le point de la courbe en lequel la tangente passe par l'origine.

Mise en place de la conjecture : L'exercice commence par un tracé à la main de tangentes pour mettre en avant la conjecture : chacune des courbes $\mathscr{C}_k$ admet une tangente passant par l'origine et les points de contacts ont la même abscisse.



En passant à l'utilisation du logiciel Geogebra, on étend la conjecture à toutes les fonctions de la famille (f_k).

Outils mathématiques : Pour valider la conjecture, il faut que les élèves écrivent l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a. Ils doivent alors chercher la valeur de a pour laquelle son ordonnée à l'origine est nulle : ils concluront que la valeur de a est indépendante de celle de k.

Ainsi, on doit dériver l'expression de la fonction f_k en présence du paramètre k et écrire l'équation des tangentes en fonction des deux paramètres k et a : une certaine pratique du calcul algébrique est nécessaire.

Organisation du temps de travail : Ce sujet peut être traité en une heure par la plupart des élèves mais en tenant compte de la difficulté de la présence de paramètres lors des manipulations algébriques.
Un exercice présentant ces difficultés peut être vu en classe avant de traiter cette activité.

Exercice 11 *(Enoncé p.25)*

Création de la figure : Le tracé de la fonction et du segment $[OA]$ est extrémement facile et rapide. A ce niveau, les élèves peuvent déjà observer où se situe le point A réalisant le minimum de la distance OA.

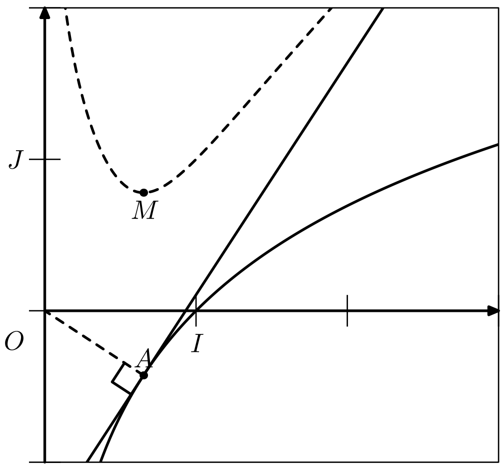
On peut récupérer la distance d de deux manières :

- soit on utilise le bouton "*distance*" et on repère dans le panneau "*Algèbre*" le nom de l'instruction créé par Geogebra ; généralement, ce sera `distanceOA`.

- soit on utilise l'instruction "`d=distance[O,A]`" à partir de la ligne de saisie de Geogebra qui affectera la distance OA dans la variable d.

La création du point M passe nécessairement par la ligne de saisie avec l'instruction : `M=(x(A),d)`.

Mise en place de la conjecture : Une fois la figure construite, la recherche de la position du point A_0 est assez facile avec l'apparition de la courbe décrite par le point M.
Dans ce cas, on observe facilement la position relative de la tangente (Δ) en A_0 et de la droite (OA_0) :



Pour améliorer la précision de l'abscisse du point A_0, on peut procéder ainsi :

- On augmente la précision de Geogebra avec la commande :
  Options ⇝ Arrondi ⇝ 5 décimales
- On modifie l'incrémentation inhérente au point A en ouvrant la boîte à dialogue suivante :
  clic-droit sur le point A ⇝ Propriétés... ⇝ Onglet Algèbre
  On peut alors fixer un pas d'incrémentation de 0,01.
- Après avoir sélectionné le point A, on utilise les touches directionnelles du clavier pour déplacer le point A sur la courbe $\mathscr{C}$ avec le pas d'incrémentation précédemment défini.

Outils mathématiques : L'apparition de la courbe définie par le lieu du point M doit faire penser aux élèves à faire intervenir une nouvelle fonction : celle mesurant la distance OA en fonction de l'abscisse x du point A.

Pour étudier le minimum cette fonction, il sera préférable d'étudier le carré de cette fonction pour éviter de travailler avec des racines carrés. Cela est possible puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ *(on travaille sur des distances, donc positives)* et conserve donc le minimum.

La recherche de la condition réalisée par l'abscisse x_0 s'obtient par la nullité de la dérivée lorsque une fonction continue et dérivable atteint un extrémum.

La recherche de l'orthogonalité entre la droite (OA_0) et (Δ_0) se fera en étudiant le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{OA}$ et d'un vecteur directeur de la droite (Δ_0).

Organisation du temps de travail : La création de la figure et la mise en place de la conjecture est assez rapide.

La partie théorique est facile d'un point de vue technique, mais des incertitudes risquent de gêner la progression des élèves :

- Quelle est cette relation demandée à la question 3. a. ?
  On pourra demander aux élèves de demander de chercher la valeur exacte de x_0 *(ce qui*

est, en fait, impossible à déterminer) et ils n'arriveront qu'à caractériser la valeur x_0 au travers d'une relation.

- Lors de la recherche de l'orthogonalité, les élèves peuvent penser impossible de trouver 0 pour un produit scalaire où intervient un nombre x_0 non connu.

Cette activité peut se dérouler en une heure mais les élèves doivent être accompagnés au cours de leur progression dans la partie théorique.

Exercice 12 *(Enoncé p.??)*

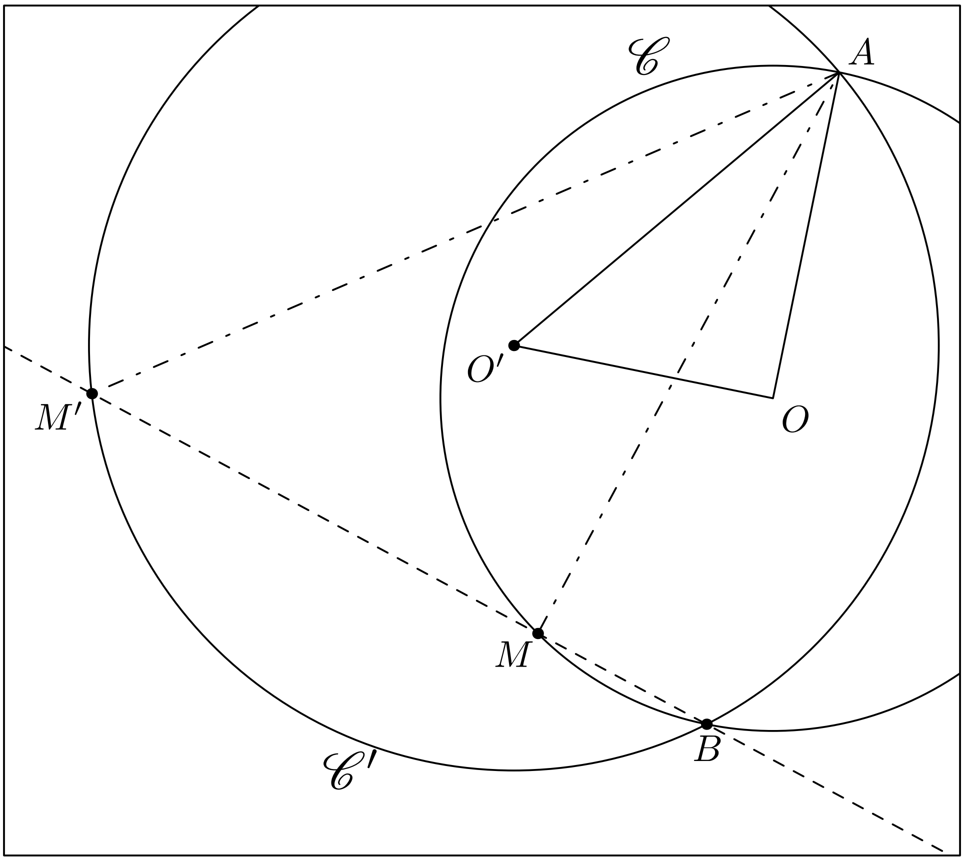
Création de la figure : La construction de la figure est assez intéressante car les élèves doivent mobiliser des outils mathématiques pour réaliser cette construction :

- Le cercle $\mathscr{C}'$ admet comme rayon l'image du segment $[OA]$. A étant le centre de la similitude $\mathcal{S}$, on en déduit que le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre O' et pour rayon $[O'A]$;

- On doit reporter la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$ sur le segment $[AO']$ pour obtenir le point M' : le point M étant un point de $\mathscr{C}$, le point M' sera un point de $\mathscr{C}'$.

Attention, lors de la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$, on doit repérer dans le panneau "*Algèbre*" le nom donné par Geogebra à cette mesure : généralement α ; on peut modifier son nom pour une utilisation plus facile de cette valeur.
On remarque que Geogebra donne directement cette mesure en degré.

Mise en place de la conjecture : La conjecture est immédiate : les points M, M' et B sont alignés. Ainsi, la droite (MM') passe toujours par le point fixe B quelque soit la position du point M.



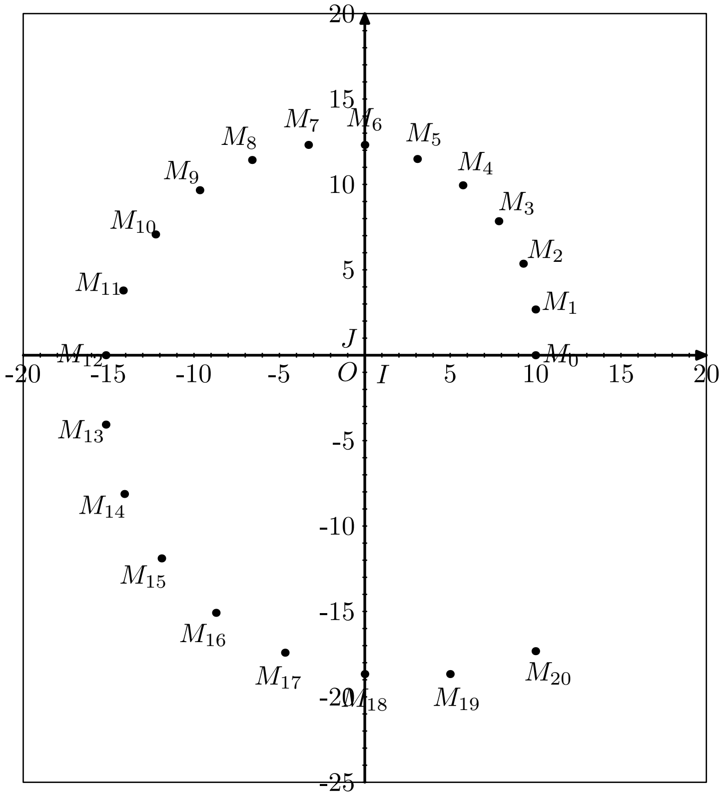
Outils mathématiques : Bien que la construction fasse intervenir explicitement une similitude, la démonstration utilise seulement les angles au centre et les angles inscrits pour affirmer que les droites (BM) et (BM') sont parallèles.

Organisation du temps de travail : La mise en place de la figure est longue mais permet aux élèves d'investir les propriétés des similitudes directes.

La non-utilisation des propriétés des similitudes directes risquent de bloquer un grand nombre d'élèves dans la mise en place de la démonstration, en plus du fait que la démonstration repose sur des notions du collège. Il peut être bon de commencer cette activité en classe et d'en donner la correction au cours suivant.

Exercice 13 *(Enoncé p.**??**)*

Création de la figure : L'utilisation du tableur permet assez facilement de créer les suites (x_n) et (y_n). Geogebra permet ensuite de créer facilement les points dont les coordonnées sont associées à ces deux suites :



Mise en place de la conjecture : En voyant les points tourner et formant une spirale s'agrandissant, les élèves doivent conjecturer assez rapidement qu'on est en présence d'une similitude directe dont le rapport est strictement plus grand que 1. Au vu de la figure, on peut également conjecturer que le centre de la similitude est le point O.

La mesure, arrondie au dixième, des éléments caractéristiques de la similitude :

- par le calcul des rapports : $\dfrac{OM_1}{OM_0}$; $\dfrac{OM_2}{OM_1}\ldots$
- par la mesure des angles : $\left(\overrightarrow{OM_0}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)$; $\left(\overrightarrow{OM_1}\,;\overrightarrow{OM_2}\right)\ldots$

Outils mathématiques : La question 3. a. permet de mettre en place l'écriture complexe de la similitude et de faire le lien entre la mesure 15^o en degré et sa mesure $\dfrac{\pi}{12}$ en radian. L'utilisation des formules d'addition permet d'obtenir les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

La recherche du rapport de cette similitude peut se faire sur un cas particulier : par exemple, en calculant le rapport $\dfrac{OM_1}{OM_0}$.

La question 3. b. a prouvé l'éxactitude de l'écriture comple de la similitude $\mathcal{S}$. Il faut alors partir dans un calcul algébrique afin d'établir l'égalité :

$x_{n+1}+i\cdot y_{n+1}=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}\cdot(x_n+i\cdot y_n)$.

Organisation du temps de travail : La figure est assez facile à réaliser ; la mise en place de la conjecture est nettement plus longue par le fait qu'elle repose sur de nombreuses mesures.

La partie théorique est assez longue et demande beaucoup de rigueur dans le développement du calcul algébrique : elle peut être poursuivie par un travail à la maison.

III. Exercice :

A. Classe de Seconde :

Exercice 1 *(Description page 3)*

Dans le plan, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et $[AB]$ un diamètre de ce cercle.
Le point C est un point du cercle $\mathscr{C}$ distincts de A et de B.

A tout point M du cercle $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, on associe la construction suivante :

- la droite (d) parallèle à la droite (AC) passant par le point M ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en D.
- la droite (d') parallèle à la droite (BC) passant par le point M ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en E.
- on note G le centre de gravité du triangle MDE.

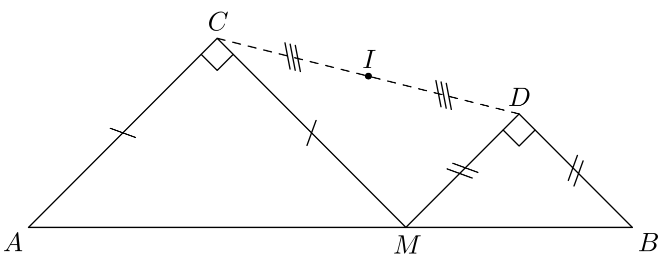
Préciser le lieu géométrique du point G lorsque le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2 *(Description page 4)*

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$ et un point M appartenant au segment $[AB]$.

On considère, d'un même côté de la droite (AB), les points C et D tels que les triangles ACM et MDB soient isocèles rectangles respectivement en C et en D.

On note I le milieu du segment $[CD]$.



1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
   a. Effectuer le tracé d'une telle figure.
   b. Tracer le lieu du point I lorsque le point M décrit le segment $[AB]$.
   c. Emettre une conjecture quant à la nature de ce lieu géométrique.

2. a. Placer le point N intersection des droites (AC) et (BD).

b. Etablir la conjecture de la question 1. c. .

B. Classe de Première :

Exercice 3 *(Description page 5)*

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,I\,;\,J)$ et les trois points suivant :
$A\,(-1\,;1)\quad ;\quad B\,(1\,;1)\quad ;\quad C\,(0\,;-1)$

Soit t un nombre réel tel que $t\in[0\,;\,1]$. On considère les trois points M, N et P définis par :

- M est le barycentre du système :
  $\big\{(A\,;t)\ ;\ (C\,;1-t)\big\}$
- N est le barycentre du système :
  $\big\{(C\,;t)\ ;\ (B\,;1-t)\big\}$
- P est le barycentre du système :
  $\big\{(M\,;t)\ ;\ (N\,;1-t)\big\}$

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

a. Justifier, qu'avec Geogebra, le point M est obtenu à l'aide de la formule : `M=t*A+(1-t)*C`

b. Placer un curseur définissant la variable t variant sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ avec une incrémentation de 0,01

2. Etablir des conjectures sur :

a. le lieu géométrique du point P. On notera $\mathscr{C}$ ce lieu.

b. la relation entre la droite (MN) et la courbe $\mathscr{C}$.

3. Etablir les conjectures faîtes à la question 2..

Exercice 4 *(Description page 6)*

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, on considère le point A de coordonnées $(-1\,;0)$.

Pour tout nombre réel x positif, on associe le point $M\,(x\,;0)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AM]$. L'axe des ordonnées intercepte le cercle $\mathscr{C}$ en deux points dont celui ayant une ordonnée positive sera noté B.

On note C le point d'intersection de la droite perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par le point B et de la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point M.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

   a. Utiliser un curseur pour désigner la variable x. *(ce curseur ne doit prendre que des valeurs positives).*

   b. Construire cette figure en utilisant faisant attention de définir le point M en fonction de la variable x.

   c. Afficher le lieu géométrique du point C lorsque la variable x décrit l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   d. Emettre une conjecture quant à la nature de la courbe décrite par le point C.

2. a. En étudiant le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM}$, établir l'égalité : $OB^2 = OM\cdot OA$.

   b. Etablir la conjecture établie à la question 1. d. .

Exercice 5 *(Description page 7)*

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal. Pour tout nombre réel x, on associe le point $M\,(x\,;0)$. On considère les deux droites suivantes :

- La droite (d) passant par le point M et parallèle à l'axe des ordonnées ;
- La droite (d') passant par le point O et perpendiculaire à la droite (JM).

Soit N le point d'intersection des droites (d) et (d').

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

   a. Placer un curseur variant sur l'intervalle $[-5\,;5]$ avec un pas de 0,1 pour représenter la variable x.

   b. Construire cette figure en définissant le point M en fonction de la variable x.

   c. Afficher le lieu géométrique du point N en fonction de la variable x.

   d. Emettre une conjecture quant à la nature de la courbe décrite par le point N.

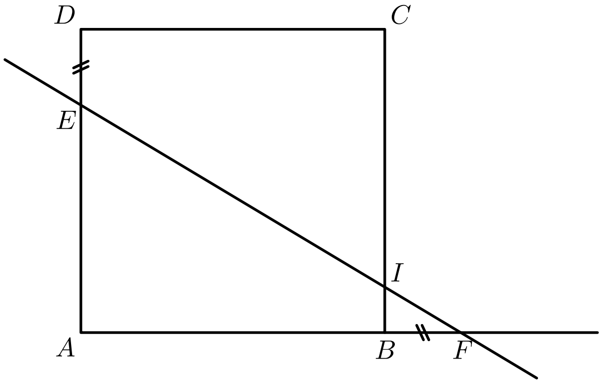
2. a. En étudiant le produit scalaire $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{ON}$, établir l'égalité : $MN = OM^2$.

   b. Etablir la conjecture faîte à la question 1. d. .

produit scalaire

Exercice 6 *(Description page 8)*

Dans le plan, on considère un carré $ABCD$ de côté $1\,cm$. Soit E un point du segment $[DA]$.
On place le point F sur la demi-droite $[Bx)$ tel que $BF = DE$
On note I le point d'intersection des droites (EF) et (BC).



On note x la longueur DE et y la longueur BI.

1. A l'aide d'un logiciel de dessin dynamique :

   a. Reproduire la configuration ci-dessus en plaçant le point E libre sur le segment $[AD]$.

   b. Afficher la courbe composée des points M de coordonnées $(x\,;y)$ lorsque x décrit l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   c. Conjecturer une valeur approchée de la longueur DE pour laquelle la longueur BI est maximale.

2. a. Dans le repère $(A\,;\,B\,;\,D)$ orthonormal, exprimer la longueur IB en fonction de x.

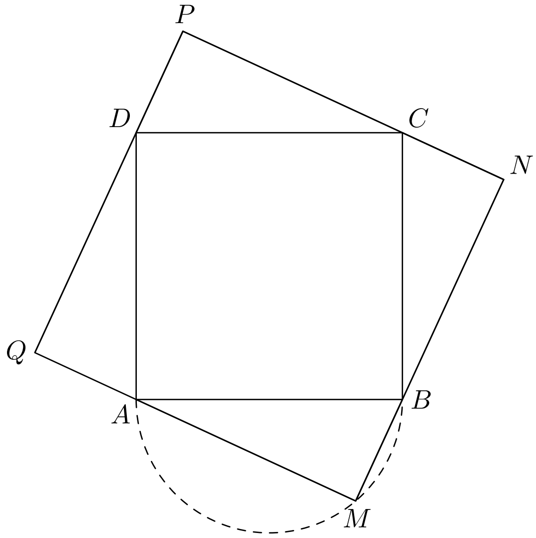
   b. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par :
   $$f(x) = \frac{x - x^2}{1 + x}$$
   Déterminer les extrémums de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   c. Etablir la conjecture faite à la question 1. c. .

Exercice 7 *(Description page 9)*

On considère le carré $ABCD$. Soit M un point appartenant au demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ se situant hors du carré $ABCD$.

On considère les points N, P et Q tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un carré dont les points A, B, C, D appartiennent respectivement aux droites (MQ), (MN), (NP), (PQ).



On notera α la mesure géométrique de l'angle $\widehat{BAM}$ et x la mesure du côté du carré $ABCD$.

1. En utilisant un logiciel de géométrie dynamique :
   a. Réaliser cette figure.
   b. Définir une variable numérique `quot` mesurant le quotient de l'aire du carré $MNPQ$ par rapport à l'aide du carré $ABCD$.
   c. Définir une variable `val` donnant la valeur de l'expression $1+\sin(2\alpha)$.
   d. Quelle conjecture peut-on faire sur les variables `quot` et `val`.
2. a. Déterminer la longueur du segment MQ en fonction de x et de α.
   b. Etablir la conjecture faite à la question 1. d. .

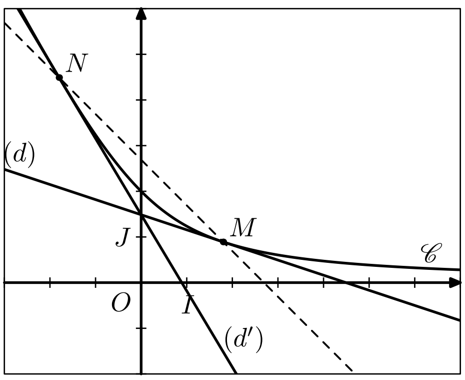
C. Classe de Terminales :

Exercice 8 *(Description page 11)*

On munit le plan d'une repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormal et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -x + \sqrt{x^2+4}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.



A tout réel a, on associe les deux points M et N appartenant à la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $-a$.

1. Dans un logiciel de géométrie dynamique :
   - Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}$.
   - Placer un curseur défini sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ représentant la valeur a.
   - Définir les points M et N en fonction de la valeur a.
   - Tracer la droite (MN) et tracer les tangentes (d) et (d') à la courbe $\mathscr{C}$ respectivements en les points M et N.
2. Quelque soit la valeur de a, émettre des conjectures sur :
   - les différentes positions de la droite (MN) ;
   - le point d'intersection des deux tangentes (d) et (d').
3. Etablir les deux conjectures précédentes.

Exercice 9 *(Description page 12)*

On souhaite étudier les solutions de l'équation :

$$(E)\ :\ \ln(x) = k{\cdot}x^2 \quad k \in \mathbb{R}$$

1. Donner l'ensemble de résolution de l'équation (E).

Pour $k\in\mathbb{R}$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'image d'un nombre x est donnée par $f_k(x) = \ln(x) - k{\cdot}x^2$

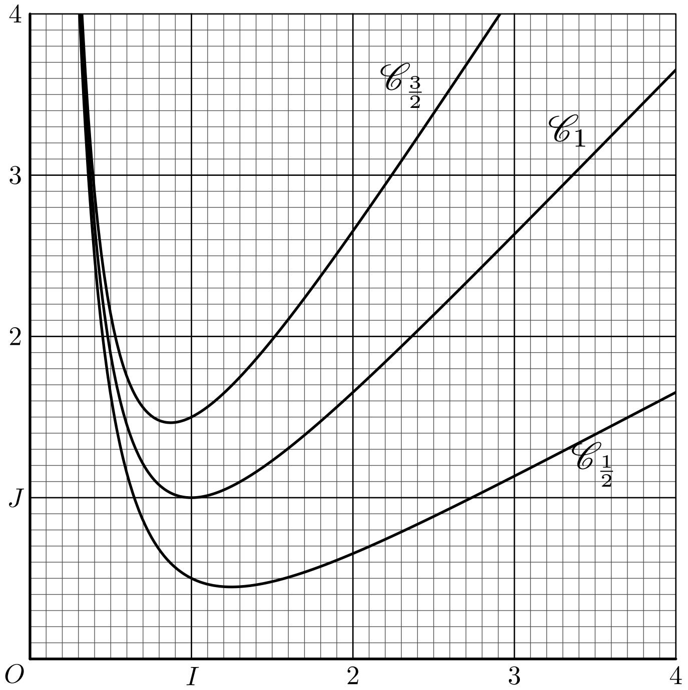
2. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
   a. Placer un curseur défini sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$ avec une incrémentation de 0,01 représentant le paramètre numérique k.
   b. Tracer la fonction f_k en utilisant le curseur représentant k.
3. a. Donner une valeur approchée de k au dixième près, pour $k>0$, pour laquelle l'équation (E) admet une unique solution.
   b. Emettre une conjecture sur le nombre de solution de l'équation (E) en fonction de la valeur de k.
4. a. Démontrer que, pour $k<0$, l'équation (E) a une unique solution.
   b. Déterminer la valeur de k, pour $k > 0$, pour laquelle l'équation (E) admet une unique solution.

Exercice 10 *(Description page 13)*

1. On considère les deux fonctions suivantes :

- $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{1}{2}{\cdot}x - \dfrac{\ln x}{x}$
- $f_1(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$
- $f_{\frac{3}{2}}(x) = \dfrac{3}{2}{\cdot}x - \dfrac{\ln x}{x}$

Dans un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormal, sont tracées les courbes $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{\frac{3}{2}}$ représentatives des fonctions $f_{\frac{1}{2}}$, f_1 et $f_{\frac{3}{2}}$.



a. Dans le graphique ci-dessous et à l'aide d'une règle, tracer pour chaque courbe une tangente à la courbe et passant par l'origine.

b. Pour chacune de ces courbes, mettre en évidence le point de contact des tangentes avec leur courbe.

2. Pour k appartenant à $\mathbb{R}$, on considère la famille des fonctions (f_k) définies par :

$$f_k(x) = k{\cdot}x - \frac{\ln x}{x}$$

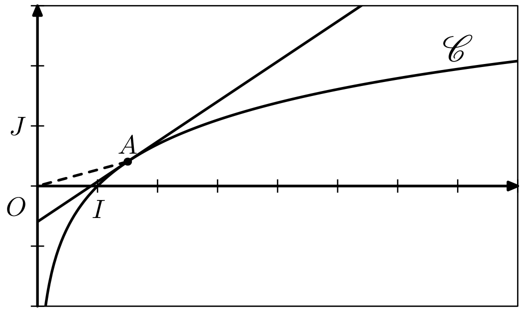
Pour chacune de ces fonctions, on note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.

a. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, émettre une conjecture quant au lieu des points, lorsque k décrit $\mathbb{R}$, en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_k$ passe par l'origine du repère.

b. Etablir cette conjecture.

Exercice 11 *(Description page 14)*

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonomal. On note f la fonction logarithme népérien et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et placer A un point libre de $\mathscr{C}$.
- Tracer le segment $[OA]$ et nommer d la distance OA.
- Placer le point M ayant pour coordonnées $(x_A\,;d)$.
- Afficher le lieu du point M en fonction de A.

2. a. Donner une valeur approchée au dixième près du minimum prise par la distance OA.

   b. Tracer, dans le logiciel, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A. Quelle propriété géométrique obtient-on lorsque le point A réalise le minimum de la distance $[OA]$?

3. On note A_0 le point de $\mathscr{C}$ réalisant le minimum de la distance $[OA]$, x_0 l'abscisse du point A_0 et (Δ_0) la tangente à $\mathscr{C}$ passant par A_0.

   On ne cherchera pas au cours des questions suivantes à déterminer la valeur de x_0 mais d'établir la position particulière de la droite (Δ_0) relativement au segment $[OA]$.

   a. Quelle relation vérifie x_0 lorsque la distance d est minimale ?

   b. Justifier la conjecture de la question 1. d. .

Exercice 12 *(Description page 16)*

Dans le plan complexe orienté, on considère un triangle $OO'A$ de sens direct, rectangle en O. On considère M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A. On désigne par $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre A qui transforme O en O' et on désigne par M' le point image de M par la similitude $\mathcal{S}$. On cherche à prouver que la droite (MM') passe par un point fixe.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

   a. Construire le triangle $OO'A$, le cercle $\mathscr{C}$ et placer le point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

   b. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ image du cercle $\mathscr{C}$ par la similitude $\mathcal{S}$.

   c. Placer le point M' image du point M par la similitude $\mathcal{S}$.

   d. Quelle conjecture peut-on émettre pour la droite (MM') lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

On appelle A et B les points d'intersections de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

2. Que peut-on dire des triangles AOM et $AO'M'$?

On placera, sur la figure, le point M de sorte que le point M appartienne au segment $[BM']$.

3. Justifier que les points M, B et M' sont alignés.

Exercice 13 *(Description page 17)*

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies respectivement par :

- $x_0 = 10 \quad ; \quad x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})\cdot y_n$
- $y_0 = 0$; $y_{n+1} = (2-\sqrt{3})\cdot x_n + y_n$

On munit le plan d'un repère $(O\,;\,I\,;\,,\,J)$. On considère, pour n un entier naturel, les points M_n de coordonnées $(x_n\,;y_n)$.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique *(et de sa partie tableur)*, placer les points M_n pour n compris entre 0 et 20.

2. On suppose l'existence d'une similitude $\mathcal{S}$ vérifiant, pour tout entier naturel n non-nul, la relation :

   $M_{n+1} = f(M_n)$

   a. Au vu de la représentation des vingt premiers termes de la suite (M_n), quel est la nature de la similitude $\mathcal{S}$? quel semble être son centre ?

   b. A partir du logiciel de géométrie dynamique, émettre une conjecture sur les valeurs, arrondies au dixième, des éléments caractéristiques de la similitude $\mathcal{S}$.

3. a. En remarquant l'égalité $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$, déterminer la valeur exacte des nombres : $\cos\dfrac{\pi}{12}$; $\sin\dfrac{\pi}{12}$

   b. Déterminer la valeur du nombre complexe a vérifiant pour tout entier naturel n :

   $z_{n+1} = a\cdot z_n$