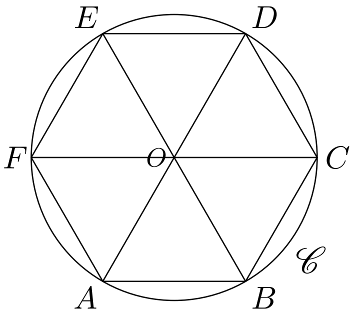
Hors programme collège / Polygones

1. Généralité

E.1

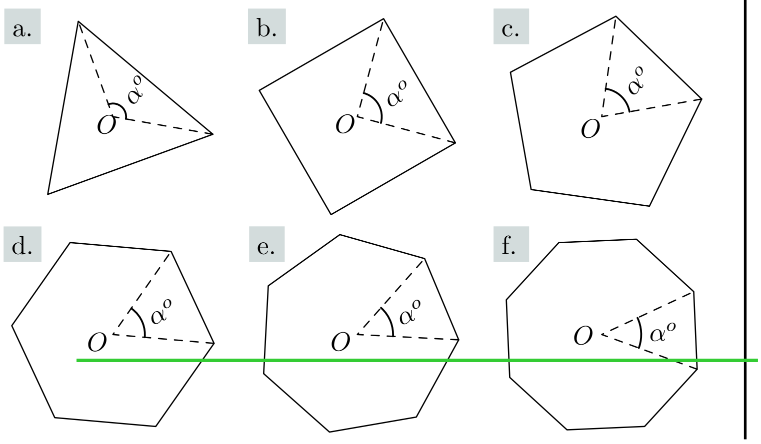
On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ représenté ci-contre inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O.



1. a. Donner la mesure de l'angle $\widehat{COD}$.
   b. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{COE}$?
   c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{EAC}$. Justifier.
2. a. Donner, sans justification, la mesure des angles $\widehat{ACE}$ et $\widehat{CEA}$.
   b. Quelle est la nature du triangle ACE?

2. Propriété des polygones réguliers

E.2 On considère la figure ci-dessous représentant six polygones réguliers ayant pour centre le point O :



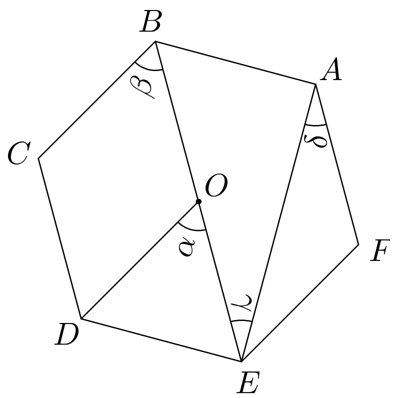
1. Nommer chacun de ces six polygones réguliers.
2. Sur chacun de ces polygones, est représenté un angle ayant pour centre le point O et reliant deux sommets consécutifs du polygone régulier. Dans chacun des cas, déterminer la mesure de l'angle α.

3. Polygones réguliers et angles inscrits

E.3

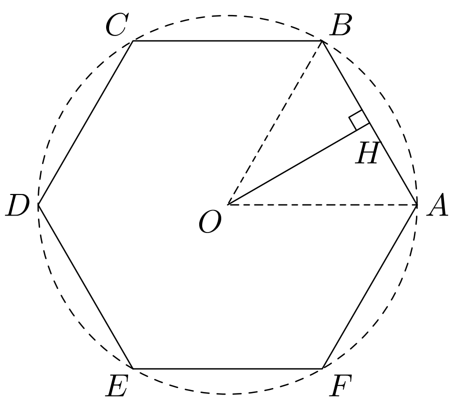
Ci-contre est représentée un hexagone régulier.

Déterminer la mesure des angles codés sur la figure.



4. *Polygones réguliers et trigonométrie*

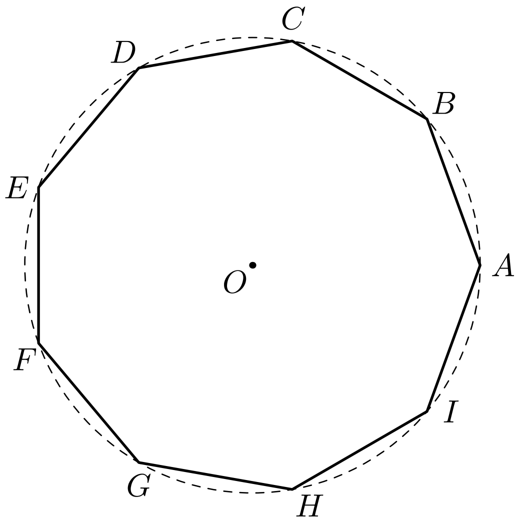
E.4 Considérons l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O représenté ci-dessous :



Le rayon du cercle a pour mesure $4\,cm$. Le point H est la hauteur issue du sommet O dans le triangle OAB.

1. a. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. Justifier votre démarche.
   b. En déduire la mesure du segment $[AB]$.
   c. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$. Justifier votre démarche.
2. Déterminer le périmètre de l'hexagone $ABCDEF$.
3. On donnera les mesures ci-dessous au centième de centimètres carrés.
   a. Déterminer l'aire du triangle OAB.
   b. En déduire l'aire de cet hexagone.

E.5 $ABCDEFGHI$ est un polygone régulier à 9 côtés *(appelé ennéagone)*, O est son centre et son cercle circonscrit a pour rayon $5\,cm$.



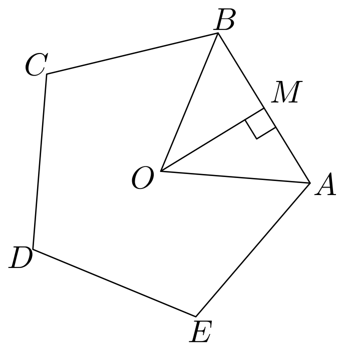
1. Quelle condition doit vérifier un polygone inscrit dans un cercle pour être régulier?
2. a. Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$?
   b. Notons M le milieu du segment $[AB]$. Calculer la longueur AM arrondie au millimètre près.
   c. Donner la mesure du périmètre de l'ennéagone au millimètre près.
3. Expliquer pourquoi le triangle ADG est un triangle équilatéral.

E.6 On considère l'octogone régulier $ABCDDEFGH$. On note O le centre du polygone et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit.
Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est de $4\,cm$.

1. Dans l'octogone $ABCDEFGH$, donne la mesure d'un angle au centre reliant deux de ses sommets consécutifs.
2. Construire en vraie grandeur l'octogone régulier $ABCDEFGH$.
3. a. On note I le milieu du segment. Déterminer la mesure du segment $[IA]$ au millimètre près.
   b. En déduire le périmètre de l'octogone $ABCDEFGH$ au millimètre près.

E.7

Le Pentagone est un bâtiment hébergeant le ministère de la défense des États-Unis.
Il a la forme d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $OA = 238\,m$.
Il est représenté par le schéma ci-contre.

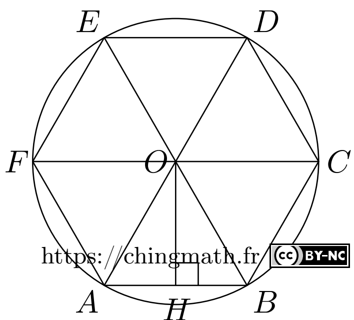


1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
2. La hauteur issue de O dans le triangle AOB coupe le côté $[AB]$ au point M :
   a. Justifier que (OM) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et la médiatrice de $[AB]$.
   b. Prouver que $[AM]$ mesure environ $140\,m$.
   c. En déduire une valeur approchée du périmètre du Pentagone.

5. *Polygones réguliers, échelle et trigonométrie*

E.8

Le schéma ci-contre représente un hexagone régulier $ABCDEF$ de $96\,m$ de périmètre. IL est inscrit dans un cercle de centre O. Le segment $[OH]$ est une hauteur du triangle OBH.

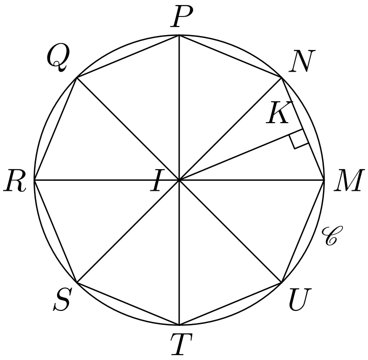


1. Justifier que le triangle OAB est un triangle

2. Calculer la longueur OH, exprimée en m. En donner l'arrondi au centimètre près.
3. Utiliser ce résultat pour calculer l'aire du triangle OBA, exprimée en m^2 et arrondi au 1/10.
4. En déduire l'arrondi à l'unité de l'aire d'un hexagone régulier de $96\,m$ de périmètre.

E.9

On considère l'octogone régulier $MNPQRSTU$ représenté en réduction ci-contre où le segment $[MN]$ mesure $12\,m$ en vraie grandeur.
Le point K représente le pied de la hauteur issue de I

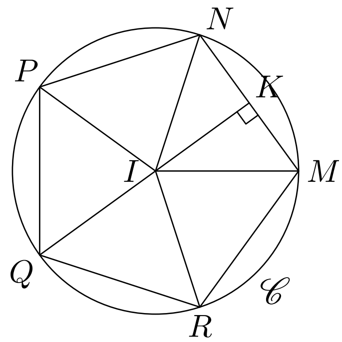


1. Donner la mesure de l'angle $\widehat{MNI}$.
2. On souhaite représenter dans le cadre ci-dessous, le triangle IMN à l'échelle $^1/_{4\,000}$

   a. Donner la mesure du segment représentant le côté $[MN]$.
   b. Effectuer la représentation du triangle IMN dans le cadre en y ajoutant la hauteur $[IK]$
3. En déduire une valeur approchée au mètre près de la hauteur $[IK]$.

E.10

On considère le pentagone régulier $MNPQR$ inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre I représenté en réduction ci-contre où le segment $[MN]$ mesure $12\,m$ en vraie grandeur.
Le point K représente le pied de la hauteur issue de I



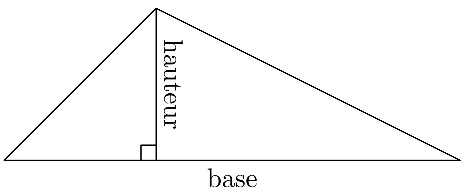
1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{MNI}$.
2. On souhaite représenter dans le cadre ci-dessous, le triangle IMN à l'échelle $^1/_{4\,000}$

   a. Donner la mesure du segment représentant le côté $[MN]$.
   b. Effectuer la représentation du triangle IMN dans le cadre en y ajoutant la hauteur $[IK]$
3. En déduire une valeur approchée au mètre près de la hauteur $[IK]$.

6. *Problème du brevet*

E.11

On rappelle que l'aire d'un triangle se calcule par la formule : $\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$



Rémy dispose de $96\,m$ de grillage avec lesquels il souhaite construire un enclos pour son poney. Il cherche quelle forme donner à son enclos pour que celui-i ait la plus grande surface possible.

Toutes les parties sont indépendantes

Partie 1

Sa première idée est de réaliser un rectangle avec les $96\,m$ de grillage. Calculer la longueur et la largeur de ce rectangle sachant que :

- la longueur est le double de la largeur ;
- son périmètre est $96\,m$.

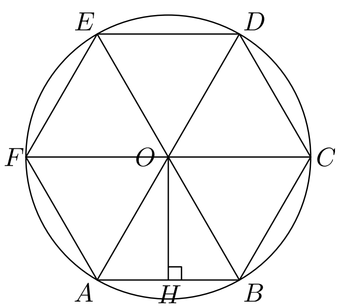
Calculer l'aire de ce rectangle de $96\,m$ de périmètre.

Partie 2

Sa deuxième idée est de réaliser un carré. Calculer l'aire d'un carré de $96\,m$ de périmètre

Partie 3

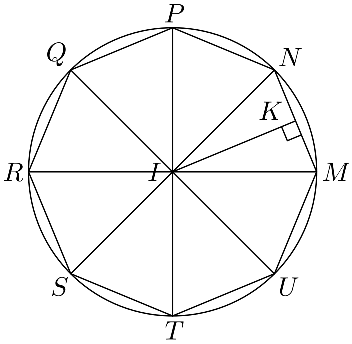
Sa troisième idée est de réaliser un hexagone régulier.
Le schéma à main levée ci-contre représente un héxagone régulier $ABCDEF$ de $96\,m$ de périmètre. IL est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $16\,m$. Le segment $[OH]$ est une hauteur du triangle équilatéral OBH.



1. Calculer la longueur OH, exprimée en m. En donner l'arrondi au centimètre près.
2. Utiliser ce résultat pour calculer l'aire du triangle OBA, exprimée en m^2 et arrondi au $1/10$.
3. En déduire l'arrondi à l'unité de l'aire d'un hexagone régulier de $96\,m$ de périmètre.

Partie 4

Sa quatrième idée est de réaliser un octogone régulier de $96\,m$ de périmètre.
La figure ci-contre représente le plan réalisé par Rémy.
Cet octogone est inscrit dans un cercle de centre I. Le segment $[IK]$ est une hauteur du triangle isocèle IMN.



1. Vérifier que $MN = 12\,m$ dans la réalité.
2. En prenant pour échelle $1\,cm$ pour $4\,m$, représenter dans le cadre ci-dessous le triangle IMN, puis le point K. Laisser apparents tous les traits de construction.
3. Mesurer sur votre plan la longueur IK.
Combien de mètres cela représente-t-il dans la réalité?
4. En déduire l'aire du triangle MIN, puis, à partir de cette valeur, calculer l'aire d'un octogone régulier de $96\,m$ de périmètre.

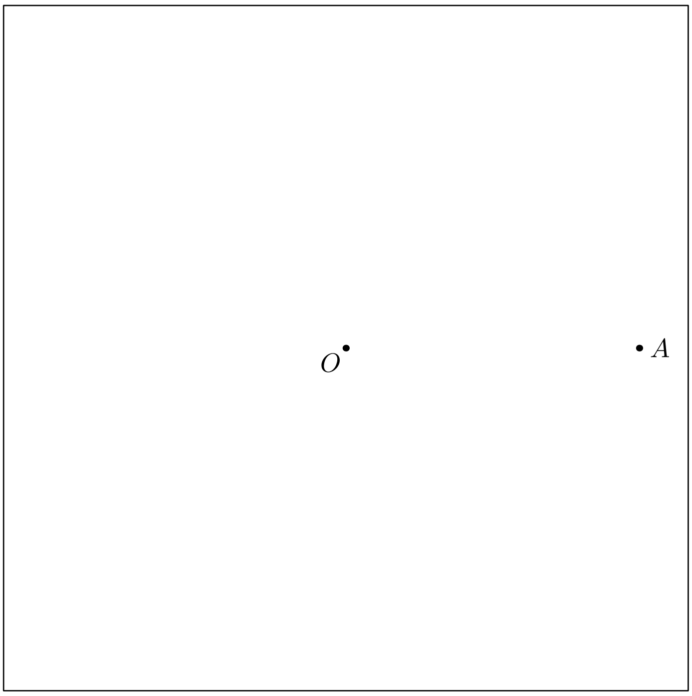
Partie 5

Les recherches ont permis à Rémy de remarquer que l'aire d'un polygone régulier de $96\,m$ de périmètre semble augmenter quand on augmente le nombre de ses côtés. Il imagine qu'un enclos circulaire aurait peut-être une surface encore plus grande.

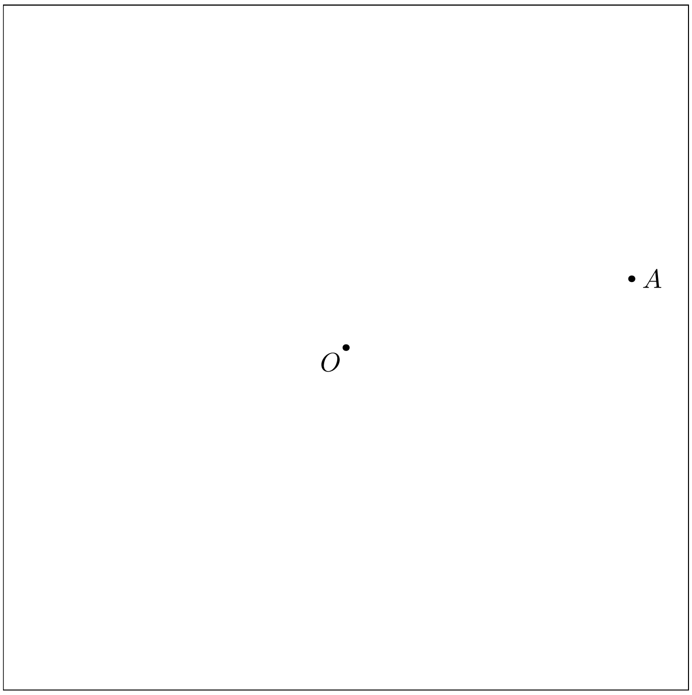
1. Quel rayon faut-il prendre pour avoir un disque de périmètre $96\,m$?
2. En déduire l'aire d'un disque ayant pour périmètre $96\,m$.

7. *Tracé de polygones*

E.12 Tracer, à l'aide uniquement du compas et de la règle non-graduée, le triangle équilatéral ABC dont le sommet A et le centre O sont représentés ci-dessous :

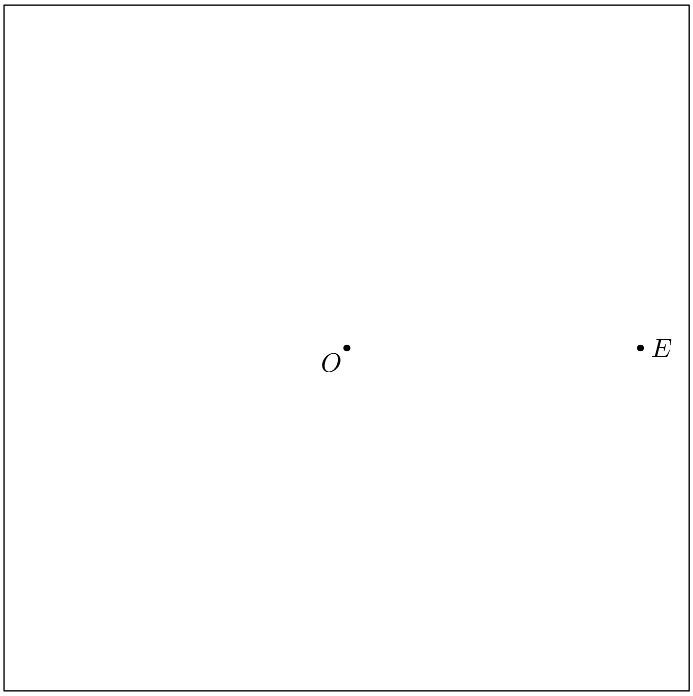


E.13 Tracer, à l'aide uniquement du compas et de la règle non-graduée, le carré $ABCD$ dont le centre O et le sommet A sont représentés ci-dessous :



8. *Tracé de polygones*

E.14 Tracer, à l'aide uniquement du compas et de la règle non-graduée, de l'hexagone régulier $ABCDDEF$ dont le de centre O et de rayon $[OE]$ sont représentés ci-dessous :



9. *Exercices non-classés*

E.15 ***L'exercice n'existe pas.***