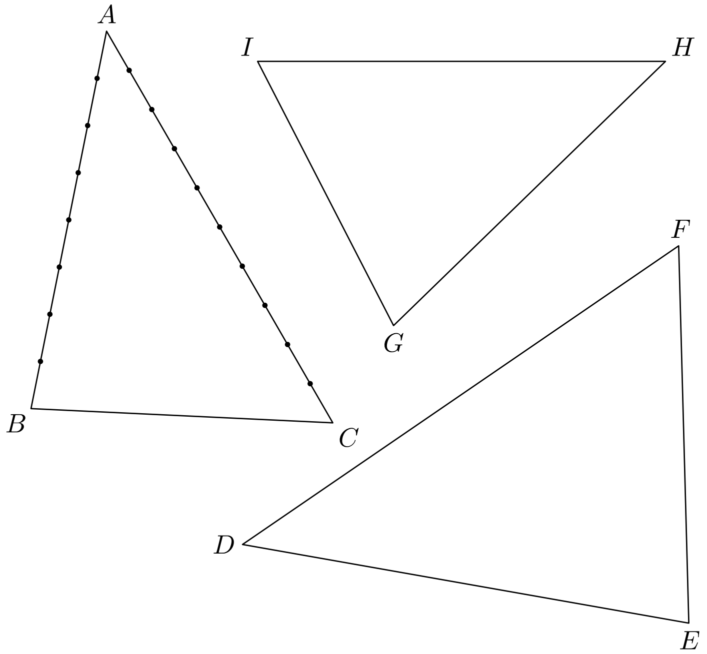
Hors programme collège / Théorème des milieux

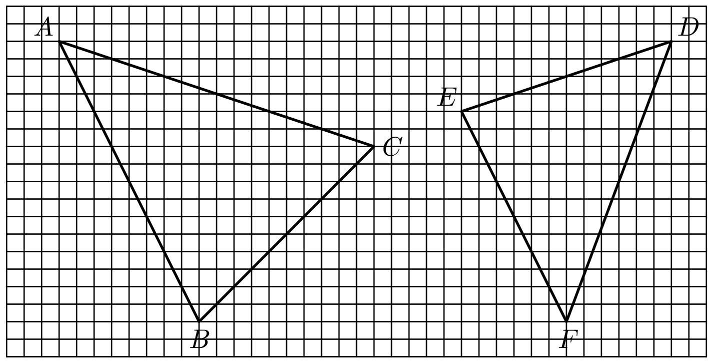
1. Activité d'introduction

E.1 On considère les trois triangles ABC, DEF et GHI représentés ci-dessous :



1. Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC ont été partagés en part égales.
   a. Placer le point J milieu du segment $[AB]$ et K milieu du segment $[AC]$.
   b. Qu'observe-t-on à propos des droites (BC) et (JK)? À propos des longueurs JK et BC?
2. a. À l'aide de la règle gradué, placer les points L et M milieux respectifs des segments $[DE]$ et $[DF]$.
   b. Qu'observe-t-on à propos des droites (EF) et (LM)? À propos des longueurs EF et LM?
3. En traçant les médiatrices des segments $[GH]$ et $[GI]$, quelles observations peut-on faire sur la droite reliant les milieux de deux des côtés du triangle GHI et du troisième côté.

E.2 Dans le plan quadrillé, on considère les triangles ABC et EDF représentés ci-dessous :



On se servira du quadrillage pour placer les nouveaux points de la figure et pour construire les droites parallèles.

1. a. Placer le point I milieu du segment $[AB]$.
   b. Tracer la droite (d) passant par le point I et parallèle à la droite (BC). Nommer J le point d'intersection des droites (d) et (AC).
   c. Vérifier que le point J est le milieu des segments $[AC]$.
   d. À l'aide du compas, vérifier que le segment $[IJ]$ mesure la moitié du segment $[BC]$.
2. a. Placer le point K milieu du segment $[DE]$.
   b. Tracer la droite (Δ) passant par le point K et parallèle à la droite (EF). Nommer L le point d'intersection des droites $[DF]$ et (Δ).
   c. Vérifier que le point L est le milieu des segments $[DF]$.
   d. À l'aide du compas, vérifier que l'égalité suivante : $EF = 2{\times}KL$

2. Théorème des milieux : parallélisme

E.3 Soit ABC un triangle quelconque. Soient I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

1. Effectuer le tracé d'une figure représentant cette situation.
2. Placer le point M, image du point I par la symétrie de centre J. Démontrer que le quadrilatère $AMCI$ est un parallélogramme
3. a. Démontrer que : $IB = MC$
   b. Démontrer que $IMCB$ est un parallélogramme en utilisant la propriété suivante :

> **Si** un quadrilatère a deux de ses côtés opposés parallèles et de même longueur **Alors** c'est un parallélogramme

4. a. En déduire que $(IM)/\!/(BC)$? Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC)?
   b. Recopier et compléter la phrase suivante :

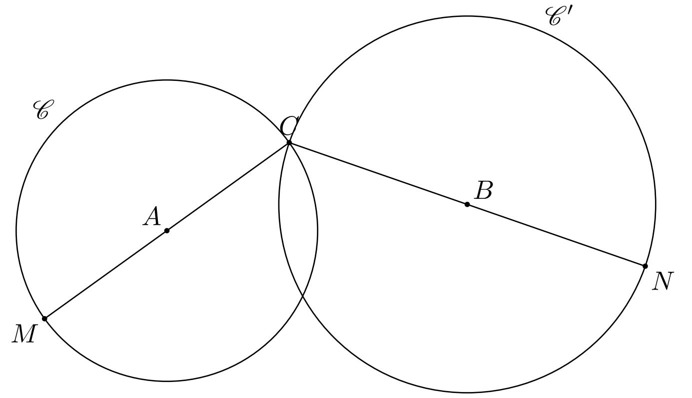
> Dans un triangle quelconque, **Si** une droite passe par les ....de deux des côtés **Alors**, elle est ....au ....

5. a. Prouver que $IM = BC$. Que peut-on dire des longueurs IJ et BC?
   b. Recopier et compléter la phrase suivante :

Dans un triangle quelconque, **Si** un segment a pour extrémités les ....de deux des côtés du triangle **alors** sa longueur est ....celle du troisième côté.

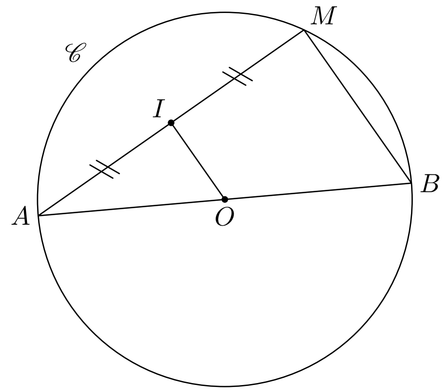
E.4 On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif A et B s'interceptant : C est l'un de ces points d'intersection. M et N sont deux points tels que $[CM]$ et $[CN]$ forment deux diamètres respectivement de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.



E.5 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[AB]$. Soit M un point du cercle distinct de A et de B. On note I le milieu de $[AM]$.

Montrer que les droites (IO) et (BM) sont parallèles.



E.6 Soit ABC un triangle. On note I le milieu du segment $[AB]$, J milieu de $[BC]$ et K milieu de $[AC]$.

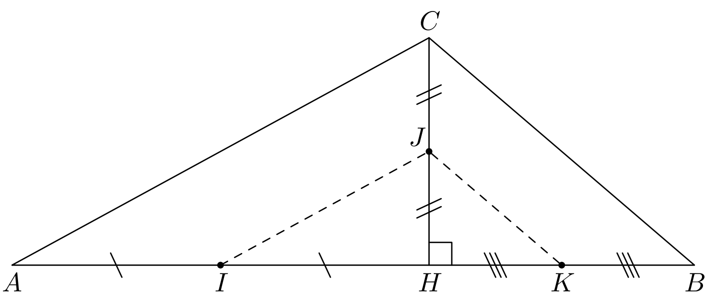
1. Déterminer la nature du quadrilatère $AIJK$.
2. Supposons dans cette question que le triangle ABC est rectangle en A. Déterminer la nature de $AIJK$.

3. *Théorème des milieux : longueurs*

E.7 Soit A, B, C trois points du plan tels que :
$AB = 6\,cm \quad ; \quad BC = 3\,cm$

1. Compléter correctement les phrases suivantes :
   a. La longueur AB est ....de la longueur BC.
   b. La longueur BC est ....de la longueur AB.
2. Compléter en choisissant correctement le facteur manquant :
   a. $AB = \ldots\ldots \times BC$
   b. $BC = \ldots\ldots \times AB$

E.8 On considère un triangle ABC quelconque. On note H le pied de sa hauteur issue du point C. On note I, J, K respectivement les milieux des segments $[AH]$, $[CH]$ et $[BH]$.



Démontrer que le triangle IJK est une réduction de facteur de $\dfrac{1}{2}$ du triangle ABC.

E.9 Soit un parallélogramme $ABCD$. Soit O le milieu de $[BD]$, I le milieu de $[AD]$, J le milieu de $[BC]$.

1. Démontrer que (OI) est parallèle à (AB).
2. Démontrer que (OJ) est parallèle à (AB).
3. Démontrer que O, I, J sont alignés.

Question facultative :

4. Que représente O pour le segment $[IJ]$?

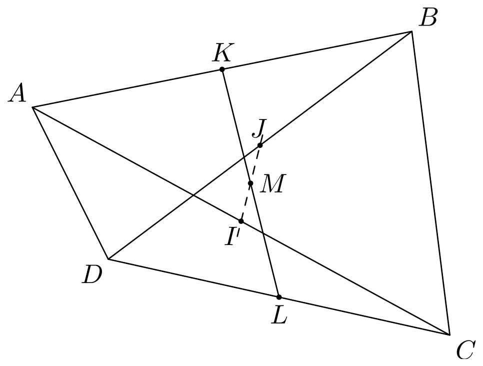
E.10 Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On note I, J, K, L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Effectuer le tracé de cette configuration.
2. a. Démontrer que : $(IJ) /\!/ (LK)$
   b. Démontrer que : $IJ = LK$.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Supposons que le quadrilatère $ABCD$ soit un losange.

3. Montrer que $IJKL$ est un rectangle.

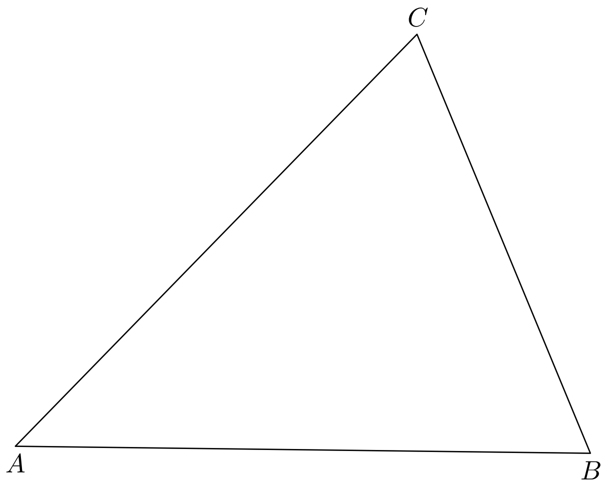
E.11 Dans le plan, on considère le quadrilatère $ABCD$; Les points I, J, K, L, M sont les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BD]$, $[AB]$, $[CD]$, $[KL]$:



1. Montrer que les droites (KJ) et (AD) sont parallèles.
2. Démontrer que le quadrilatère $ILJK$ est un parallélogramme.
3. Justifier que les points I, J, M sont alignés.

4. *Réciproque du théorème des milieux*

E.12 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



1. Réaliser le programme de tracé suivant :
   a. Placer le point I milieu du segment $[BC]$.
   b. Tracer le segment $[AI]$ et y placer le point J milieu du segment $[AI]$.
   c. La droite (BJ) intercepte la droite (AC) au point K.
   d. La droite parallèle à la droite (BK) passant par le point I intercepte la droite (AC) au point L
2. Démontrer que le point L est le milieu du segment $[KC]$.
3. Démontrer que le point K est le milieu du segment $[AL]$.
4. Justifier que le segment $[AC]$ est partagé en trois parts égales.

E.13

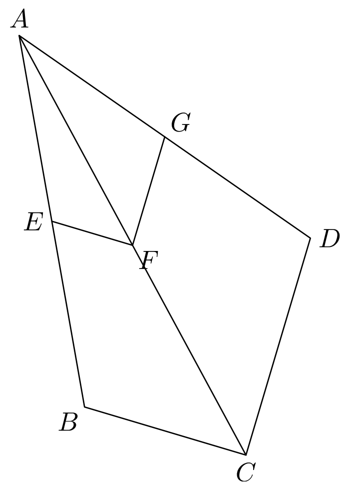
On considère les deux triangles ABC et ACD.

E est le milieu de $[AB]$.

On trace la parallèle à (BC) passant par E, elle coupe $[AC]$ en F.

On trace la parallèle à (CD) passant par F, elle coupe $[AD]$ en G.

Montrer que les droites (EG) et (BD) sont parallèles.



E.14 Soit un triangle ABC rectangle en A. La médiatrice de $[AB]$ coupe $[AB]$ en M et $[BC]$ en O.

1. Démontrer que (OM) est parallèle à (AC).
2. Démontrer que O est le milieu de $[BC]$.
3. Démontrer que $OA = OB = OC$. En déduire que le cercle passant par A, B, C a pour centre O.
4. Compléter la phrase suivante :

Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est ....

E.15 Tracer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que :

$AB = 10\,cm$.

Tracer une corde $[AC]$ telle que : $AC = 6\,cm$.

Placer le point M diamétralement opposé à C.

1. Démontrer que le quadrilatère $AMBC$ est un rectangle.
2. Quelle est la longueur du segment $[MB]$? Justifier.
3. a. Placer le point I milieu du segment $[BC]$ et tracer la droite (IO).
   b. Démontrer que la droite (IO) est la médiatrice du segment $[BC]$.
4. On note N le point d'intersection des droites (IO) et (AM).
   Justifier que le point M est l'image du point A par la symétrie d'axe (IO).

E.16 On considère :

- ABC un triangle quelconque ;
- I le milieu $[AB]$;
- la droite (d) telle que $I \in (d)$ et $(d) /\!/ (BC)$;
- J le point d'intersection des droites (d) et (AC).

1. Effectuer le tracé d'une figure représentant cette situation.
2. On note K le milieu du segment $[BC]$.
   Démontrer que : $(AC) /\!/ (IK)$.
3. Démontrer que $IJCK$ est un parallélogramme.
4. Démontrer que : $IK = JC$
5. Démontrer que : $IK = \dfrac{1}{2} \times AC$.
6. En déduire que le point J est le milieu de $[AC]$.
7. Recopier et compléter la phrase suivante :

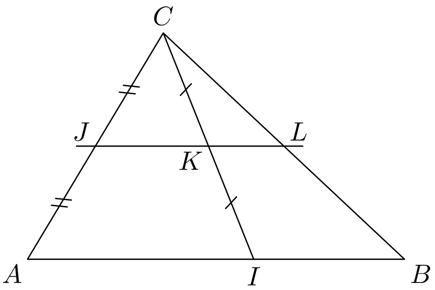
Si une droite passe par le . . . . d'un côté d'un triangle et est . . . . à un deuxième côté **alors** cette droite passe par le . . . . du troisième côté.

5. *Théorème et réciproque*

E.17 Soit ABC un triangle et I un point du segment $[AB]$.

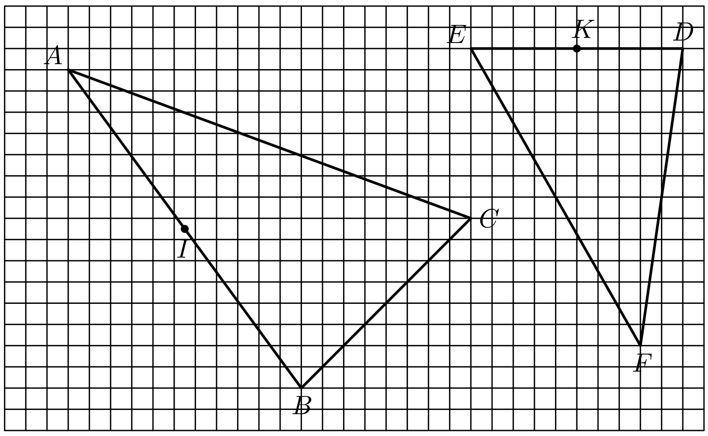
On note J milieu de $[AC]$ et K milieu de $[CI]$.

La droite (JK) vient intercepter le segment $[BC]$ en L.



1. Montrer que les droites (JK) et (AB) sont parallèles entre elles.
2. Montrer que L est le milieu de $[BC]$.

E.18 Dans le quadrillage ci-dessous, on considère les deux triangles ABC et DEF :



Pour les questions suivantes, seule la règle non-graduée est autorisée ; les tracés doivent être suivis de justification.

1. Placer le milieu J du segment $[AC]$.
2. Tracer la droite parallèle à la droite (EF) et passant par le point K.

E.19 Dans le plan, on considère un triangle ABC dont les dimensions sont :

$AB = 6\,cm$; $AC = 9\,cm$; $\widehat{BAC} = 60^o$

On note I et J les deux points de la demi-droite $[AB)$ vérifiant les mesures :

$AI = 2\,cm$; $AJ = 4\,cm$

On note K et L les deux points de la demi-droite $[AC)$ vérifiant les mesures :

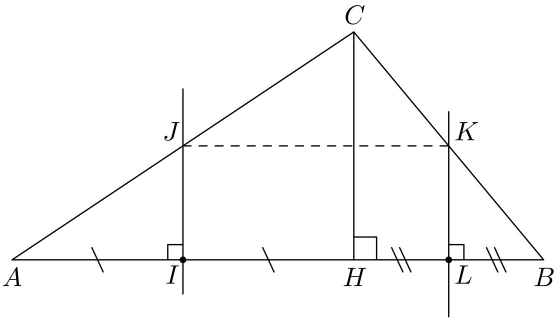
$AK = 3\,cm$; $AL = 6\,cm$

On note M le point d'intersection des droites (JL) et (BK).

1. Effectuer le tracé de cette configuration.
2. Montrer que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.
3. Justifier que le point M est le milieu du segment $[BK]$.
4. Montrer que la droite (JL) est parallèle à la droite (BC).
5. En déduire que (IK) est parallèle à (BC).

E.20 Dans un triangle ABC quelconque, on note H le pied de la hauteur issue du sommet C. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AH]$ et $[HB]$.

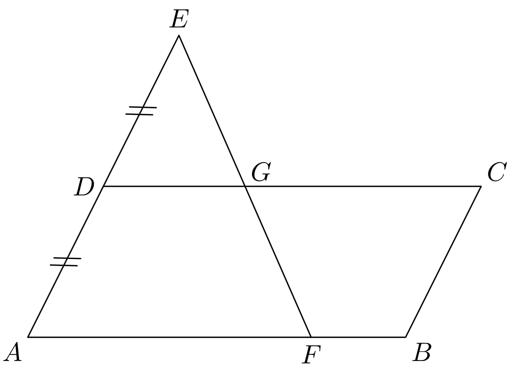
- La droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point I intercepte la droite (AC) au point J ;
- la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point L intercepte la droite (BC) au point K.



1. Montrer que $(IJ)/\!/(CH)$ et $(KL)/\!/(CH)$.
2. a. Démontrer que J est le milieu du segment $[AC]$.
   b. Démontrer que K est le milieu de $[BC]$.
3. Montrer que les droites (JK) et (AB) sont parallèles.
4. Établir l'égalité de longueurs : $JK = \dfrac{1}{2} \times AB$
5. Démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle.

E.21 On considère le parallélogramme $ABCD$ et le point E tel que D soit le milieu de $[AE]$.

Soit F un point du segment $[AB]$ tel que : $AF = \dfrac{3}{4} \times AB$.
La droite (EF) intercepte le segment $[DC]$ en G.



1. Montrer que G est le milieu de $[EF]$.
2. Sachant que $DC = 5\,cm$, en déduire la mesure du segment $[DG]$

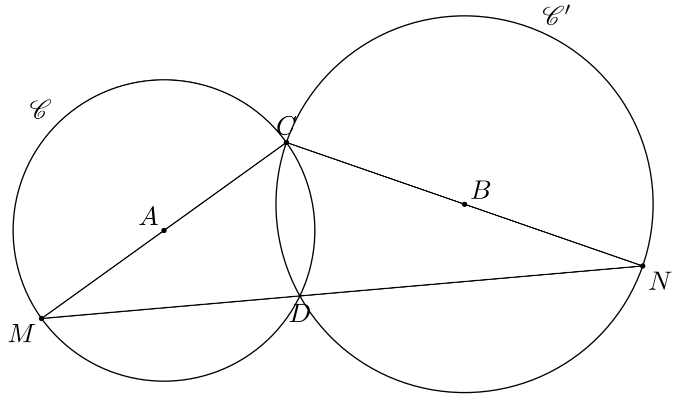
E.22 On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif A et B s'interceptant aux points C et D.

M et N sont deux points tels que $[CM]$ et $[CN]$ forment deux diamètres respectivement de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

1. Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

On note I le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

2. Montrer que le point I est le milieu du segment $[CD]$.
3. Montrer que les droites (AI) et (MD) sont parallèles.
4. Montrer que les droites (IB) et (DN) sont parallèles.
5. En déduire que les points M, D et N sont alignés.
   (on se servira de la propriété : si deux droites sont parallèles et ont un point commun alors ces deux droites sont confondues)



E.23 On considère un triangle ABC où on note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
On note :

- O le point d'intersection des droites (BJ) et (CI).
- P le point d'intersection de la droite (BO) et de la droite passant par le point I parallèle à (OA).
- Q le point d'intersection de la droite (CO) et de la droite passant par J et parallèle à (OA).

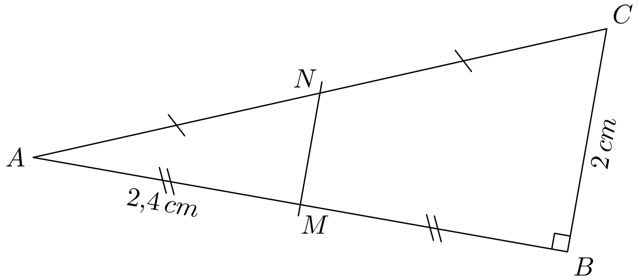
Démontrer que :

1. Effectuer le tracé de cette configuration.
2. a. Démontrer que le point P est le milieu du segment $[BO]$.
   b. Démontrer que la droite (PQ) est parallèle à (BC).
   c. En déduire que les droites (IJ) et (PQ) sont parallèles entre elles.
   d. Démontrer $IJQP$ est un parallélogramme.

6. Théorème des milieux et du théorème de Pythagore

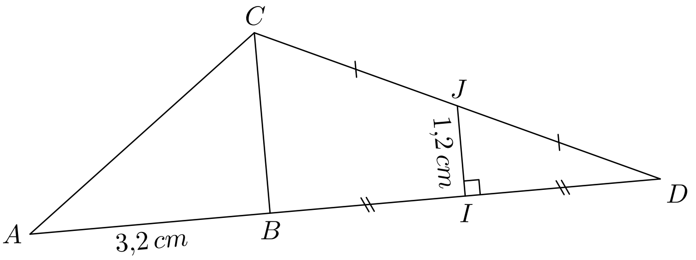
E.24 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous où le point M est le milieu du segment $[AB]$ et le point N est le milieu du segment $[AC]$. On a les deux mesures suivantes :

$AM = 2{,}4\,cm$; $BC = 2\,cm$



1. a) Établir que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
   b) Déterminer la mesure du segment $[MN]$.
   c) Justifier que le triangle AMN est rectangle en M.
2. Déterminer la mesure du segment $[AN]$.

E.25 On considère la configuration ci-dessous :



où les points B et I appartiennent au segment $[AD]$, I et J sont les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[DB]$, les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

Compléter les chaînons déductifs suivants :

Je sais	I est le milieu de $[DC]$ et J est le milieu de $[DB]$.
J'utilise	
J'en déduis	$(IJ)/\!/(BC)$

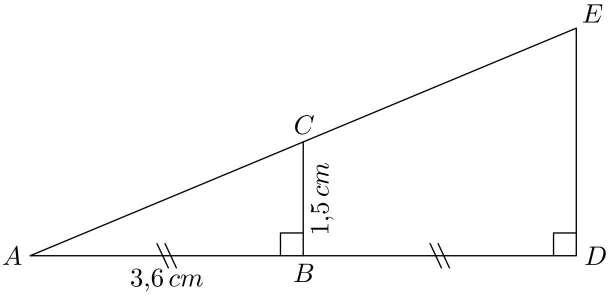
Je sais	
J'utilise	Si deux droites sont parallèles entre elles et si l'une est perpendiculaire à une troisième alors elle est perpendiculaire à l'autre.
J'en déduis	

Je sais	
J'utilise	
J'en déduis	$BC = 2\times JI = 2\times 1{,}2 = 2{,}4\,cm$

Je sais	Le triangle ABC est rectangle en B
J'utilise	Si un triangle est rectangle alors il vérifie l'égalité de Pythagore.
J'en déduis	

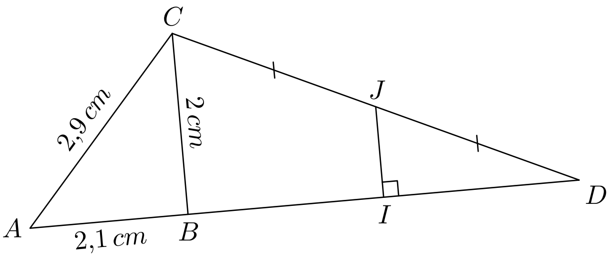
7. Réciproque du théorème des milieux et du théorème de Pythagore

E.26 On considère le triangle ADE est rectangle en D où B est le milieu du segment $[AD]$. La droite perpendiculaire à (AD) et passant par le point B intercepte en C la droite (AE) :



1. Démontrer que $ED = 3\,cm$.
2. Déterminer la longueur du segment $[AE]$.
3. a) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.
   b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle ADE.
   c) Donner la valeur du quotient $\dfrac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$.

E.27 On considère la configuration ci-dessous :



où les points B et I appartiennent au segment $[AD]$, J est le milieu du segment $[DC]$, les droites (IJ) et (AD) sont perpendiculaires.

1. Compléter les chaînons déductifs suivants :

Je sais	
J'utilise	
J'en déduis	Le triangle ABC est rectangle en B.

Je sais	
J'utilise	Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles.
J'en déduis	

Je sais	
J'utilise	
J'en déduis	I est le milieu du segment $[BI]$

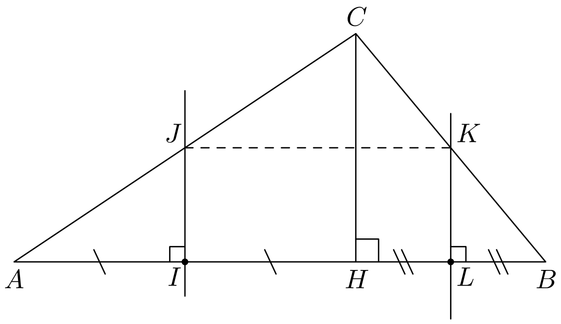
2. Écrire un chaînon déductif permettant de déterminer la mesure du segment $[IJ]$.

$1^2=1$	$1{,}1^2=1{,}21$	$1{,}2^2=1{,}44$	$1{,}3^2=1{,}69$	$1{,}4^2=1{,}96$
$1{,}5^2=2{,}25$	$1{,}6^2=2{,}56$	$1{,}7^2=2{,}89$	$1{,}8^2=3{,}24$	$1{,}9^2=3{,}61$
$2^2=4$	$2{,}1^2=4{,}41$	$2{,}2^2=4{,}84$	$2{,}3^2=5{,}29$	$2{,}4^2=5{,}76$
$2{,}5^2=6{,}25$	$2{,}6^2=6{,}76$	$2{,}7^2=7{,}29$	$2{,}8^2=7{,}84$	$2{,}9^2=8{,}41$
$3^2=9$	$3{,}1^2=9{,}61$	$3{,}2^2=10{,}24$	$3{,}3^2=10{,}89$	$3{,}4^2=11{,}56$
$3{,}5^2=12{,}25$	$3{,}6^2=12{,}96$	$3{,}7^2=13{,}69$	$3{,}8^2=14{,}44$	$3{,}9^2=15{,}21$

8. *Exercices sans indications*

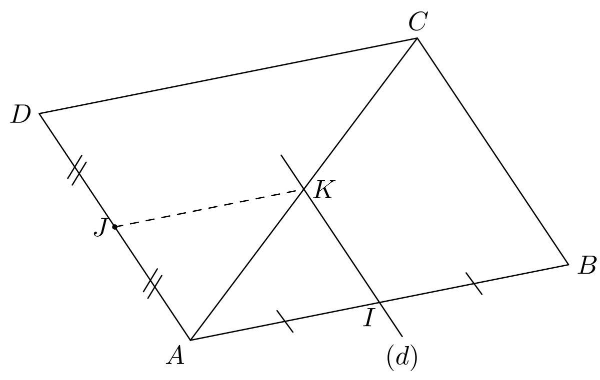
E.28 Dans un triangle ABC quelconque, on note H le pied de la hauteur issue du sommet C. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AH]$ et $[HB]$.

- La droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point I intercepte la droite (AC) au point J ;
- la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point L intercepte la droite (BC) au point K.



Démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle.

E.29 Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$.
La droite (d) est la droite passant par le point I et parallèle à la droite (AD) ; on note K le point d'intersection des droites (d) et (AC).



Démontrer que le quadrilatère $AJKI$ est un parallélogramme.

E.30 On considère un trapèze $ABCD$ tel que $(AB)/\!/(CD)$.

On note :

- I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AC]$.
- K le point d'intersection des droites (DB) et (IJ).
- L le point d'intersection des droites (BC) et (IJ).

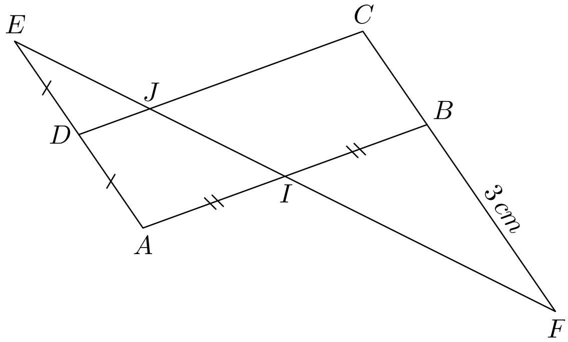
1. Réaliser cette figure.
2. Montrer que : $IK=JL$

E.31 On considère un trapèze $ABCD$ tel que $(AB)/\!/(CD)$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$.

1. Réaliser cette figure.
2. Montrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (AB).

9. *Exercices non-classés*

E.32 On considère le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous où $AB = 4\,cm$ et I est le milieu de $[AB]$.



On place le point E de sorte que le point D soit le milieu du segment $[AE]$. Le point J est le point d'intersection des droites (EI) et (CD). Le point F est le point d'intersection des droites (BC) et (EI).

1. Déterminer la mesure du segment $[DJ]$.
2. a. Déterminer la valeur du quotient $\dfrac{IB}{CJ}$.

   b. En déduire la mesure du segment $[BC]$.

E.33 Dans le plan, on considère un triangle ABC dont les dimensions sont :

$AB = 6\,cm$; $AC = 9\,cm$; $\widehat{ABC} = 60^o$

On note I et J les deux points de la demi-droite $[AB)$ vérifiant les mesures :

$AI = 2\,cm$; $AJ = 4\,cm$

On note K et L les deux points de la demi-droite $[AC)$ vérifiant les mesures :

$AK = 3\,cm$; $AL = 6\,cm$

On note M le point d'intersection des droites (JL) et (BK).

1. Réaliser le dessin de cette configuration.
2. Montrer que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.
3. Justifier que le point M est le milieu du segment $[BK]$.
4. Montrer que la droite (JL) est parallèle à la droite (BC).
5. En déduire que (IK) est parallèle à (BC).