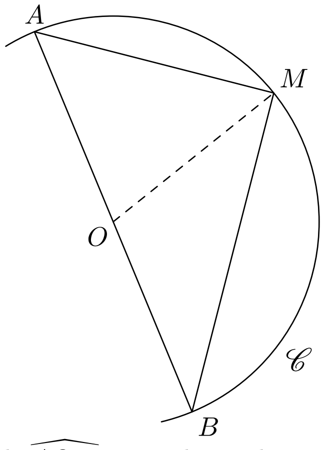
Hors programme collège / Angles inscrits et au centre

1. Angles et trigonométrie

E.1

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire.

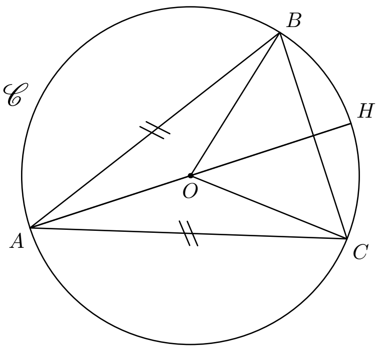


$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 6\,cm$. M est un point du cercle tel que $BM = 4{,}8\,cm$.

1. Démontrer que le triangle ABM est rectangle en M.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABM}$, arrondie au degré.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$, arrondie au degré.

E.2

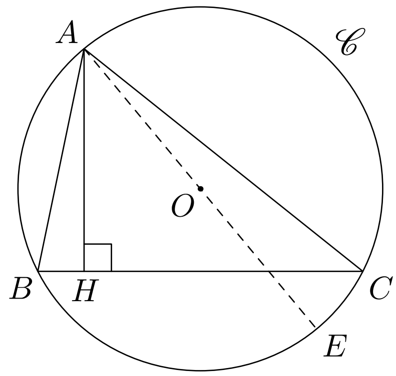
La figure ci-contre n'est pas tracée aux dimensions réelles.
Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre le point O et son rayon est de $5\,cm$.
Le triangle ABC est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et tel que $\widehat{BOC} = 80^o$.
On note H le point d'intersection de la droite (AO) avec le cercle $\mathscr{C}$.



1. Montrer que la droite (AO) est la médiatrice du segment $[BC]$.
2. Calculer la valeur de l'angle $\widehat{OAB}$. Justifier.
3. Quelle est la nature du triangle ABH ? Justifier.
4. Calculer la longueur de $[BH]$.

E.3

La figure ci-dessous n'est pas à refaire sur la copie. Elle n'est pas donnée en vraie grandeur.



A, B et C sont trois points d'un cercle $\mathscr{C}$ *(voir figure)*.
On sait que $AB = 3\,cm$, la hauteur $[AH]$ mesure $2{,}5\,cm$.
On trace le diamètre $[AE]$.

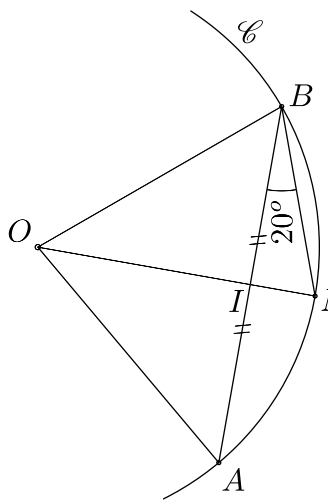
1. Quelle est la nature du triangle ACE ? Justifier la réponse.
2. Expliquer pourquoi les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ sont égaux.
3. En utilisant le triangle ABH, calculer la valeur exacte de $\sin \widehat{ABH}$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{AEC}$ arrondie au degré près.

2. Angles et triangles isocèles

E.4

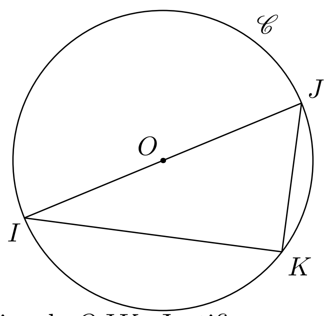
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. A, B, M trois points du cercle tel que $\widehat{ABM} = 20^o$. Notons I le milieu du segment $[AB]$.

Calculer la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$. Justifier.



E.5

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur ; on ne demande pas de la reproduire.
On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $8\,cm$.
I et J sont deux points diamétralement opposés. K est un point de $\mathscr{C}$ tel que $JK = 4\,cm$.

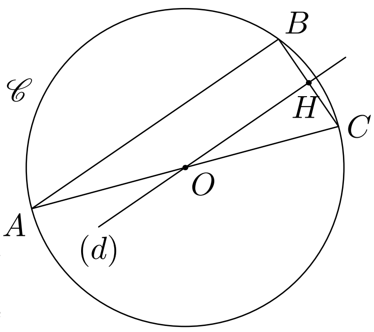


1. a. Préciser la nature du triangle OJK. Justifier.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{JIK}$. Justifier votre réponse.
2. a. Préciser la nature du triangle IJK. Justifier.
   b. Donner la mesure, au millimètre près, du segment $[IK]$.
3. On appelle R le symétrique de K par rapport à la droite (IJ). Démontrer que le quadrilatère $ROKJ$ est un losange.

3. *Angles et thalès*

E.6

La figure ci-contre n'est pas réalisée aux dimensions réelles.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O de rayon $6\,cm$.
Les points A et C sont diamétralement opposés.
B est un point du cercle tel que $BC = 3\,cm$.
Le segment $[BC]$ mesure $3\,cm$ de longueur.

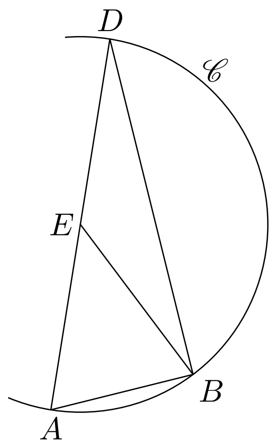


La droite (d) est perpendiculaire à (BC) passant par le point O. Elle coupe le segment $[BC]$ en H.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$. Justifier
   b. Quelle est la nature du triangle OBC ? Justifier
   c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BOH}$
   d. Justifier le fait que : $BH = 1{,}5\,cm$.
4. Calculer la valeur de OH au millimètre près.

E.7

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, nous savons que :
- $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre E dont le diamètre $[AD]$ mesure $9\,cm$.
- B est un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que :
  $\widehat{AEB} = 46^o$



1. Faire la figure en respectant les dimensions données.
2. Montrer que le triangle ABD est un triangle rectangle.
3. Justifier que : $\widehat{ADB} = 23^o$.
4. Calculer la longueur AB et préciser sa valeur arrondie au centième de cm.
5. On trace la droite parallèle à la droite (AB) passant par E. Elle coupe le segment $[BD]$ au point F. Placer le point F.
6. Calculer la longueur EF et préciser sa valeur arrondie au dixième de cm.

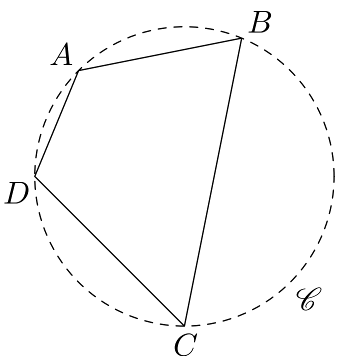
4. *Petit arc et grand arc*

E.8

On considère un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$.

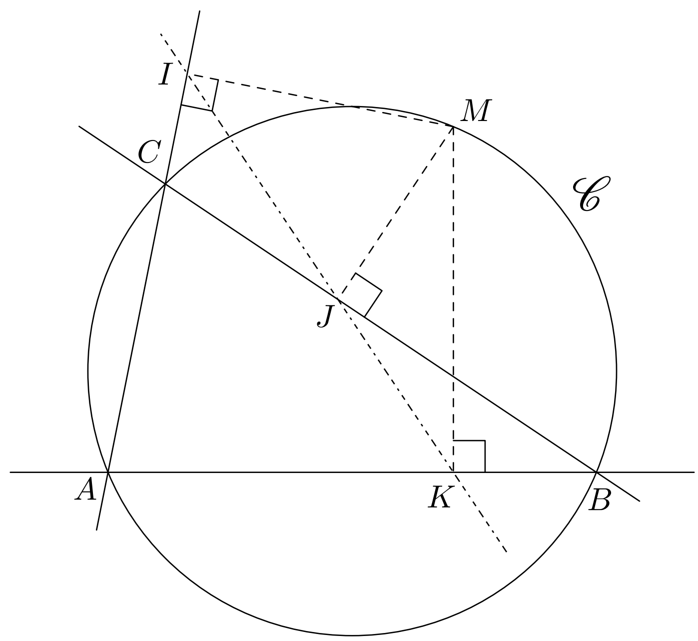
Démontrer que les angles opposés, dans le quadrilatère $ABCD$, sont des angles de mesures supplémentaires.

Indication : on utilisera les huit angles formés par l'intersection des deux diagonales du quadrilatère.



E.9

Dans le plan, on considère le triangle ABC quelconque et son cercle $\mathscr{C}$ circonscrit ; le point M est un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$; on note I, J, K les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les droites (AC), (BC), (AB).



Le but de cet exercice est de montrer que les points I, J, K sont alignés.

1. a. Établir que les points I et J appartiennent au cercle de diamètre $[MC]$.

(b) Justifier que les angles $\widehat{IJM}$ et $\widehat{ICM}$ ont même mesure.

(c) En déduire la relation : $\widehat{ACM} = 180 - \widehat{IJM}$

(2) (a) Justifier que les points B, J, K, M sont cocycliques ; Préciser la nature du cercle auquel ils appartiennent.

(b) Établir l'égalité : $\widehat{ABM} = 180 - \widehat{MJK}$
Pour démontrer cette relation, on utilisera les diagonales du quadrilatère $JMBK$

(3) Les points A, B, C, M sont cocycliques *(comme à la question (2)(b))* ; on admet la relation suivante :
$\widehat{ABM} = 180 - \widehat{ACM}$

En déduire que les points I, J, K sont alignés

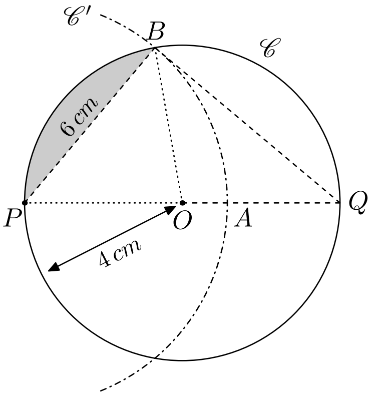
La droite passant par ces trois points s'appelle la droite de Simson.

5. *Exercices non-classés*

E.10

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O et pour rayon $4\,cm$. On note $[PQ]$ un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

On construit le cercle $\mathscr{C}'$ de centre P et de rayon $6\,cm$. On note A le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}'$ et du segment $[PQ]$ et B l'un des points d'intersection des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie grisée.

On travaillera avec des mesures arrondies :

(1) (a) Déterminer l'aire du triangle BPQ.

(b) En déduire l'aire du triangle POB.

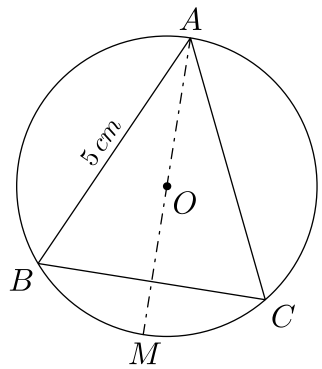
(2) (a) Déterminer la mesure, arrondie au dixième de degré, de l'angle $\widehat{PQB}$.

(b) En déduire l'aire, arrondie au dixième de cm^2, du secteur angulaire du cercle $\mathscr{C}$ définie par l'arc $\overset{\frown}{PB}$.

(3) En déduire une mesure, arrondie au dixième de cm^2, de la partie grisée.

E.11

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 50^o et AB est égal à $5\,cm$.
On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
La droite (OA) coupe ce cercle, noté $(\mathscr{C})$, en un autre point M.



(1) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAM}$?
Aucune justification n'est demandée.

(2) Quelle est la nature du triangle BAM?
Justifier.

(3) Calculer la longueur AM et en donner un arrondi au dixième près.

(4) la droite (BO) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un autre point K.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BKC}$?
Justifier.