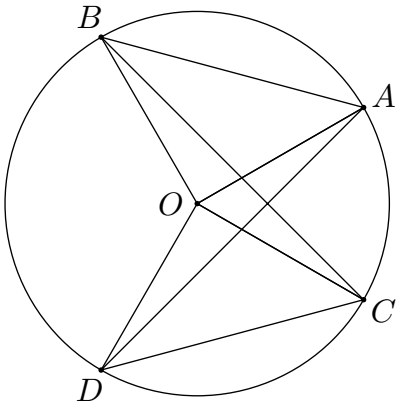
Hors programme collège / Cercle circonscrit et triangle rectangle

ChingQuizz : 1 exercice disponibles pour l'´evaluation par QCM :

1. Vocabulaire et introduction

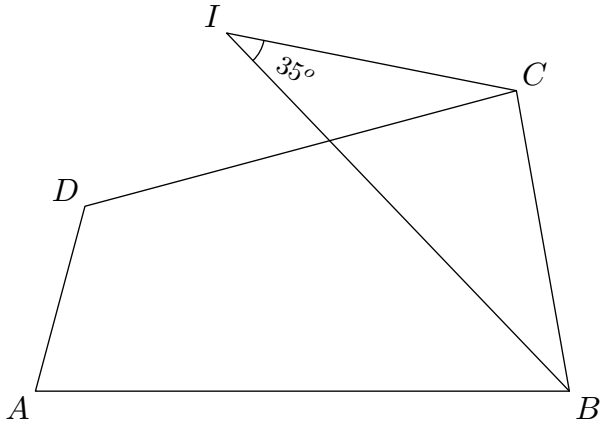
E.1

Compléter le tableau ci-dessous en indiquant quels sont les angles inscrits et en précisant alors l'arc de cercle intercepté.



Angle	$\widehat{ABC}$	$\widehat{BOD}$	$\widehat{AOD}$	$\widehat{DCB}$
Inscrit ou au centre				
Arc intercepté				

E.2 On munit le plan d'un quadrilatère $ABCD$ et d'un point I tel que $\widehat{CIB} = 35^o$.



1. À l'aide du compas et de la règle non-graduée, tracer le cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle BCI.
2. a. Placer le point M intersection de $[DA]$ et de $\mathscr{C}$.
   b. Mesurer l'angle $\widehat{CMB}$ au degré près.
3. a. Placer le point N intersection du segment $[AB]$ et du cercle $\mathscr{C}$.
   b. Mesurer l'angle $\widehat{CNB}$

2. Théorème du triangle rectangle et du cercle circonscrit

E.3 On considère le triangle ABC dont les mesures ont pour valeur :

$AB = 5{,}2\,cm$; $BC = 4{,}8\,cm$; $AC = 2\,cm$

1. a. Tracer le triangle ABC.
   b. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

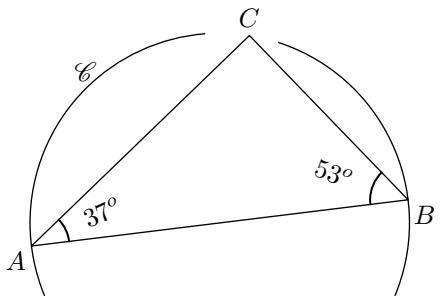
On note M le milieu de $[BC]$, N le milieu de $[AC]$, P le milieu de $[AB]$.

2. a. Démontrer que (MP) est parallèle à (AC).
   b. En déduire que (MP) est la médiatrice de $[BC]$.
3. Démontrer que (NP) est la médiatrice de $[AC]$.
4. Que peut-on dire du point P?

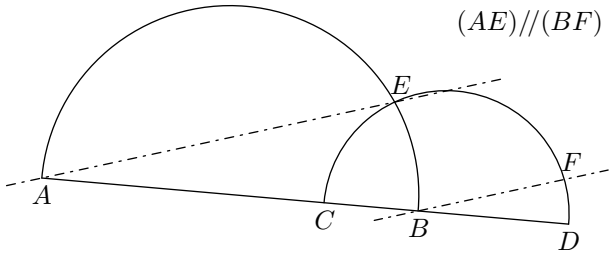
(Énoncer de nouvelles propriétés)

E.4 On considère le cercle $\mathscr{C}$ ayant pour diamètre le segment $[AB]$.

Avec les indications portées sur la figure, montrer que le point C appartient au cercle $\mathscr{C}$.



E.5 La figure ci-dessous présente deux demi-cercles de diamètre respectif $[AB]$ et $[CD]$ où les points A, B, C, D sont alignés. On note E le point d'intersection de ces deux demi-cercles.
Le point F appartient à un de ces demi-cercles tel que les droites (AE) et (BF) soient parallèles.

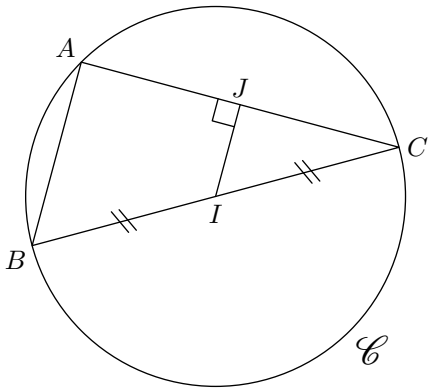


Sans justification, citer tous les triangles rectangles constructibles avec les points nommés sur cette figure.

3. *Réciproque du triangle rectangle et du cercle circonscrit*

E.6 On considère le triangle ABC inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre I où $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

La droite perpendiculaire à la droite (AC) passant par le point I intercepte le segment $[AC]$ en J.



1. Montrer que les droites (AB) et (IJ) sont parallèles.
2. En déduire que J est le milieu du segment $[AC]$.

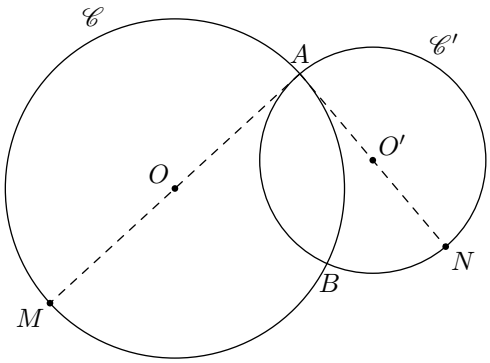
E.7 On considère une demi-droite $[Ax)$ et un point C appartenant à cette demi-droite.

En utilisant uniquement la règle non-graduée et le compas, placer un point B dans le plan de sorte que le triangle ABC soit un triangle rectangle en B.

E.8 Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O' s'interceptant en deux points A et B.
On note :

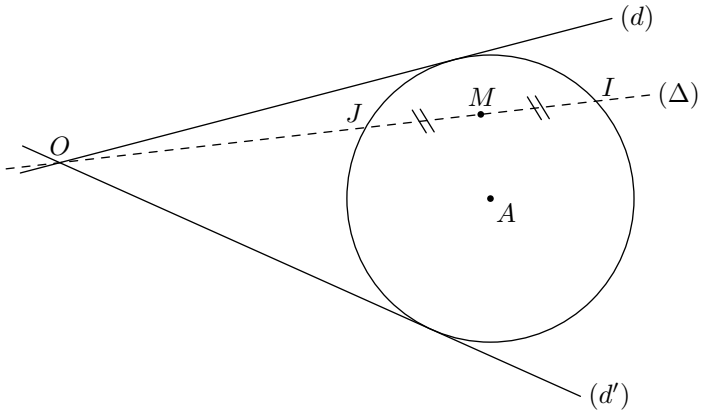
- M le point diamétralement opposé à A dans $\mathscr{C}$;
- N le point diamétralement opposé à A dans $\mathscr{C}'$.

Voici une représentation de cette configuration :



1. Montrer que le triangle ABN est rectangle en B.
2. Montrer que les points M, B et N sont alignés.

E.9 On considère dans le plan le cercle $\mathscr{C}$ de centre A ; les deux droites (d) et (d') sécantes au point O sont également tangentes au cercle $\mathscr{C}$; une droite (Δ) intercepte le cercle $\mathscr{C}$ au point I et J ; M est le milieu du segment $[IJ]$:



1. Justifier que le triangle JMA est rectangle en M.
2. En déduire que le point M appartient au cercle de diamètre $[OA]$.

E.10 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et un segment $[AB]$ formant un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

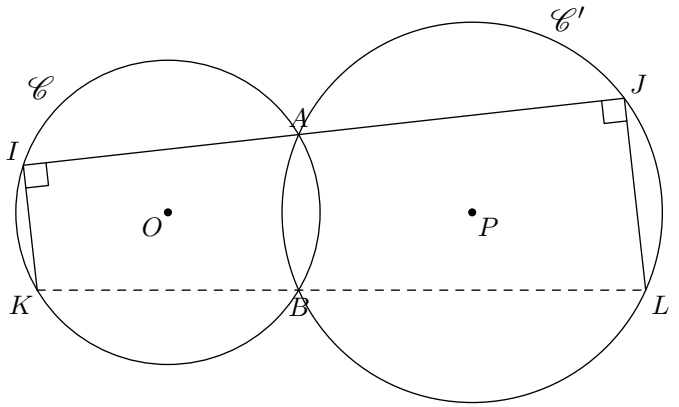
On considère un point C du cercle $\mathscr{C}$ vérifiant : $\widehat{AOC} = 40^o$

1. Effectuer une représentation de cette configuration.
2. a. Justifier que le triangle OAC est un triangle isocèle.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACO}$
3. a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{OCB}$.
4. Déterminer la nature du triangle ABC.

4. *Théorème et réciproque du triangle rectangle et du cercle circonscrit*

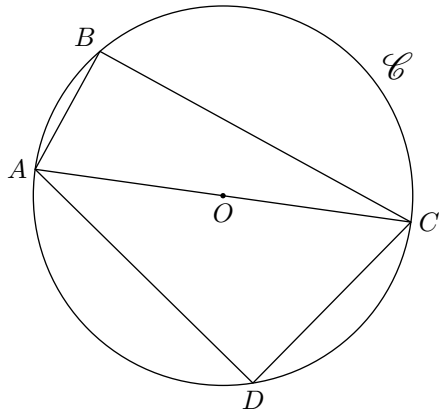
E.11 On considère dans le plan les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif O et P tels que :

- ces deux cercles s'interceptent aux points A et B ;
- les points I et J sont des points respectifs des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ tels que les points I, A, J sont alignés ;
- les points K et L sont des points respectifs des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ tels que $\widehat{KIA}$ et $\widehat{AJL}$ sont des angles droits.



1. Démontrer que le triangle AKB est un triangle rectangle en B.
2. Démontrer que les points K, B, L sont alignés.

E.12 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et quatre points A, B, C et D appartenant au cercle $\mathscr{C}$ tels que le segment $[AC]$ soit un diamètre de ce cercle.



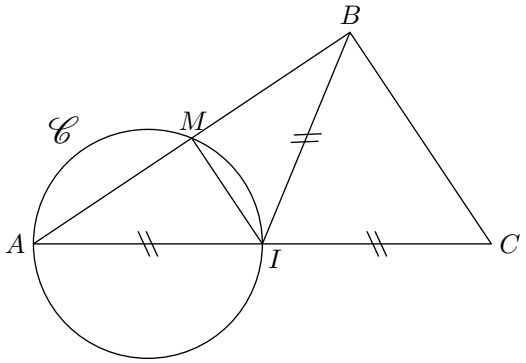
1. Montrer que le triangle ADC est un triangle rectangle en D.
2. a. Quelle propriété doit posséder le segment $[BD]$ afin que le triangle ABD soit un triangle rectangle en A?

   b. Si le triangle ABD est rectangle en A, quelle sera la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier votre réponse.

E.13 On considère un triangle ABC et on note I le milieu du segment $[AC]$. On a les égalités de longueurs :

$IA = IB = IC$

Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AI]$ intercepte le segment $[AB]$ au point M.

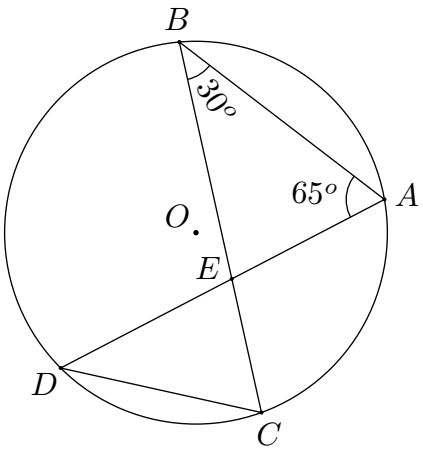


Montrer que les droites (MI) et (BC) sont parallèles entre elles.

5. *Applications directes*

E.14

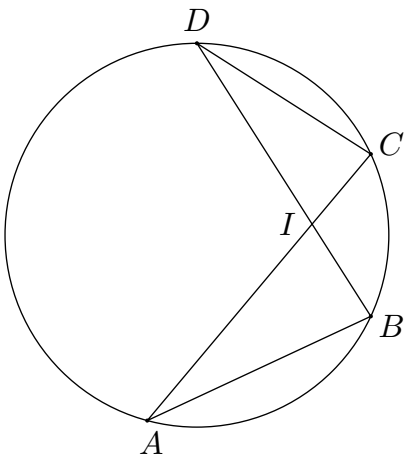
Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle EDC. Justifier votre démarche.



E.15

Dans la figure ci-contre, les points A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

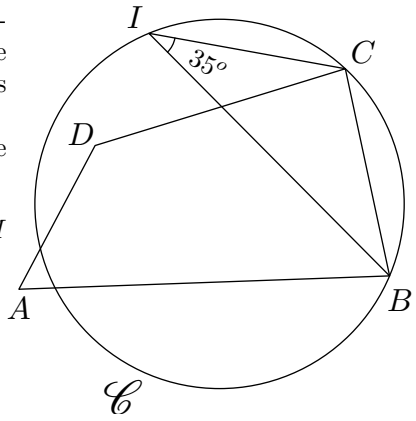
Montrer que les triangles DCM et ABM ont les mesures de leurs angles égaux deux à deux.



E.16

On considère le quadrilatère $ABCD$ et le cercle $\mathscr{C}$ passant par les points B et C.
Soit I un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que : $\widehat{CIB} = 35^o$

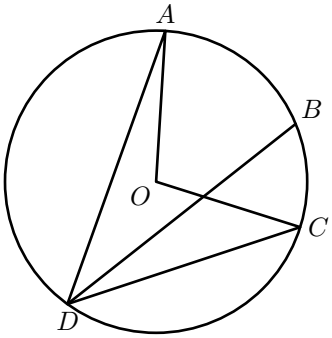
Déterminer un point M de $[DA]$ tel que :
$\widehat{CMB} = 35^o$.



E.17

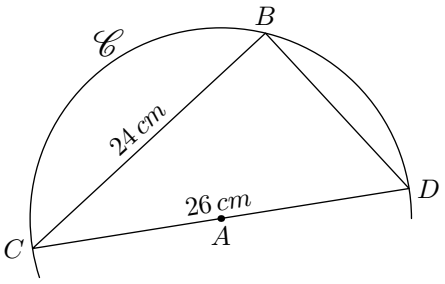
On considère la figure ci-contre où les points A, B, C, D appartiennent au cercle de centre O et vérifient :
$\widehat{AOB} = 64^o$; $\widehat{BDC} = 20^o$

En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Justifier votre raisonnement.



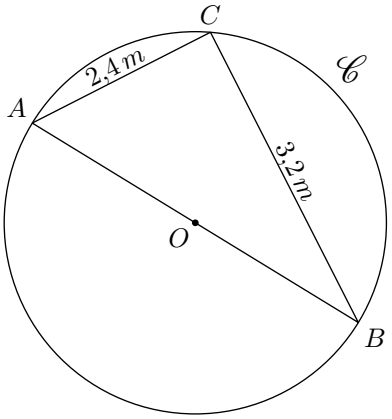
6. *Cercle circonscrit et théorème de Pythagore*

E.18 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et trois points B, C et D du cercle $\mathscr{C}$ tels que le segment $[DC]$ soit un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.



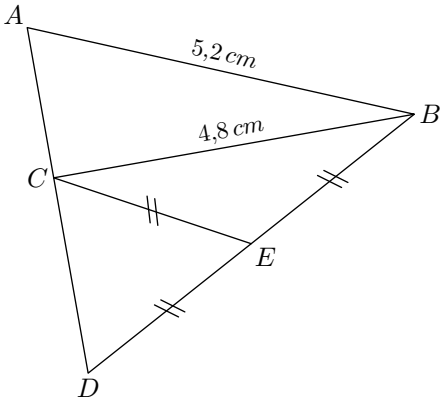
Déterminer la longueur du segment $[BD]$.

E.19 Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O tel que les points A et B soient diamétralement opposés.



1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Calculer la mesure du rayon du cercle $\mathscr{C}$.

E.20 Dans le plan, on considère un triangle ABD où les points C et E appartiennent respectivement aux segments $[AD]$ et $[BD]$.

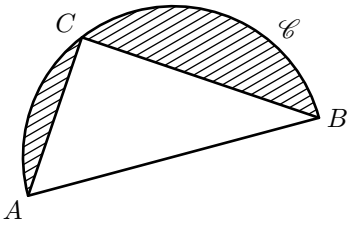


Certaines indications de longueurs sont portées sur la longueur.

1. Montrer que le triangle BCD est rectangle en C.
2. En déduire la longueur du segment $[AC]$.

E.21 On considère un triangle ABC et son cercle circonscrit.
On a les mesures suivantes :

$AC = 2{,}7\,cm$; $BC = 3{,}6\,cm$; $AB = 4{,}5\,cm$

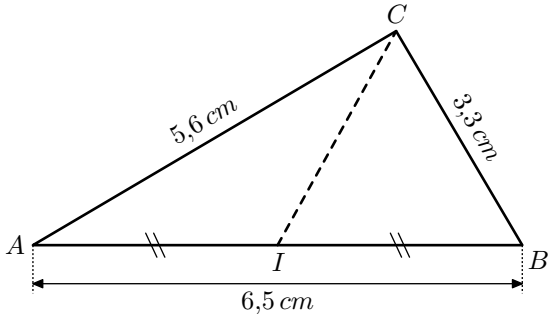


1. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.
2. a. Justifier que le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.
   b. En déduire l'aire, arrondie au mm^2, du demi-cercle présenté dans la figure ci-dessous
3. Calculer l'aire, arrondie au mm^2, de la partie hachurée.

E.22 On considère un triangle ABC ayant pour dimensions :

$AB = 6{,}5\,cm$; $AC = 5{,}6\,cm$; $BC = 3{,}3\,cm$

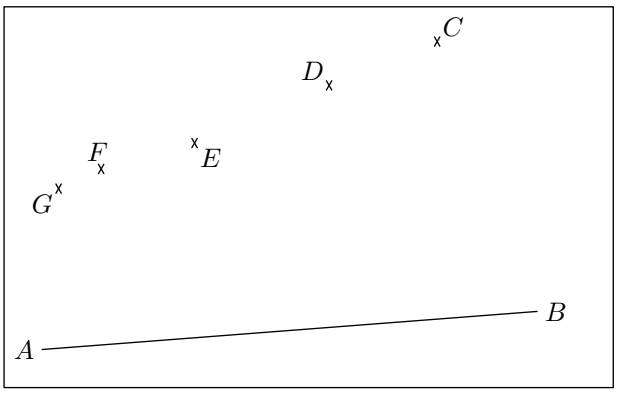
On note I le milieu du segment $[AB]$.



Déterminer la mesure du segment $[IC]$.

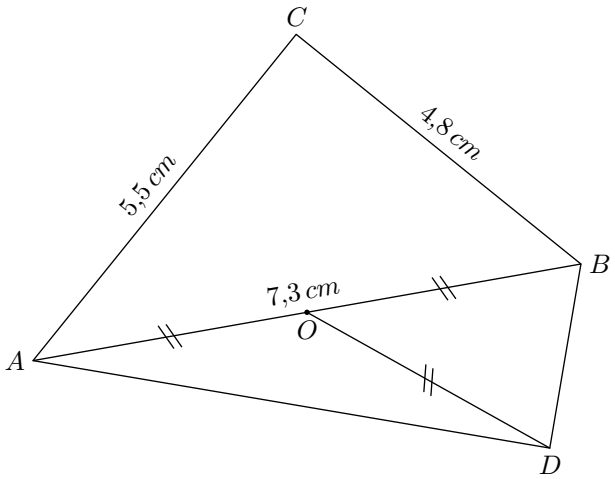
7. *Caractérisation des points du cercle par une relation angulaire.*

E.23 Considère ci-dessous la figure composée du segment $[AB]$ et de cinq autres points du plan :



À l'aide de l'équerre non-graduée, préciser les points susceptibles d'appartenir au cercle de diamètre $[AB]$.

E.24 On considère la figure ci-dessous où O est le milieu du segment $[AB]$:



Prouver l'existence d'un cercle, dont on précisera le centre, passant par les quatre points A, B, C et D.

On dira alors que les points A, B, C et D sont cocycliques

8. *Trigonométrie, triangle rectangle et cercle circonscrit*

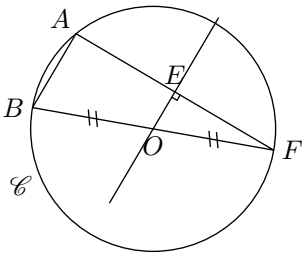
E.25

1. Tracer sur la copie un segment $[EF]$ de longueur $7\,cm$ et de milieu O.
   Tracer le cercle de diamètre $[EF]$ puis placer un point G sur le cercle tel que : $\widehat{FEG}=26^o$.
2. Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle en G.
3. Calculer la longueur FG, arrondie au millimètre près.
4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{GOF}$ *(justifier votre réponse)*

E.26

Sur le croquis ci-contre :

- $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $BF=40\,mm$;
- A est un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $AB=14\,mm$;
- la perpendiculaire à la droite (AF) passant par O coupe le segment $[AF]$ en E.



1. Quelle est la nature du triangle ABF? Justifier votre réponse.
2. Calculer la valeur arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{AFB}$.
3. Calculer la valeur arrondie au millimètre près de la longueur EF.

E.27 *L'unité de longueur est le centimètre.*

$\mathscr{C}$ est un cercle de $2{,}6\,cm$ de rayon.
Le segment $[MN]$ est un diamètre de ce cercle.
P est un point du cercle tel que $MP=2$.

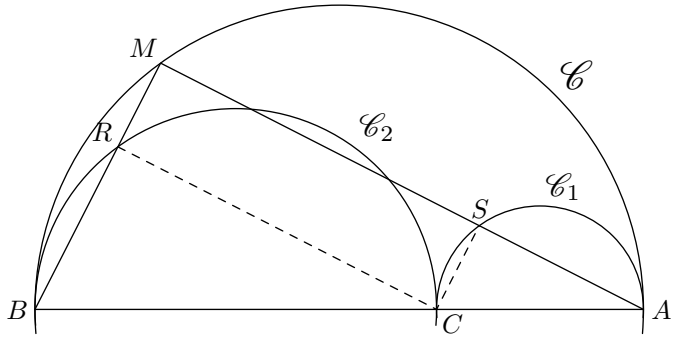
1. Construire la figure
2. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en P.
3. Calculer la longueur PN.
4. a. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{NMP}$. Arrondir le résultat au millième.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{NMP}$

E.28 On considère un cercle de $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$; soit C un point appartenant au segment $[AB]$. On considère les deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de diamètre respectif $[AC]$ et $[BC]$.

Le point M est un point du cercle $\mathscr{C}$; on note :

- Le point R est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}_2$ avec le segment $[MB]$;
- le point S est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}_1$ et du segment $[AM]$.

On donne les mesures suivantes :
$BM = 3{,}64\,cm$; $AM = 7{,}13\,cm$; $BC = 5{,}28\,cm$



Les résultats seront donnés au degré près ou au millimètre près.

1. a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{MBA}$.
   b. Déterminer la mesure du segment $[AB]$.
2. a. Justifier que le triangle BCR est rectangle en R.
   b. Déterminer la mesure du segment $[BR]$.
3. a. Justifier que les droites (BM) et (CS) sont parallèles.
   b. Déterminer la mesure de SA.

E.29 On considère les quatre figures ci-dessous :

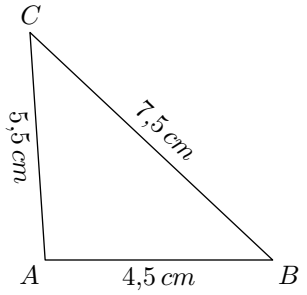


Figure 3

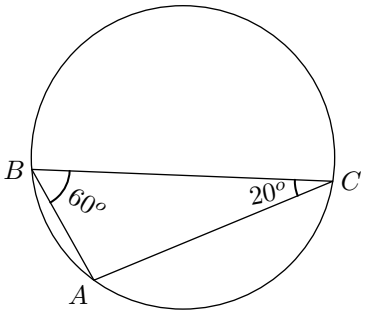


Figure 2

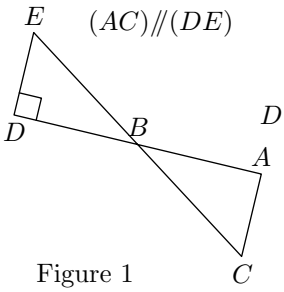
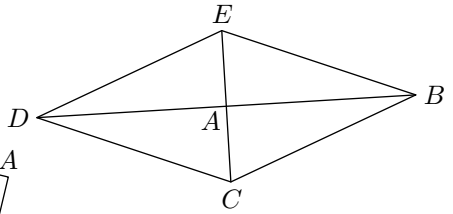


Figure 1



$BCDE$ est un losange de centre A

Figure 4

Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant la liste des propriétés présente en fin d'exercice :

	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
Le triangle ABC est rectangle en A?				
Numéro(s) de la ou des propriétés permettant de le prouver				

Liste des propriétés :

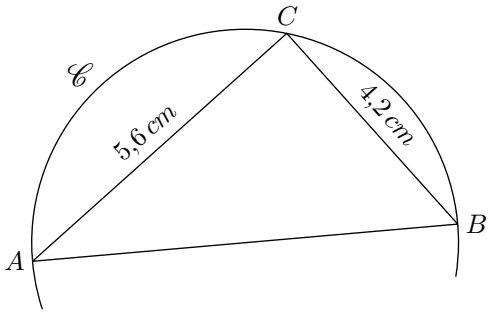
1. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
2. Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
3. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.
4. Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.
5. Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaires à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
6. Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
7. Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.
8. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté.

E.30 *Toutes les questions sont indépendantes.*

Soit un triangle ABC tel que :
$AB = 7{,}5\,cm$; $AC = 4{,}5\,cm$; $BC = 6\,cm$

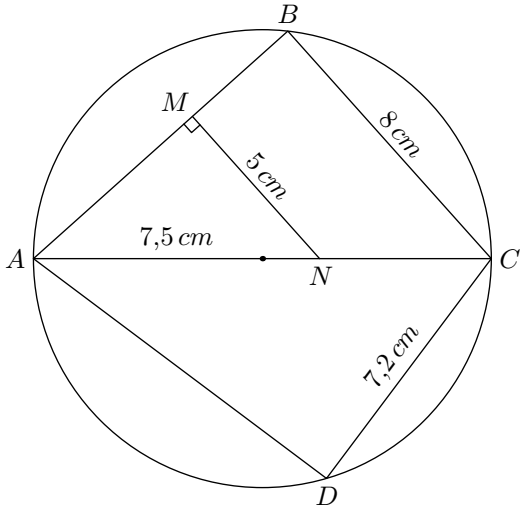
1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
3. a. Placer le point E du segment $[AB]$ tel que : $BE = 5\,cm$.
   Le cercle de diamètre $[BE]$ coupe le côté $[BC]$ en F.
   b. Montrer que le triangle BFE est rectangle.
4. a. Montrer que les droites (FE) et (AC) sont parallèles.
   b. Calculer FB et FE.
5. a. Calculer $\sin \widehat{ABC}$.
   b. Donner une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

E.31 On considère le triangle ABC inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ dont le segment $[AB]$ forme un diamètre.



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

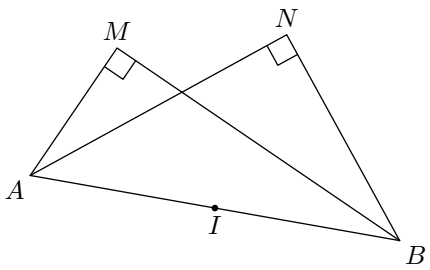
E.32 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AC]$. Les points B et D sont deux points du cercle $\mathscr{C}$.
Le point M est un point du segment $[AB]$ et le point N est un point du segment $[AC]$ tel que $(AB) \perp (MN)$.



1. Justifier que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
2. Justifier que le segment $[AC]$ a pour longueur $12\,cm$
3. On admet que le triangle ADC est rectangle en D. Déterminer la mesure du segment $[AD]$.
4. Déterminer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{DAC}$.

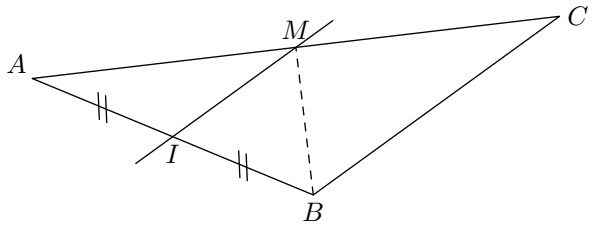
9. *Théorème et réciproque du triangle rectangle et de la médiane*

E.33 Dans le plan, on considère un segment $[AB]$ dont le point I est un milieu.
Les points M et N forment deux triangles rectangles dont leur hypoténuse est le segment $[AB]$.



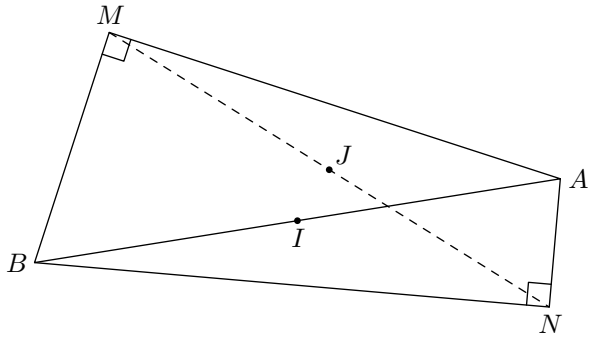
Montrer que le triangle MNI est isocèle en I.

E.34 On considère un triangle ABC isocèle en B. On note I le milieu du segment $[AB]$.
La droite passant par le point I et parallèle à la droite (BC) intercepte le segment $[AC]$ au point M.



Montrer que le triangle AMB est rectangle en M.

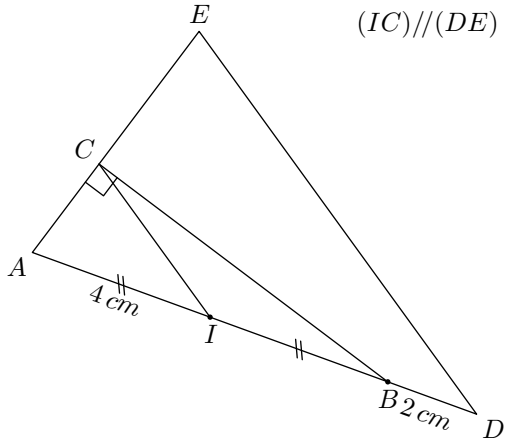
E.35 On considère le quadrilatère $AMBN$ possédant deux angles droits en M et N. On note I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[MN]$.



Montrer que la droite (IJ) est la médiatrice du segment $[MN]$.

E.36 On considère un triangle ABC rectangle en C où $AI = 4\,cm$ en notant I le milieu du segment $[AB]$.
Le point D est placé tel que les points A, I et D soient alignés et tel que $BD = 2\,cm$.
Le point E est un point de la droite (AC) tel que les droites (IC) et (DE) soient parallèles.

Voici une représentation de cette configuration :



1. Déterminer la mesure du segment $[CI]$
2. En déduire la mesure du segment $[ED]$.

10. *Tangente d'un cercle*

E.37 Soit (d) une droite et A un point de cette droite. B est un point du plan n'appartenant pas à la droite (d).

1. Réaliser une figure correspondant à cette configuration.
2. On admet l'existence d'un unique cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A et B et tangent à la droite (d).
   a. Donner une méthode de tracer du cercle $\mathcal{C}$ en utilisant uniquement le compas et la règle non-graduée.
   b. Compléter la figure en traçant le cercle $\mathscr{C}$.

11. *Un peu plus loin*

E.38 Dans le plan, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et $[AB]$ un diamètre de ce cercle.
Les points C et D sont des points du cercle $\mathscr{C}$ distincts de A et de B.

On note :

- (d) la droite parallèle à la droite (AC) passant par le point D ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en E.
- (d') la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point E ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en

F.

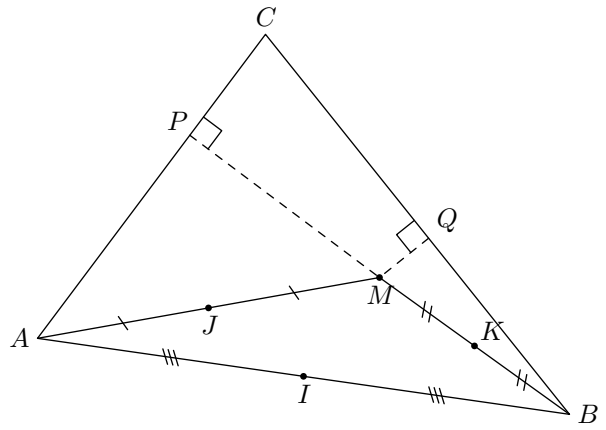
1. Réaliser cette figure.
2. Démontrer que le segment $[DF]$ est un diamètre du cercle $[DF]$.

E.39 Dans un triangle ABC quelconque, on considère un point M à l'intérieur du triangle ABC. On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.

Le point P est l'intersection de la droite (AC) et de la droite perpendiculaire à (AC) passant par le point M.

Le point Q est l'intersection de la droite (BC) et de la droite perpendiculaire à (BC) passant par le point M.

Voici une représentation d'une telle configuration :



1. Montrer que les segments $[IJ]$ et $[KQ]$ sont deux segments de même longueur.
2. Que peut-on dire des longueurs des segments $[IK]$ et $[JP]$? Aucune justification n'est demandée.

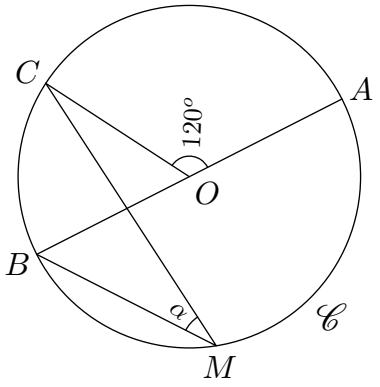
12. *Un peu plus loin*

E.40

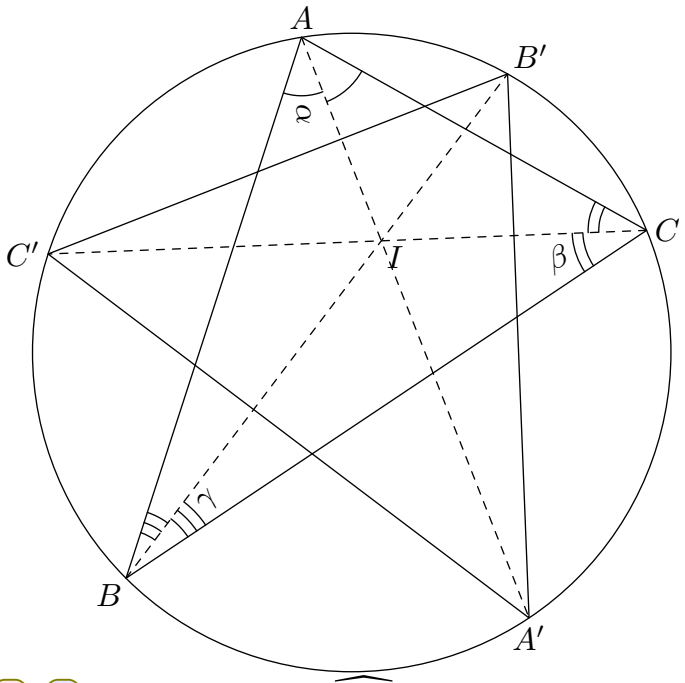
La figure ci-contre représente un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Les points A et B sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathscr{C}$. Le point C appartient au cercle $\mathscr{C}$ tel que :

$\widehat{COA} = 120^o$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BMC}$.



E.41 On considère, dans le plan, un triangle ABC et son cercle $\mathscr{C}$ circonscrit ; les bissectrices des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont concourantes au point I et interceptent le cercle $\mathscr{C}$ respectivement aux points A', B', C' :



1. a. Justifier que l'angle $\widehat{IAB'}$ a pour mesure $\alpha + \gamma$
   b. Établir que le triangle IAB' est isocèle en B'.
2. a. Établir que le triangle AIC' est isocèle en C'.

(b) Que représente la droite $(B'C')$ pour le segment $[AI]$? Justifier votre réponse.

(3) En déduire que I est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$.

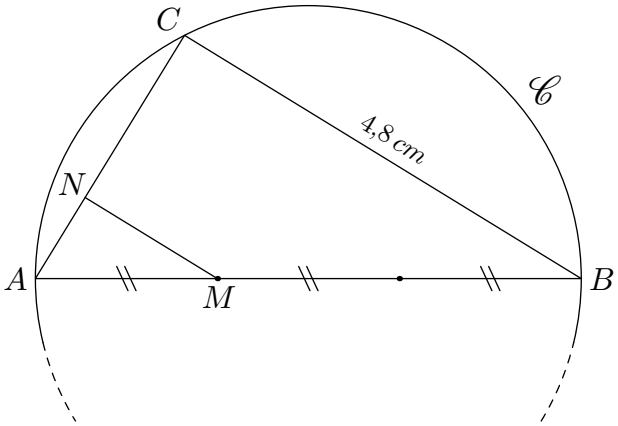
13. *Exercices non-classés*

E.42 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ mesurant $6\,cm$; soit C un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que : $BC = 4{,}8\,cm$.

Le point M appartient au diamètre $[AB]$ vérifiant la relation : $AM = \frac{1}{3} \cdot AB$

Le point N appartient à la droite (AC) et tel que les droites (NM) et (BC) sont parallèles.

Une représentation de cette configuration est donnée ci-dessous :



(1) (a) Justifier que le triangle ABC est rectangle en C.

(b) Déterminer la longueur du segment $[AC]$.

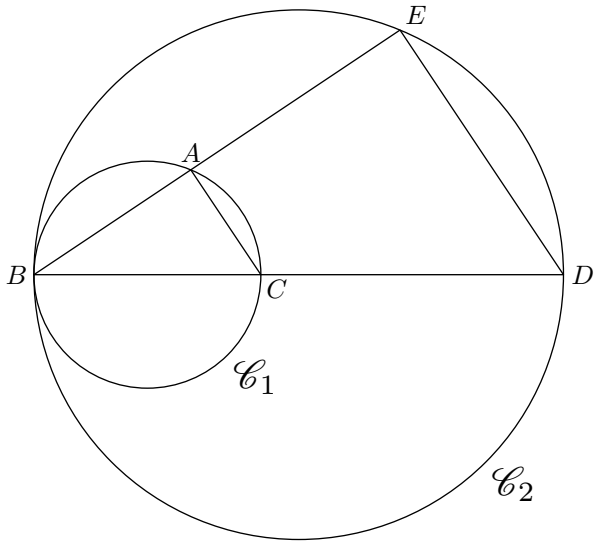
(2) Déterminer, à l'aide du théorème de Thalès, la mesure du segment $[AN]$

E.43 On considère trois points B, C, D tels que $C \in [BD]$.

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de diamètres respectifs les segments $[BC]$ et $[BD]$. E est un point du cercle $\mathscr{C}_2$ distinct de D et de B. Le point A est l'intersection du segment $[BE]$ et du cercle $\mathscr{C}_1$.

On donne les mesures suivantes :

$BC = 9$; $AC = 5{,}4$; $CD = 21$

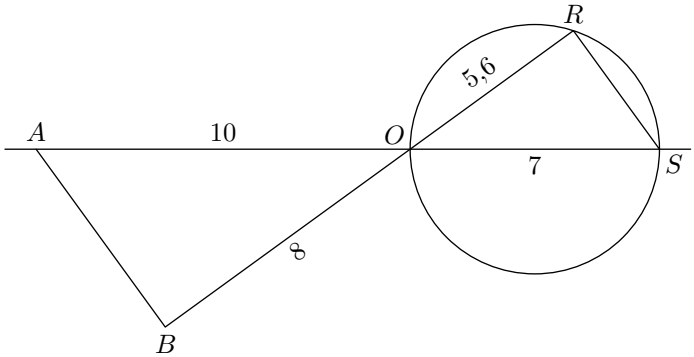


(1) Démontrer que les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

(2) (a) Déterminer la mesure du segment $[BA]$.

(b) En déduire la longueur du segment $[AE]$.

E.44 *La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire.*



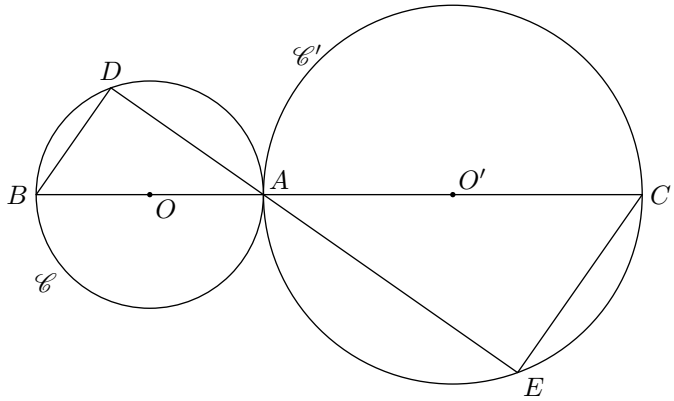
$\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre $[OS]$ tel que : $OS = 7\,cm$.
R est un point du cercle tel que : $OR = 5{,}6\,cm$.
A est le point de la demi-droite $[SO)$ tel que : $OA = 10\,cm$.
B est le point de la demi-droite $[RO)$ tel que : $OB = 8\,cm$.

(1) Démontrer que les droites (AB) et (RS) sont parallèles.

(2) Déterminer la nature du triangle ORS, puis celle du triangle AOB.

(3) Déterminer la mesure des longueurs RS et AB par la méthode de votre choix.

E.45 Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont pour centre respectif O et O' et pour rayon respectif $1\,cm$ et $2\,cm$.
$[AB]$ et $[AC]$ sont des diamètres des cercles respectifs $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
Les points D, A, E et les points B, A, C sont alignés.
De plus, on sait que $DB = 1\,cm$.



(1) Justifier le fait que les triangles DBA et ACE sont rectangles.

(2) Démontrer que les droites (DB) et (CE) sont parallèles.

(3) Donner la valeur de CE.