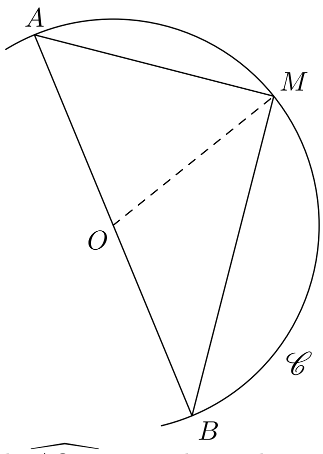
Hors programme collège / Angles inscrits et au centre

1. Angles et trigonométrie

E.1

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire.

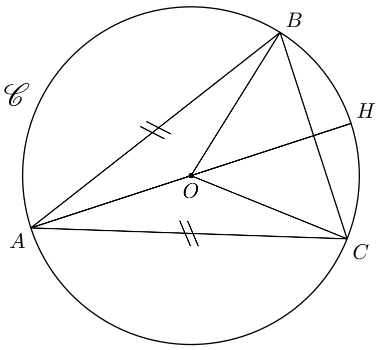


$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 6\,cm$. M est un point du cercle tel que $BM = 4{,}8\,cm$.

1. Démontrer que le triangle ABM est rectangle en M.
2. Calculer la mesures de l'angle $\widehat{ABM}$, arrondie au degré.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$, arrondie au degré.

E.2

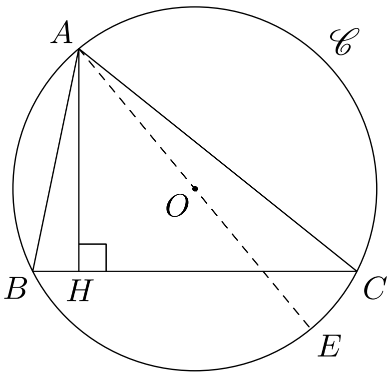
La figure ci-contre n'est pas tracée aux dimensions réelles.
Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre le point O et son rayon est de $5\,cm$.
Le triangle ABC est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et tel que $\widehat{BOC} = 80^o$.
On note H le point d'intersection de la droite (AO) avec le cercle $\mathscr{C}$.



1. Montrer que la droite (AO) est la médiatrice du segment $[BC]$.
2. Calculer la valeur de l'angle $\widehat{OAB}$. Justifier.
3. Quelle est la nature du triangle ABH? Justifier.
4. Calculer la longueur de $[BH]$.

E.3

La figure ci-dessous n'est pas à refaire sur la copie. Elle n'est pas donnée en vraie grandeur.



A, B et C sont trois points d'un cercle $\mathscr{C}$ *(voir figure)*.
On sait que $AB = 3\,cm$, la hauteur $[AH]$ mesure $2{,}5\,cm$.
On trace le diamètre $[AE]$.

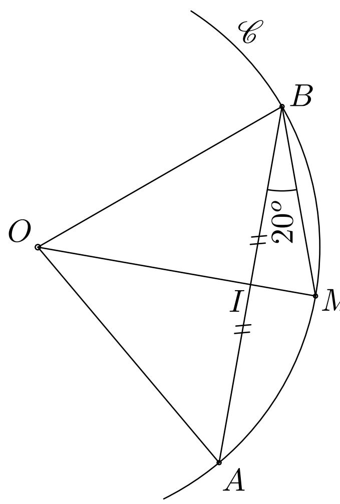
1. Quelle est la nature du triangle ACE? Justifier la réponse.
2. Expliquer pourquoi les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ sont égaux.
3. En utilisant le triangle ABH, calculer la valeur exacte de $\sin \widehat{ABH}$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{AEC}$ arrondie au degré près.

2. Angles et triangles isocèles

E.4

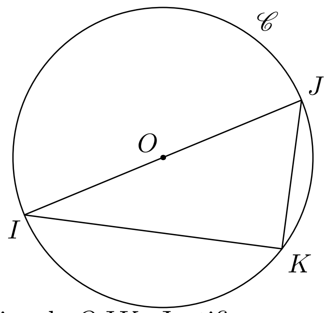
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. A, B, M trois points du cercle tel que $\widehat{ABM} = 20^o$. Notons I le milieu du segment $[AB]$.

Calculer la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$. Justifier.



E.5

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur ; on ne demande pas de la reproduire.
On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $8\,cm$.
I et J sont deux points diamétralement opposés. K est un point de $\mathscr{C}$ tel que $JK = 4\,cm$.

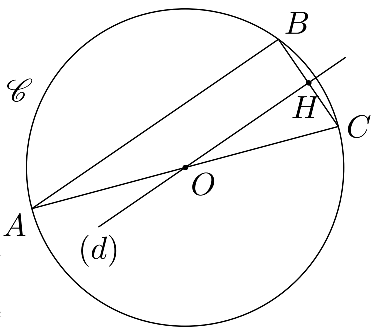


1. a. Préciser la nature du triangle OJK. Justifier.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{JIK}$. Justifier votre réponse.
2. a. Préciser la nature du triangle IJK. Justifier.
   b. Donner la mesure, au millimètre près, du segment $[IK]$.
3. On appelle R le symétrique de K par rapport à la droite (IJ). Démontrer que le quadrilatère $ROKJ$ est un losange.

3. *Angles et thalès*

E.6

La figure ci-contre n'est pas réalisée aux dimensions réelles.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O de rayon $6\,cm$.
Les points A et C sont diamétralement opposés.
B est un point du cercle tel que $BC=3\,cm$.
Le segment $[BC]$ mesure $3\,cm$ de longueur.



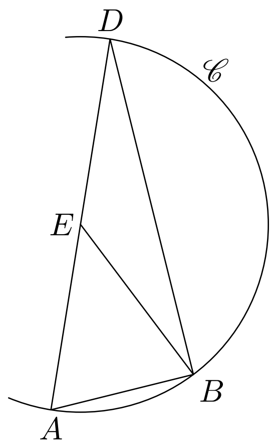
La droite (d) est perpendiculaire à (BC) passant par le point O. Elle coupe le segment $[BC]$ en H.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$. Justifier
   b. Quelle est la nature du triangle OBC ? Justifier
   c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BOH}$
   d. Justifier le fait que : $BH=1{,}5\,cm$.
4. Calculer la valeur de OH au millimètre près.

E.7

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, nous savons que :

- $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre E dont le diamètre $[AD]$ mesure $9\,cm$.
- B est un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que :
  $\widehat{AEB}=46^o$



1. Faire la figure en respectant les dimensions données.
2. Montrer que le triangle ABD est un triangle rectangle.
3. Justifier que : $\widehat{ADB}=23^o$.
4. Calculer la longueur AB et préciser sa valeur arrondie au centième de cm.
5. On trace la droite parallèle à la droite (AB) passant par E. Elle coupe le segment $[BD]$ au point F. Placer le point F.
6. Calculer la longueur EF et préciser sa valeur arrondie au dixième de cm.

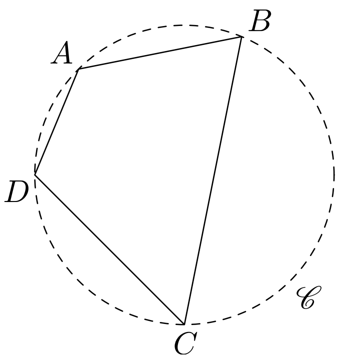
4. *Petit arc et grand arc*

E.8

On considère un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$.

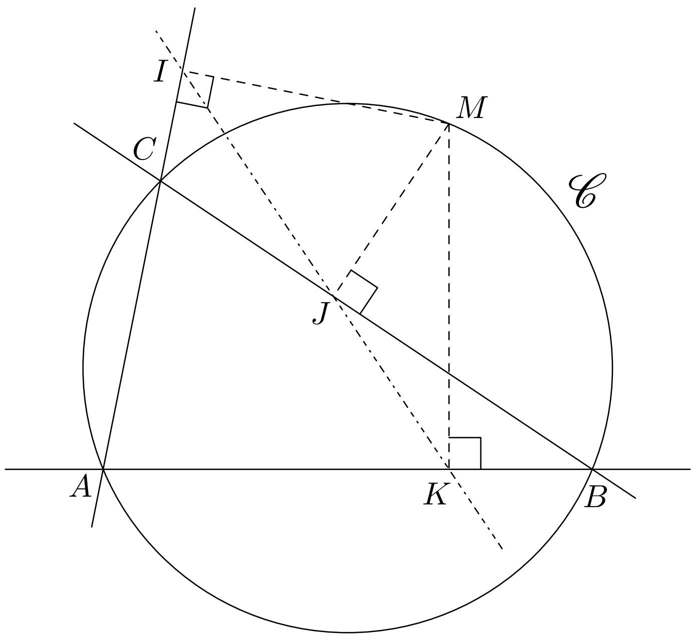
Démontrer que les angles opposés, dans le quadrilatère $ABCD$, sont des angles de mesures supplémentaires.

Indication : on utilisera les huits angles formés par l'intersection des deux diagonales du quadrilatère.



E.9

Dans le plan, on considère le triangle ABC quelconque et son cercle $\mathscr{C}$ circonscrit ; le point M est un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$; on note I, J, K les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les droites (AC), (BC), (AB).



Le but de cet exercice est de montrer que les points I, J, K sont alignés.

1. a. Établir que les points I et J appartiennent au cercle de diamètre $[MC]$.

(b) Justifier que les angles $\widehat{IJM}$ et $\widehat{ICM}$ ont même mesure.

(c) En déduire la relation : $\widehat{ACM} = 180 - \widehat{IJM}$

(2) (a) Justifier que les points B, J, K, M sont cocycliques ; Préciser la nature du cercle auquel ils appartiennent.

(b) Établir l'égalité : $\widehat{ABM} = 180 - \widehat{MJK}$
Pour démontrer cette relation, on utilisera les diagonales du quadrilatères $JMBK$

(3) Les points A, B, C, M sont cocycliques *(comme à la question (2)(b))* ; on admet la relation suivante :
$\widehat{ABM} = 180 - \widehat{ACM}$

En déduire que les points I, J, K sont alignés

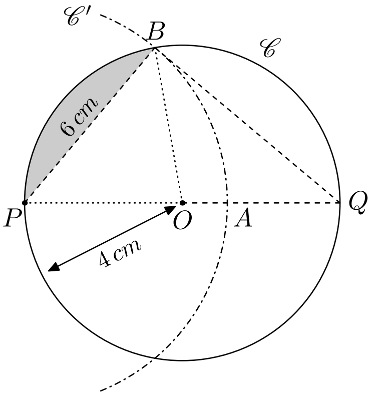
La droite passant par ces trois points s'appelle la droite de Simson.

5. *Exercices non-classés*

E.10

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O et pour rayon $4\,cm$. On note $[PQ]$ un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

On construit le cercle $\mathscr{C}'$ de centre P et de rayon $6\,cm$. On note A le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}'$ et du segment $[PQ]$ et B l'un des points d'intersection des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie grisée.

On travaillera avec des mesures arrondies :

(1) (a) Déterminer l'aire du triangle BPQ.

(b) En déduire l'aire du triangle POB.

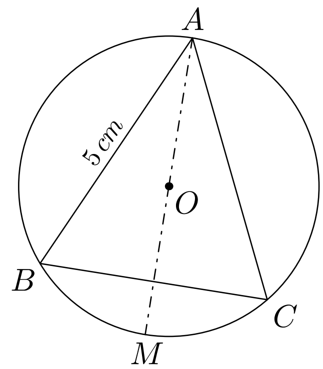
(2) (a) Déterminer la mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{PQB}$.

(b) En déduire l'aire, arrondie au dixième de cm^2, du secteur angulaire du cercle $\mathscr{C}$ définie par l'arc $\overset{\frown}{PB}$.

(3) En déduire une mesure, arrondie au dixième de cm^2, de la partie grisée.

E.11

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 50^o et AB est égal à $5\,cm$.
On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (OA) coupe ce cercle, noté $(\mathscr{C})$, en un autre point M.



(1) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAM}$?
Aucune justification n'est demandée.

(2) Quelle est la nature du triangle BAM ?
Justifier.

(3) Calculer la longueur AM et en donner un arrondi au dixième près.

(4) la droite (BO) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un autre point K.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BKC}$?
Justifier.

