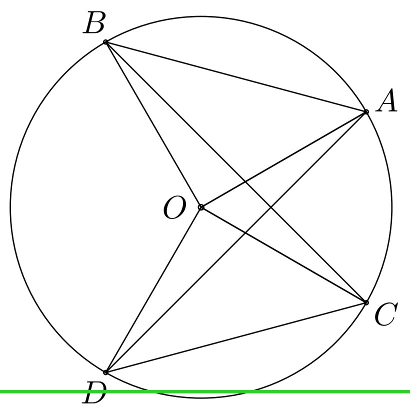
Hors programme collège / Cercle circonscrit et triangle rectangle

ChingEval : 1 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Vocabulaire et introduction*

E.1

Compléter le tableau ci-dessous en indiquant quels sont les angles inscrits et en précisant alors l'arc de cercle intercepté.



Angle	$\widehat{ABC}$	$\widehat{BOD}$	$\widehat{AOD}$	$\widehat{DCB}$
Inscrit ou au centre				
Arc intercepté				

2. *Théorème du triangle rectangle et du cercle circonscrit*

E.2 ⚠ On considère le triangle ABC dont les mesures ont pour valeur :

$AB = 5{,}2\,cm$; $BC = 4{,}8\,cm$; $AC = 2\,cm$

1. a) Tracer le triangle ABC.
   b) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

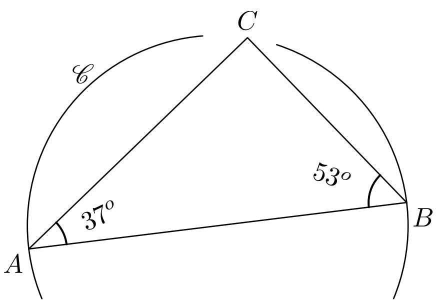
On note M le milieu de $[BC]$, N le milieu de $[AC]$, P le milieu de $[AB]$.

2. a) Démontrer que (MP) est parallèle à (AC).
   b) En déduire que (MP) est la médiatrice de $[BC]$.
3. Démontrer que (NP) est la médiatrice de $[AC]$.
4. Que peut-on dire du point P?

(Enoncer de nouvelles propriétés)

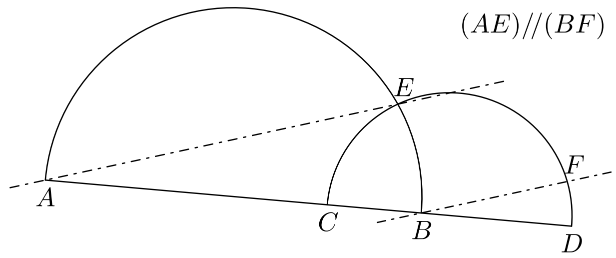
E.3 On considère le cercle $\mathscr{C}$ ayant pour diamètre le segment $[AB]$.

Avec les indications portées sur la figure, montrer que le point C appartient au cercle $\mathscr{C}$.



E.4 La figure ci-dessous présente deux demi-cercle de diamètre respectif $[AB]$ et $[CD]$ où les points A, B, C, D sont alignés. On note E le point d'intersection de ces deux demi-cercles.

Le point F appartient à une de ces demi-cercles tel que les droites (AE) et (BF) soient parallèles.

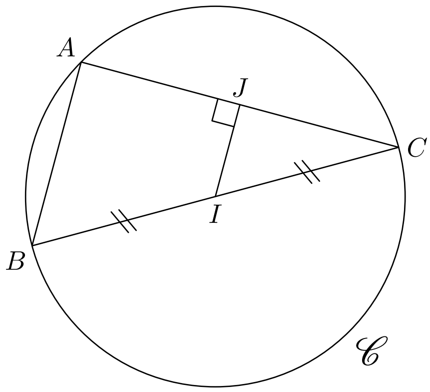


Sans justification, citer tous les triangles rectangles constructibles avec les points nommés sur cette figure.

3. Réciproque du triangle rectangle et du cercle circonscrit

E.5 On considère le triangle ABC inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre I où $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

La droite perpendiculaire à la droite (AC) passant par le point I intercepte le segment $[AC]$ en J.

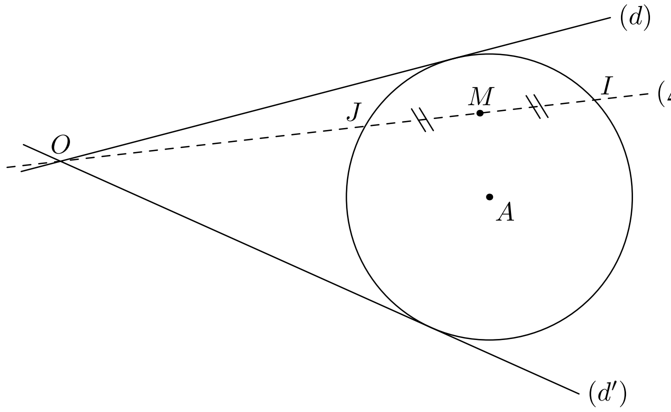


1. Montrer que les droites (AB) et (IJ) sont parallèles.
2. En déduire que J est le milieu du segment $[AC]$.

E.6 On considère une demi-droite $[Ax)$ et un point C appartenant à cette demi-droite.

En utilisant uniquement la règle non-graduée et le compas, placer un point B dans le plan de sorte que le triangle ABC soit un triangle rectangle en B.

E.7 On considère dans le plan le cercle $\mathscr{C}$ de centre A ; les deux droites (d) et (d') sécantes au point O sont également tangentes au cercle $\mathscr{C}$; une droite (Δ) intercepte le cercle $\mathscr{C}$ au point I et J ; M est le milieu du segment $[IJ]$:



1. Justifier que le triangle JMA est rectangle en M.
2. En déduire que le point M appartient au cercle de diamètre $[OA]$.

E.8 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et un segment $[AB]$ formant un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

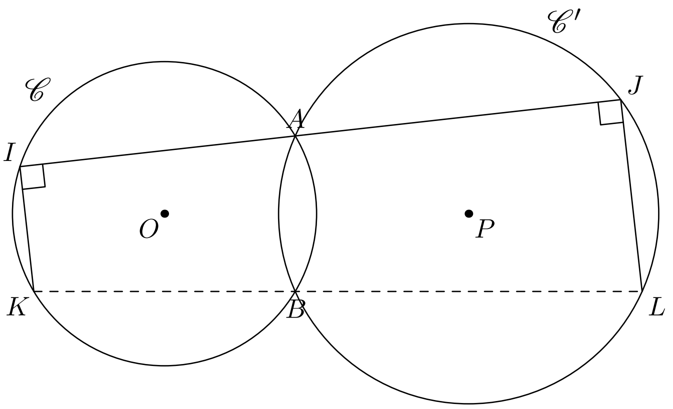
On considère un point C du cercle $\mathscr{C}$ vérifiant : $\widehat{AOC} = 40^o$

1. Effectuer une représentation de cette configuration.
2. a. Justifier que le triangle OAC est un triangle isocèle.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACO}$
3. a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{OCB}$.
4. Déterminer la nature du triangle ABC.

4. Théorème et réciproque du triangle rectangle et du cercle circonscrit

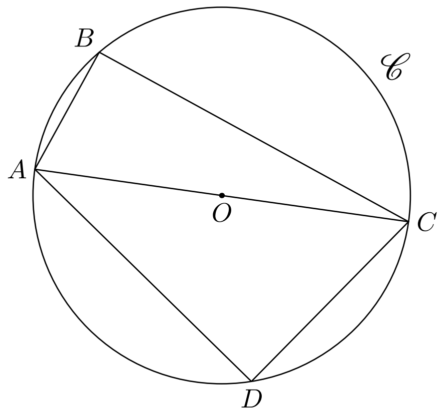
E.9 On considère dans le plan les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif O et P tels que :

- ces deux cercles s'interceptent aux points A et B ;
- les points I et J sont des points respectifs des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ tels que les points I, A, J sont alignés ;
- les points K et L sont des points respectifs des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ tels que $\widehat{KIA}$ et $\widehat{AJL}$ sont des angles droits.



1. Démontrer que le triangle AKB est un triangle rectangle en B.
2. Démontrer que les points K, B, L sont alignés.

E.10 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et quatre points A, B, C et D appartenant au cercle $\mathscr{C}$ tels que le segment $[AC]$ soit un diamètre de ce cercle.

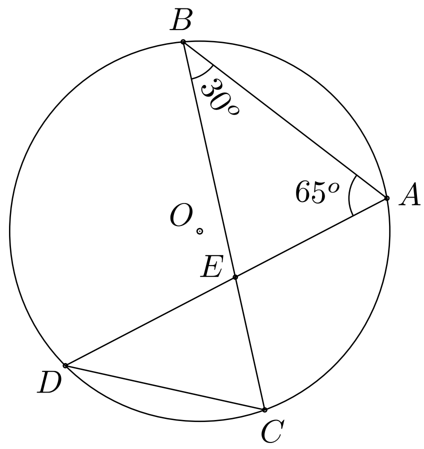


1. Montrer que le triangle ADC est un triangle rectangle en D.
2. a. Quelle propriété doit posséder le segment $[BD]$ afin que le triangle ABD soit un triangle rectangle en A?
   b. Si le triangle ABD est rectangle en A, quelle sera la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier votre réponse.

5. Applications directes

E.11

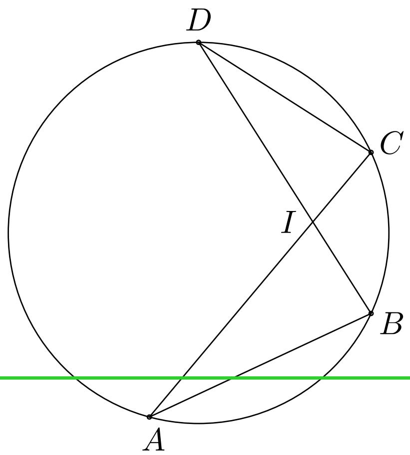
Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle EDC. Justifier votre démarche.



E.12

Dans la figure ci-contre, les points A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

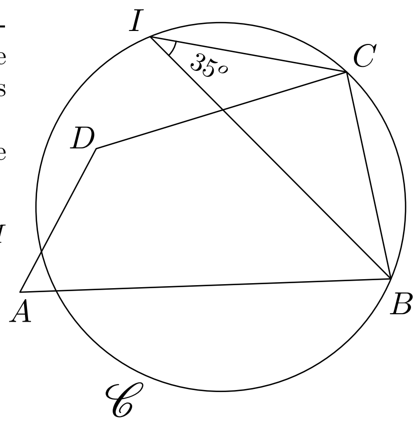
Montrer que les triangles DCM et ABM ont les mesures de leurs angles égaux deux à deux.



E.13

On considère le quadrilatère $ABCD$ et le cercle $\mathscr{C}$ passant par les points B et C.
Soit I un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que : $\widehat{CIB} = 35^o$

Déterminer un point M de $[DA]$ tel que : $\widehat{CMB} = 35^o$.

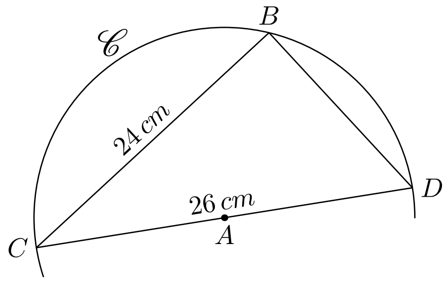


E.14 ⚠ On considère la figure ci-contre où les points A, B, C, D appartiennent au cercle de centre O et vérifient :
$\widehat{AOB} = 64^o$; $\widehat{BDC} = 20^o$

En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Justifier votre raisonnement.

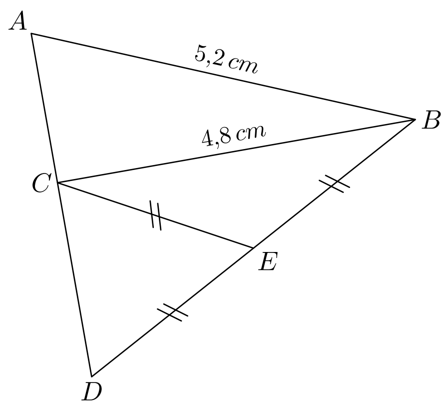
6. Cercle circonscrit et théorème de Pythagore

E.15 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et trois points B, C et D du cercle $\mathscr{C}$ tels que le segment $[DC]$ soit un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.



Déterminer la longueur du segment $[BD]$.

E.16 Dans le plan, on considère un triangle ABD où les points C et E appartiennent respectivement aux segments $[AD]$ et $[BD]$.

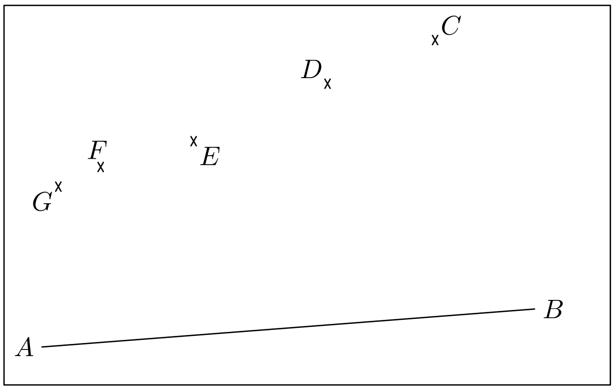


Certaines indications de longueurs sont portées sur la longueur.

1. Montrer que le triangle BCD est rectangle en C.
2. En déduire la longueur du segment $[AC]$.

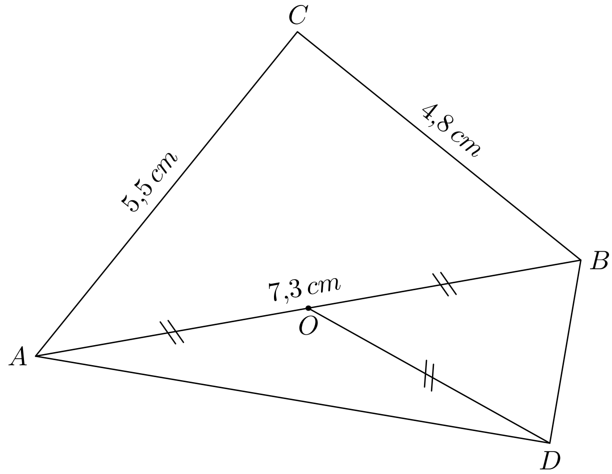
7. *Caractérisation des points du cercle par une relation angulaire.*

E.17 Considère ci-dessous la figure composée du segment $[AB]$ et de cinq autres points du plan :



À l'aide de l'équerre non-graduée, préciser les points susceptibles d'appartenir au cercle de rayon $[AB]$.

E.18 On considère la figure ci-dessous où O est le milieu du segment $[AB]$:



Prouver l'existence d'un cercle, dont on précisera le centre, passant par les quatre points A, B, C et D.

On dira alors que les points A, B, C et D sont cocycliques

8. *Trigonométrie, triangle rectangle et cercle circonscrit*

E.19

1. Tracer sur la copie un segment $[EF]$ de longueur $7\,cm$ et de milieu O.
   Tracer le cercle de diamètre $[EF]$ puis placer un point G sur le cercle tel que : $\widehat{FEG}=26^o$.
2. Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle en G.
3. Calculer une valeur approchée de la longueur FG, arrondie au millimètre.
4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{GOF}$ *(justifier votre réponse)*

E.20 *L'unité de longueur est le centimètre.*

$\mathscr{C}$ est un cercle de 2,6 cm de rayon.
Le segment $[MN]$ est un diamètre de ce cercle.
P est un point du cercle tel que $MP=2$.

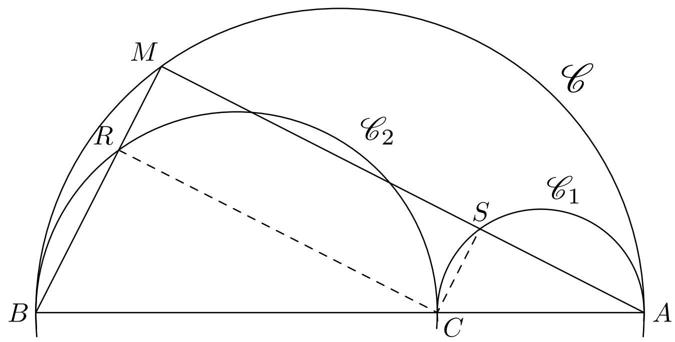
1. Construire la figure
2. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en P.
3. Calculer la longueur PN.
4. (a) Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{NMP}$. Arrondir le résultat au millième.
   (b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{NMP}$

E.21 On considère un cercle de $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$; soit C un point appartenant au segment $[AB]$. On considère les deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de diamètre respectif $[AC]$ et $[BC]$.

Le point M est un point du cercle $\mathscr{C}$; on note :

- Le point R est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}_2$ avec le segment $[MB]$;
- le point S est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}_1$ et du segment $[AM]$.

On donne les mesures suivantes :
$BM = 3{,}64\,cm$; $AM = 7{,}13\,cm$; $BC = 5{,}28\,cm$



Les résultats seront donnés au degré près ou au millimètre près.

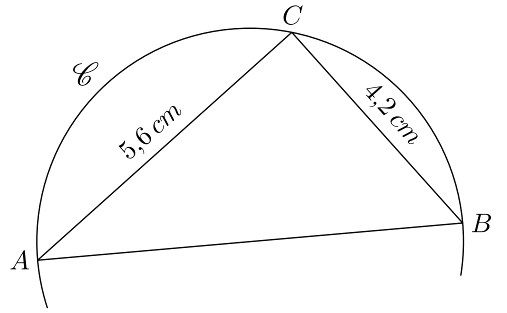
1. (a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{MBA}$.
   (b) Déterminer la mesure du segment $[AB]$.
2. (a) Justifier que le triangle BCR est rectangle en R.
   (b) Déterminer la mesure du segment $[BR]$.
3. (a) Justifier que les droites (BM) et (CS) sont parallèles.
   (b) Déterminer la mesure de SA.

E.22 *Toutes les questions sont indépendantes.*

Soit un triangle ABC tel que :
$AB = 7{,}5\,cm$; $AC = 4{,}5\,cm$; $BC = 6\,cm$

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
3. a. Placer le point E du segment $[AB]$ tel que : $BE = 5\,cm$.
   Le cercle de diamètre $[BE]$ coupe le côté $[BC]$ en F.
   b. Montrer que le triangle BFE est rectangle.
4. a. Montrer que les droites (FE) et (AC) sont parallèles.
   b. Calculer FB et FE.
5. a. Calculer $\sin\widehat{ABC}$.
   b. Donner une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

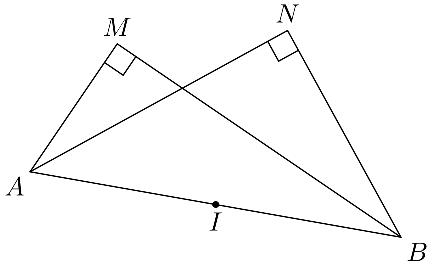
E.23 On considère le triangle ABC inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ dont le segment $[AB]$ forme un diamètre.



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

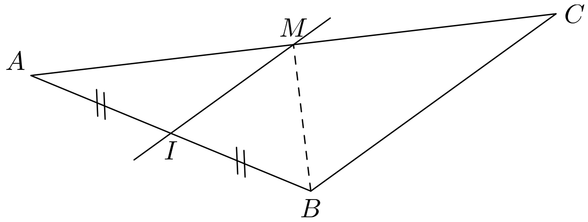
9. Théorème et réciproque du triangle rectangle et de la médiane

E.24 Dans le plan, on considère un segment $[AB]$ dont le point I est un milieu.
Les points M et N forment deux triangles rectangles dont leur hypoténuse est le segment $[AB]$.



Montrer que le triangle MNI est isocèle en I.

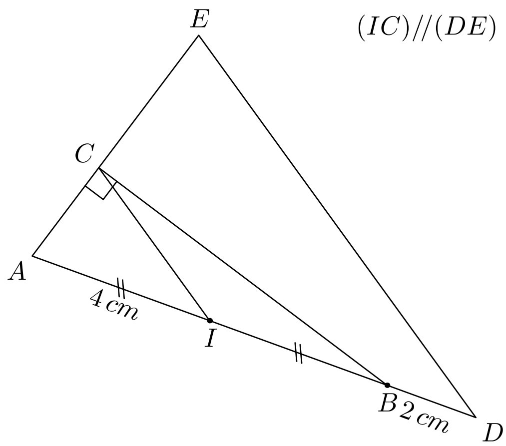
E.25 On considère un triangle ABC isocèle en B. On note I le milieu du segment $[AB]$.
La droite passant par le point I et parallèle à la droite (BC) intercepte le segment $[AC]$ au point M.



Montrer que le triangle AMB est rectangle en M.

E.26 On considère un triangle ABC rectangle en C où $AI = 4\,cm$ en notant I le milieu du segment $[AB]$.
Le point D est placé tel que les points A, I et D soient alignés et tel que $BD = 2\,cm$.
Le point E est un point de la droite (AC) tel que les droites (IC) et (DE) soient parallèles.

Voici une représentation de cette configuration :



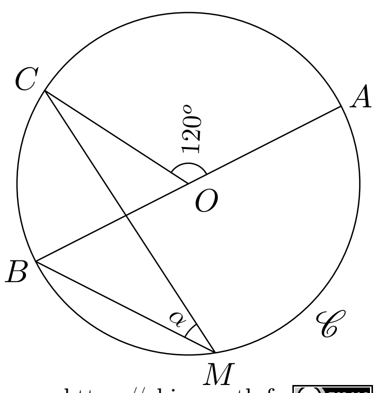
1. Déterminer la mesure du segment $[CI]$
2. En déduire la mesure du segment $[ED]$.

10. Un peu plus loin

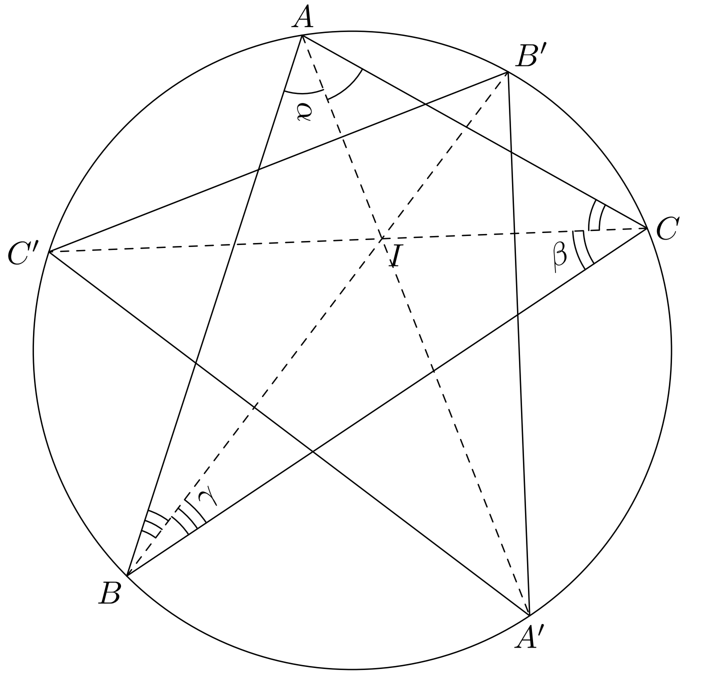
E.27

La figure ci-contre représente un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Les points A et B sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}$. Le point C appartient au cercle $\mathscr{C}$ tel que :
$\widehat{COA} = 120^o$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BMC}$.



E.28 On considère, dans le plan, un triangle ABC et son cercle $\mathscr{C}$ circonscrit ; les bissectrices des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont concourantes au point I et interceptent le cercle $\mathscr{C}$ respectivement aux points A', B', C' :



1. a. Justifier que l'angle $\widehat{IAB'}$ a pour mesure $\alpha+\gamma$
   b. Établir que le triangle IAB' est isocèle en B'.
2. a. Établir que le triangle AIC' est isocèle en C'.
   b. Que représente la droite $(B'C')$ pour le segment $[AI]$? Justifier votre réponse.
3. En déduire que I est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$.

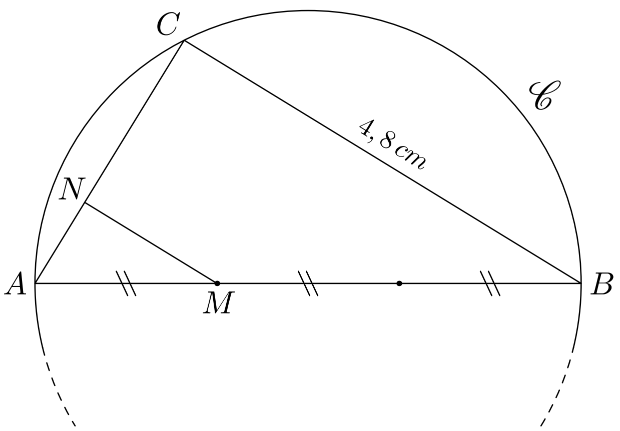
11. *Exercices non-classés*

E.29 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ mesurant $6\,cm$; soit C un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que : $BC = 4{,}8\,cm$.

Le point M appartient au diamètre $[AB]$ vérifiant la relation : $AM = \dfrac{1}{3} \cdot AB$

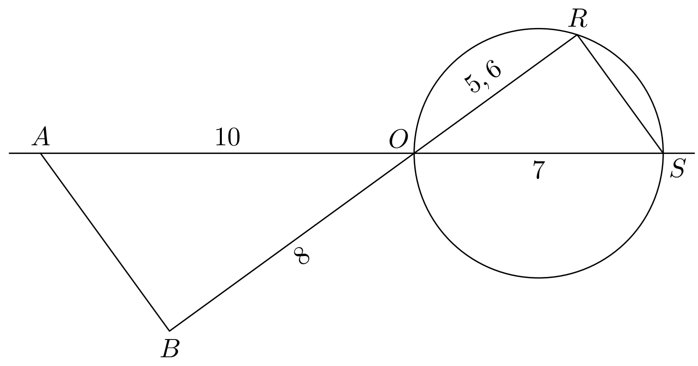
Le point N appartient à la droite (AC) et tel que les droites (NM) et (BC) sont parallèles.

Une représentation de cette configuration est donnée ci-dessous :



1. a. Justifier que le triangle ABC est rectangle en C.
   b. Déterminer la longueur du segment $[AC]$.
2. Déterminer, à l'aide du théorème de Thalès, la mesure du segment $[AN]$

E.30 *La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire.*



$\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre $[OS]$ tel que : $OS = 7\,cm$.
R est un point du cercle tel que : $OR = 5{,}6\,cm$.
A est le point de la demi-droite $[SO)$ tel que : $OA = 10\,cm$.
B est le point de la demi-droite $[RO)$ tel que : $OB = 8\,cm$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (RS) sont parallèles.
2. Déterminer la nature du triangle ORS, puis celle du triangle AOB.
3. Déterminer la mesure des longueurs RS et AB par la méthode de votre choix.

