Hors programme collège / Arithmétique

1. Premières notions du PGCD

E.1 Un menuisier fabrique des planches de bois toutes identiques entre elles dont l'épaisseur est un nombre entier de centimètres. À la fin de son travail, il possède deux tas de planches :

- Le premier tas a une hauteur totale de 30 cm ;
- le second tas a une hauteur totale de 42 cm.

- 1 a Donner la liste des huit diviseurs de 30 et la liste des huit diviseurs de 42.
- b Quelles sont les mesures possibles de l'épaisseur choisie par le menuisier?
- 2 Dans chaque cas, donner le nombre de planches dont dispose le menuisier.

E.2 Un fleuriste dispose de 126 iris et 210 roses. Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser des bouquets identiques, contenant chacun des iris et des roses. Justifier toutes les réponses aux questions ci-dessous :

- 1 Justifier qu'il peut réaliser 14 bouquets. Quelle est la composition d'un bouquet?
- 2 Sous ces contraintes, justifier qu'il ne peut réaliser 15

bouquets.

E.3

- 1 Donner les sept diviseurs de 64 et les huit 24.
- 2 Donner la forme irréductible de la fraction $\frac{24}{64}$.
- 3 Marc possède 64 bonbons rouges et 24 bonbons bleus. Il souhaite créer des paquets de bonbons où :
 - chaque paquet contient le même nombre de bonbons rouges et le même nombre de bonbons bleus ;
 - tous les bonbons doivent être utilisés.

On utilise les notations suivantes :

$$\begin{cases} k : \text{nombre de paquets confectionnés} \\ x : \text{nombre de bonbons rouges pour chaque paquet} \\ y : \text{nombre de bonbons bleus pour chaque paquet} \end{cases}$$

- a Trouver une relation entre les nombres $k, x, y, 64$ et 24.
- b En déduire le nombre maximal de paquets que Marc peut confectionner et le nombre de bonbons bleus et rouges contenus dans chacun d'eux.

2. PGCD et algorithme d'Euclide

E.4

- 1 Pour calculer le PGCD des entiers 6452 et 3241, compléter le tableau suivant à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

Dividende	Diviseur	Reste	
6452	3241	...	$6452 = \dots \times 3241 + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$

- 2 Que peut-on dire des entiers 6452 et 3241?

E.5

- 1 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer le PGCD des entiers 645 et 596 :

Dividende	Diviseur	Reste	
645	596	...	$645 = \dots \times 596 + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$

- 2 Que peut-on dire des entiers 645 et 596?

E.6 On considère la fraction $E = \frac{108}{288}$.

- 1 Pourquoi la fraction E n'est-elle pas irréductible? (Justifier en ne faisant aucun calcul)
- 2 Calculer le PGCD de 108 et 288.
- 3 Écrire la fraction E sous forme irréductible.

E.7

- Les entiers 1018 et 324 sont-ils premiers entre eux? Justifier votre réponse.
- Calculer le plus grand commun diviseur de 1018 et 324.
- Simplifier la fraction $\frac{324}{1018}$ pour la rendre irréductible.

E.8

- Calculer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 496 et de 806.
- Écrire $\frac{496}{806}$ sous la forme d'une fraction irréductible.
- Calculer : $\frac{496}{806} - \frac{3}{26}$

3. Nombres premiers entre eux**E.12**

- Calculer le PGCD des entiers 1183 et 455 en précisant la méthode utilisée.
- Écrire sous la forme irréductible la fraction $\frac{1183}{455}$
(On indiquera le détail des calculs)

4. Calcul de PGCD et de modélisation

E.14 Un fleuriste possède 240 tulipes et 36 orchidées.

Il veut utiliser toutes les fleurs en sa possession pour confectionner le plus grand nombre de bouquets possibles, chacun des bouquets contenant le même nombre de tulipes et le même nombre d'orchidées.

- On note :
 - k : le nombre de bouquets confectionnés.
 - x : le nombre de tulipes composant chaque bouquet.
 - y : le nombre d'orchidées composant chaque bouquet.
 Écrire les entiers 240 et 36 à l'aide de k , x et y .
- Que représente l'entier k pour les deux entiers 240 et 36. Préciser.
- Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers suivants 240 et 36 :

Dividende	Diviseur	Reste	
240	36	...	$240 = \dots \times 36 + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$
...	...	...	$\dots = \dots \times \dots + \dots$

- Préciser le nombre de bouquets que le fleuriste pourra confectionner et le nombre d'orchidées et de tulipes entrant dans la composition de chacun d'eux.

(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

E.9 Utiliser la méthode de votre choix pour rendre les fractions suivantes irréductibles :

a $\frac{24}{68}$ c $\frac{416}{224}$ b $\frac{16\,302}{8398}$

E.10 Simplifier par 3 la fraction $\frac{1404}{3465}$. La fraction obtenue est-elle irréductible?

E.11 Utiliser la méthode de votre choix pour rendre les fractions suivantes irréductibles.

a $\frac{35}{45}$ b $\frac{168}{312}$ c $\frac{6546}{2584}$

E.13

- Est-ce que les entiers 2464 et 924 sont premiers entre eux? Justifier.
- Calculer le PGCD de 2464 et de 924.
- Donner la somme $\frac{2464}{924} + \frac{5}{6}$ sous la forme d'une fraction irréductible

E.15

Un commerçant possède 248 bonbons à la fraise et 32 bonbons à la menthe. Il souhaite confectionner le maximum de paquets de bonbons à la fraise et des paquets de bonbons à la menthe. Il souhaite utiliser tous les bonbons qu'il dispose et chaque paquet doit contenir le même nombre de bonbons.

Pour résoudre cet exercice, compléter l'exercice suivant :

Utilisons les notations suivantes :

- k : le nombre de bonbons dans chaque paquet
- x : le nombre de paquets à la fraise
- y : le nombre de paquets à la menthe

On a les relations suivantes en fonctions de k , x et y :

$$248 = \dots \times \dots ; \quad 32 = \dots \times \dots$$

L'entier $\dots$ est donc un diviseur des entiers 248 et 32 : sachant qu'il souhaite confectionner le maximum de paquets, ce nombre est $\dots$ de 248 et 32.

D'après l'algorithme d'Euclide, on a :

Dividende	Diviseur	Reste
248	32	...
...	...	...
...	...	...

$248 = \dots \times 32 + \dots$

$\dots = \dots \times \dots + \dots$

$\dots = \dots \times \dots + \dots$

On en déduit : $PGCD(248; 32) = \dots$

On a les deux calculs suivants :

$$\frac{248}{\dots} = \dots ; \quad \frac{32}{\dots} = \dots$$

Ainsi, le commerçant va donc confectionner $\dots$ paquets à la fraise et $\dots$ paquets à la menthe dont chacun contiendra $\dots$ bonbons.

E.16

- 1 Les entiers 198 et 144 sont-ils premiers entre eux? Justifier la réponse **sans faire de calcul**.
- 2 Calculer le $PGCD$ de 198 et 144 en détaillant la méthode.
- 3 Écrire la fraction $\frac{144}{198}$ sous forme irréductible. Expliquer la méthode.
- 4 Sur le marché, un producteur a 198 courgettes et 144 aubergines. Il réalise avec la totalité des légumes des barquettes toutes composées de manière identique. Il utilise un maximum de barquettes.
 - a Combien utilise-t-il de barquettes?
 - b Combien chaque barquette contient-elle de courgettes et d'aubergines?

E.17

- 1 Déterminer le $PGCD$ de 1394 et 255.
- 2 Un artisan dispose de 1394 graines d'çaï et de 255 graines de palmier pêche. Il veut réaliser des colliers identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de graines d'çaï et le même nombre de graines de palmier pêche.
 - a Combien peut-il réaliser au maximum de colliers en utilisant toutes ses graines?
 - b Dans ce cas, combien chaque collier contient-il de graines d'çaï et de graines de palmier pêche?

E.18

- 1 Calculer le $PGCD$ de 110 et 88.
- 2 a Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante :
"Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte."
 Quelle sera la longueur du côté d'un carré?
 b Combien obtiendra-t-il de carrés par plaque?

E.19

- 1 Déterminer le $PGCD$ des entiers 108 et 135.
- 2 Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut faire des paquets de sorte que :
 - tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires ;
 - tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges ;
 - toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.
 - a Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser?
 - b Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet?

E.20

- 1 a Calculer le $PGCD$ de 494 et 43.
 b Que pouvez-vous dire de ces deux entiers?
 c La fraction $\frac{494}{43}$ est-elle réductible?
- 2 a Calculer le $PGCD$ de 396 et 252.
 Un bijoutier possède 396 rubis et 252 diamants. Il souhaite composer le maximum de bagues telles que chacune ait le même nombre de rubis et le même nombre de diamants.
 b Combien de bagues peut-il confectionner?

E.21 Un vendeur possède un stock de 276 cartes postales et de 230 porte-clés.

Il veut confectionner des coffrets “*Souvenirs de Tahiti et ses Îles*” de sorte que :

- le nombre de cartes postales soit le même dans chaque coffret ;
 - le nombre de porte-clés soit le même dans chaque coffret ;
 - toutes les cartes postales et porte-clés soient utilisés.
- 1 Combien de coffrets, contenant chacun 10 porte-clés, pourra-t-il confectionner?

Combien de cartes postales contiendra alors chacun des coffrets?

- 2 a) Calculer le *PGCD* de 276 et 230 en détaillant la méthode utilisée.
- b) Quel nombre maximal de coffrets le vendeur peut-il confectionner?
Combien de porte-clés et de cartes postales contiendra alors chaque coffret?

E.22

- 1 Montrer que le *PGCD* des entiers 372 et 775 est égal à 31 ; écrire les calculs.
- 2 Un chef d’orchestre fait répéter 372 choristes hommes et 775 choristes femmes pour un concert. Il veut faire des groupes de répétition de sorte que :
- Le nombre de choristes femmes est le même dans chaque groupe ;
 - Le nombre de choristes hommes est le même dans chaque groupe ;
 - chaque choriste appartient à un groupe.
- a) Quel nombre maximal de groupes pourra-t-il faire?
- b) Combien y aura-t-il alors de choristes hommes et de choristes femmes dans chaque groupe?

E.23

- 1 Déterminer le *PGCD* des entiers 75 et 45.
- 2 Deux fleuristes possèdent le même stock : 45 iris et 75 roses. Chacun d’eux a son idée sur l’utilisation de ces fleurs :
- Le fleuriste *A* souhaite faire des bouquets d’iris et des bouquets de roses comportant chacun le même nombre de fleurs. Il souhaite de plus que ces bouquets est le maximum de fleurs possibles.
 - Le fleuriste *B* souhaite faire le maximum de bouquets tous identiques où chaque bouquet contient des iris et des roses.
- a) Déterminer le nombre de bouquets d’iris et le nombre de bouquets de roses réalisés par le fleuriste *A*.
- b) Déterminer le nombre de bouquets de fleurs (*et leur composition*) réalisés par le fleuriste *B*.

E.24 Pour la fête du village, le pâtissier a préparé des sachets contenant des gâteaux. Dans certains, il a mis des pains au chocolat et dans les autres des croissants. Il a mis le même nombre de gâteaux dans chaque sachet.

il y a en tout 910 pains au chocolat et 693 croissants.

- 1 Souhaitant mettre le plus de gâteaux possible dans chaque paquet, combien a-t-il mis de gâteaux dans chaque sachet?
- 2 Combien y a-t-il de sachets contenant des croissants?

E.25

- 1 Déterminer le *PGCD* de 120 et 144 par la méthode de votre choix. Faire apparaître les calculs intermédiaires.
- 2 Un vendeur possède un stock de 120 flacons de parfum au tiaré et de 144 savonnettes au monoï.

Il veut écouler tout ce stock en confectionnant le plus grand nombre de coffrets “*Souvenirs de Polynésie*” de sorte que :

- le nombre de flacons de parfum au tiaré soit le même dans chaque coffret ;
- le nombre de savonnettes au monoï soit le même dans chaque coffret ;
- tous les flacons et savonnettes soient utilisés.

Trouver le nombre de coffrets à préparer et la composition de chacun d’eux.

L’évaluation de cette question tiendra compte des observations et étapes de recherche, même incomplètes ; les faire apparaître sur la copie.

- 3 L’algorithme des soustractions successives permet de trouver le *PGCD* de deux entiers donnés.

Il utilise la propriété suivante :

“*a et b étant deux entiers positifs tels que a supérieur à b,*

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; a - b)”$$

Sur un tableur, Heiari a créé cette feuille de calcul pour trouver le *PGCD* de 2277 et 1449.

	A	B	C
1	a	b	a - b
2	2277	1449	828
3	1449	828	621
4	828	621	207
5	621	207	414
6	414	207	207
7	207	207	0

- a) En utilisant sa feuille de calcul, dire quel est le *PGCD* de 2277 et 1449.
- b) Quelle formule a-t-il écrite dans la cellule C2 pour obtenir le résultat indiqué dans cette cellule par le tableur?

E.26 Les deux questions posées dans cet exercice sont indépendantes.

6510 fourmis noires et 4650 fourmis rouges décident de s'allier pour combattre les termites.

- ① Pour cela, la reine des fourmis souhaite constituer, en utilisant toutes les fourmis, des équipes qui seront toutes composées de la même façon : un nombre de fourmis rouges et un autre nombre de fourmis noires. Quel est le nombre maximal d'équipes que la reine peut ainsi former?

5. Exercices non-classés

E.28

Voici une feuille de calcul obtenue à l'aide d'un tableur.

Dans cet exercice, on cherche à comprendre comment cette feuille a été remplie.

- ① En observant les valeurs du tableau, proposer une formule à entrer dans la cellule C1, puis à recopier vers le bas.

- ② **Dans cette question, on laissera sur la copie toutes les traces de recherche. Elles seront valorisées.**

	A	B	C
1	216	126	90
2	126	90	36
3	90	36	54
4	54	36	18
5	36	18	18
6	18	18	0

Le tableur fournit deux fonctions MAX et MIN. À partir de deux nombres, MAX renvoie la valeur la plus grande et MIN la plus petite. (exemple MAX(23 ; 12)=23).

Quelle formule a été entrée dans la cellule A2, puis recopiée vers le bas?

- ② Que représente le nombre figurant dans la cellule C5, par rapport aux nombres 216 et 126?
- ③ La fraction $\frac{216}{126}$ est-elle irréductible? Si ce n'est pas le cas, la rendre irréductible en détaillant les calculs.

E.29 Dans une maison nouvellement construite, on veut carrelé les sols de certaines pièces.

- ① Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m.

- ② Si toutes les fourmis, rouges et noires, se placent en file indienne, elles forment une colonne de 42,78 m de long. Sachant qu'une fourmi rouge mesure 2 mm de plus qu'une fourmi noire, déterminer la taille d'une fourmi rouge et celle d'une fourmi noire.

E.27 Pour le 1^{er} mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.

Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.

Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire?

Quelle sera la composition de chaque bouquet?

On veut carrelé cette pièce avec des dalles carrées, sans effectuer aucune découpe; de plus, les dimensions de ces pavés doivent être un nombre entier de centimètres.

- a) Donner la plus grande taille de pavés carrés utilisables dans ces pièces.
- b) Donner toutes les tailles possibles.
- ② On dispose de dalles rectangulaires de 24 cm de longueur et de 15 cm de largeur.

Quelle est la dimension de la plus petite pièce carrée qui puisse être pavé sans aucune découpe supplémentaire des dalles?

E.30 Pour son anniversaire, Paul a confectionné une pizza de 60 cm de longueur sur 24 cm de largeur. Il souhaite découper sa pizza de la manière suivante :

- Chaque part doit être carrée et de même dimension.
- Les dimensions d'une part doivent être exprimées à l'aide d'un nombre entier de centimètres.

Aidons-le à choisir la dimension de chaque part.

- ① Trouver les huit diviseurs de l'entier 24.
- ② Trouver les douze diviseurs de l'entier 60.
- ③ Quels sont les diviseurs communs aux entiers 24 et 60?
- ④ Donner les dimensions possibles de chaque part de la pizza de Paul.