Hors programme collège / Arithmétique

1. Premières notions du PGCD

E.1 Un menuisier fabrique des planches de bois toutes identiques entre elles dont l'épaisseur est un nombre entier de centimètres. À la fin de son travail, il possède deux tas de planches :

- Le premier tas a une hauteur totale de $30\,cm$;
- le second tas a une hauteur totale de $42\,cm$.

1. a) Donner la liste des huit diviseurs de 30 et la liste des huit diviseurs de 42.
   b) Quelles sont les mesures possibles de l'épaisseur choisie par le menuisier?
2. Dans chaque cas, donner le nombre de planches dont dispose le menuisier.

E.2

1. Donner les sept diviseurs de 64 et les huit 24.
2. Donner la forme irréductible de la fraction $\dfrac{24}{64}$.
3. Marc possède 64 bonbons rouges et 24 bonbons bleus. Il souhaite créer des paquets de bonbons où :
   - chaque paquet contient le même nombre de bonbons rouges et le même nombre de bonbons bleus ;
   - tous les bonbons doivent être utilisés.

   On utilise les notations suivantes :
   $$\begin{cases} k : \text{ nombre de paquets confectionnés} \\ x : \text{ nombre de bonbons rouges pour chaque paquet} \\ y : \text{ nombre de bonbons bleus pour chaque paquet} \end{cases}$$
   a) Trouver une relation entre les nombres k, x, y, 64 et 24.
   b) En déduire le nombre maximal de paquets que Marc peut confectionner et le nombre de bonbons bleus et rouges contenus dans chacun d'eux.

2. PGCD et algorithme d'Euclide

E.3

1. Pour calculer le PGCD des entiers 6452 et 3241, compléter le tableau suivant à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

Dividende	Diviseur	Reste	
6452	3241	...	$6452 = \ldots \times 3241 + \ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

2. Que peut-on dire des entiers 6452 et 3241?

E.4

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer le $PGCD$ des entiers 645 et 596 :

Dividende	Diviseur	Reste	
645	596	...	$645 = \ldots \times 596 + \ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

2. Que peut-on dire des entiers 645 et 596?

E.5

1. Les entiers 1018 et 324 sont-ils premiers entre eux? Justifier votre réponse.
2. Calculer le plus grand commun diviseur de 1018 et 324.
3. Simplifier la fraction $\dfrac{324}{1018}$ pour la rendre irréductible.

E.6 Utiliser la méthode de votre choix pour rendre les fractions suivantes irréductibles :

a) $\dfrac{24}{68}$ c) $\dfrac{416}{224}$ b) $\dfrac{16302}{8398}$

E.7 Simplifier par 3 la fraction $\dfrac{1404}{3465}$. La fraction obtenue est-elle irréductible?

E.8 Utiliser la méthode de votre choix pour rendre les fractions suivantes irréductibles.

a) $\dfrac{35}{45}$ b) $\dfrac{168}{312}$ c) $\dfrac{6546}{2584}$

CC BY-NC

3. *Nombres premiers entre eux*

E.9

1. Calculer le PGCD des entiers 1183 et 455 en précisant la méthode utilisée.
2. Écrire sous la forme irréductible la fraction $\dfrac{1183}{455}$

(On indiquera le détail des calculs)

E.10

1. Est-ce que les entiers 2464 et 924 sont premiers entre eux? Justifier.
2. Calculer le $PGCD$ de 2464 et de 924.
3. Donner la somme $\dfrac{2464}{924}+\dfrac{5}{6}$ sous la forme d'une fraction irréductible

4. *Calcul de PGCD et de modélisation*

E.11 Un fleuriste possède 240 tulipes et 36 orchidées.

Il veut utiliser toutes les fleurs en sa possession pour confectionner le plus grand nombre de bouquets possibles, chacun des bouquets contenant le même nombre de tulipes et le même nombre d'orchidées.

1. On note :

$$\begin{cases} k \text{ : le nombre de bouquets confectionnés.} \\ x \text{ : le nombre de tulipes composant chaque bouquet.} \\ y \text{ : le nombre d'orchidées composant chaque bouquet.} \end{cases}$$

Écrire les entiers 240 et 36 à l'aide de k, x et y.

2. Que représente l'entier k pour les deux entiers 240 et 36. Préciser.
3. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers suivants 240 et 36 :

Dividende	Diviseur	Reste
240	36	...
...	...	...
...	...	...

$240 = \ldots \times 36 + \ldots$

$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

4. Préciser le nombre de bouquets que le fleuriste pourra confectionner et le nombre d'orchidées et de tulipes entrant dans la composition de chacun d'eux.

E.12

Un commerçant possède 248 bonbons à la fraise et 32 bonbons à la menthe.
Il souhaite confectionner le maximum de paquets de bonbons à la fraise et des paquets de bonbons à la menthe. Il souhaite utiliser tous les bonbons qu'il dispose et chaque paquet doit contenir le même nombre de bonbons.

Pour résoudre cet exercice, compléter l'exercice suivant :

Utilisons les notations suivantes :

$$\begin{cases} k\text{ : le nombre de bonbons dans chaque paquet} \\ x\text{ : le nombre de paquets à la fraise} \\ y\text{ : le nombre de paquets à la menthe} \end{cases}$$

On a les relations suivantes en fonctions de k, x et y :

$248 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \quad ; \quad 32 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

L'entier ..... est donc un diviseur des entiers 248 et 32 : sachant qu'il souhaite confectionner le maximum de paquets, ce nombre est ..... de 248 et 32.

D'après l'algorithme d'Euclide, on a :

Dividende	Diviseur	Reste
248	32	...
...	...	...
...	...	...

$248 = \ldots \times 32 + \ldots$

$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

On en déduit : $PGCD(248\,;32) = \ldots\ldots$

On a les deux calculs suivants :

$$\frac{248}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \quad ; \quad \frac{32}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

Ainsi, le commerçant va donc confectionner ..... paquets à la fraise et ..... paquets à la menthe dont chacun contiendra ..... bonbons.

 CC BY-NC

E.13

1. Les entiers 198 et 144 sont-ils premiers entre eux? Justifier la réponse **sans faire de calcul**.
2. Calculer le $PGCD$ de 198 et 144 en détaillant la méthode.
3. Écrire la fraction $\frac{144}{198}$ sous forme irréductible. Expliquer la méthode.
4. Sur le marché, un producteur a 198 courgettes et 144 aubergines.
   Il réalise avec la totalité des légumes des barquettes toutes composées de manière identique. Il utilise un maximum de barquettes.
   a. Combien utilise-t-il de barquettes?
   b. Combien chaque barquette contient-elle de courgettes et d'aubergines?

E.14

1. Déterminer le $PGCD$ de 1 394 et 255.
2. Un artisan dispose de 1 394 graines d'açaï et de 255 graines de palmier pêche.
   Il veut réaliser des colliers identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de graines d'açaï et le même nombre de graines de palmier pêche.
   a. Combien peut-il réaliser au maximum de colliers en utilisant toutes ses graines?
   b. Dans ce cas, combien chaque collier contient-il de graines d'açaï et de graines de palmier pêche?

E.15

1. Calculer le $PGCD$ de 110 et 88.
2. a. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante :
   "Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte."
   Quelle sera la longueur du côté d'un carré?
   b. Combien obtiendra-t-il de carrés par plaque?

E.16

1. Déterminer le $PGCD$ des entiers 75 et 45.
2. Deux fleuristes possèdent le même stock : 45 iris et 75 roses. Chacun d'eux a son idée sur l'utilisation de ces fleurs :
   - Le fleuriste A souhaite faire des bouquets d'iris et des bouquets de roses comportant chacun le même nombre de fleurs. Il souhaite de plus que ces bouquets est le maximum de fleurs possibles.
   - Le fleuriste B souhaite faire le maximum de bouquets tous identiques où chaque bouquet contient des iris et des roses.

   a. Déterminer le nombre de bouquets d'iris et le nombre de bouquets de roses réalisés par le fleuriste A.
   b. Déterminer le nombre de bouquets de fleurs *(et leur composition)* réalisés par le fleuriste B.

E.17 Pour la fête du village, le pâtissier a préparé des sachets contenant des gâteaux. Dans certains, il a mis des pains au chocolat et dans les autres des croissants. Il a mis le même nombre de gâteaux dans chaque sachet.
il y a en tout 910 pains au chocolat et 693 croissants.

1. Souhaitant mettre le plus de gâteaux possible dans chaque paquet, combien a-t-il mis de gâteaux dans chaque sachet?
2. Combien y a-t-il de sachets contenants des croissants?

E.18

1. Déterminer le PGCD de 120 et 144 par la méthode de votre choix. Faire apparaître les calculs intermédiaires.
2. Un vendeur possède un stock de 120 flacons de parfum au tiaré et de 144 savonnettes au monoï.

   Il veut écouler tout ce stock en confectionnant le plus grand nombre de coffrets "*Souvenirs de Polynésie*" de sorte que :
   - le nombre de flacons de parfum au tiaré soit le même dans chaque coffret ;
   - le nombre de savonnettes au monoï soit le même dans chaque coffret ;
   - tous les flacons et savonnettes soient utilisés.

   Trouver le nombre de coffrets à préparer et la composition de chacun d'eux.

   L'évaluation de cette question tiendra compte des observations et étapes de recherche, même incomplètes ; les faire apparaître sur la copie.
3. L'algorithme des soustractions successives permet de trouver le PGCD de deux entiers donnés.

   Il utilise la propriété suivante :
   "*a et b étant deux entiers positifs tels que a supérieur à b,*
   $PGCD(a\,;\,b) = PGCD(b\,;\,a-b)$"

   Sur un tableur, Heiarri a créé cette feuille de calcul pour trouver le $PGCD$ de 2 277 et 1 449.

	A	B	C
1	a	b	$a-b$
2	2277	1449	828
3	1449	828	621
4	828	621	207
5	621	207	414
6	414	207	207
7	207	207	0

   a. En utilisant sa feuille de calcul, dire quel est le $PGCD$ de 2 277 et 1 449.
   b. Quelle formule a-t-il écrite dans la cellule `C2` pour obtenir le résultat indiqué dans cette cellule par le tableur?

E.19 Pour le 1er mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.
Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs.
Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire?
Quelle sera la composition de chaque bouquet?

 CC BY-NC

5. *Exercices non-classés*

E.20

Voici une feuille de calcul obtenue à l'aide d'un tableur.
Dans cet exercice, on cherche à comprendre comment cette feuille a été remplie.

	A	B	C
1	216	126	90
2	126	90	36
3	90	36	54
4	54	36	18
5	36	18	18
6	18	18	0

1. En observant les valeurs du tableau, proposer une formule à entrer dans la cellule `C1`, puis à recopier vers le bas.
2. **Dans cette question, on laissera sur la copie toutes les traces de recherche. Elles seront valorisées.**

   Le tableur fournit deux fonctions `MAX` et `MIN`. À partir de deux nombres, `MAX` renvoie la valeur la plus grande et `MIN` la plus petite. *(exemple* `MAX(23;12)=23`*)*.

   Quelle formule a été entrée dans la cellule `A2`, puis recopiée vers le bas?

2. Que représente le nombre figurant dans la cellule `C5`, par rapport aux nombres 216 et 126?
3. La fraction $\frac{216}{126}$ est-elle irréductible? Si ce n'est pas le cas, la rendre irréductible en détaillant les calculs.

E.21 Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4{,}55\,m$ et de largeur $3{,}85\,m$.

   On veut carreler cette pièce avec des dalles carrées, sans effectuer aucune découpe ; de plus, les dimensions de ces pavés doivent être un nombre entier de centimètres.

   a. Donner la plus grande taille de pavés carrés utilisables dans ces pièces.

   b. Donner toutes les tailles possibles.

2. On dispose de dalles rectangulaires de $24\,cm$ de longueur et de $15\,cm$ de largeur.

   Quelle est la dimension de la plus petite pièce carrée qui puisse être pavé sans aucune découpe supplémentaire des dalles?

 BY-NC