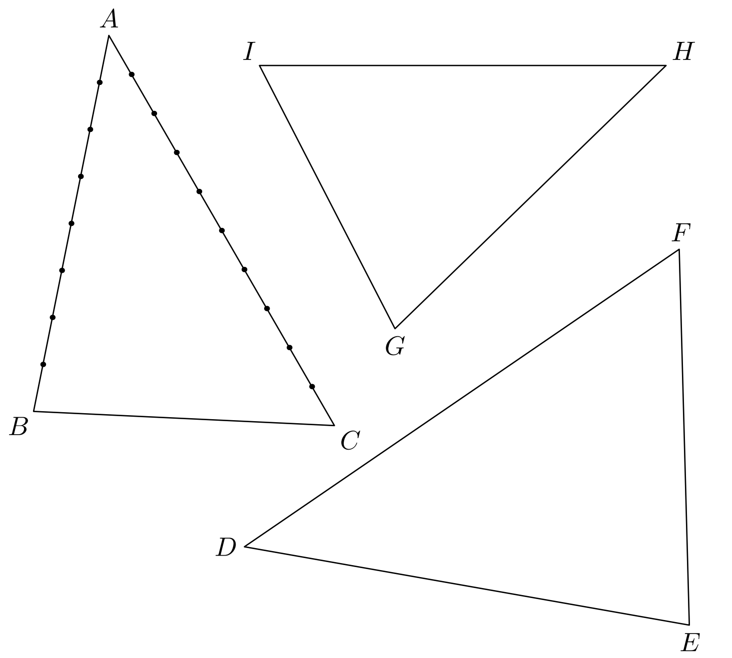
# Hors programme collège / Théorème des milieux

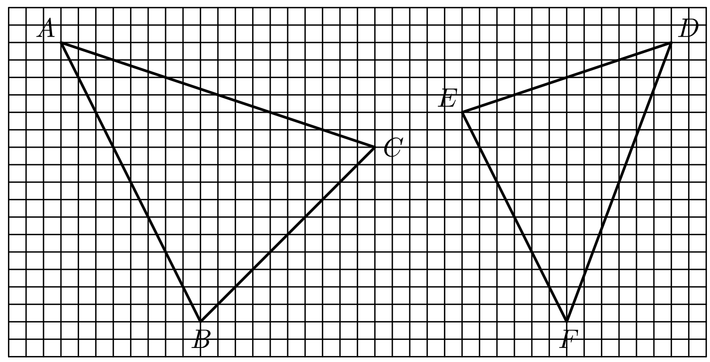
## 1. Activité d'introduction

**E.1** On considère les trois triangles $ABC$, $DEF$ et $GHI$ représentés ci-dessous :




1. Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle $ABC$ ont été partagés en part égales.
   a. Placer le point $J$ milieu du segment $[AB]$ et $K$ milieu du segment $[AC]$.
   b. Qu'observe-t-on à propos des droites $(BC)$ et $(JK)$? À propos des longueurs $JK$ et $BC$?
2. a. À l'aide de la règle gradué, placer les points $L$ et $M$ milieux respectifs des segments $[DE]$ et $[DF]$.
   b. Qu'observe-t-on à propos des droites $(EF)$ et $(LM)$? À propos des longueurs $EF$ et $LM$?
3. En traçant les médiatrices des segments $[GH]$ et $[GI]$, quelles observations peut-on faire sur la droite reliant les milieux de deux des côtés du triangle $GHI$ et du troisième côté.

**E.2** Dans le plan quadrillé, on considère les triangles $ABC$ et $EDF$ représentés ci-dessous :




On se servira du quadrillage pour placer les nouveaux points de la figure et pour construire les droites parallèles.

1. a. Placer le point $I$ milieu du segment $[AB]$.
   b. Tracer la droite $(d)$ passant par le point $I$ et parallèle à la droite $(BC)$. Nommer $J$ le point d'intersection des droites $(d)$ et $(AC)$.
   c. Vérifier que le point $J$ est le milieu des segments $[AC]$.
   d. À l'aide du compas, vérifier que le segment $[IJ]$ mesure la moitié du segment $[BC]$.
2. a. Placer le point $K$ milieu du segment $[DE]$.
   b. Tracer la droite $(\Delta)$ passant par le point $K$ et parallèle à la droite $(EF)$. Nommer $L$ le point d'intersection des droites $[DF]$ et $(\Delta)$.
   c. Vérifier que le point $L$ est le milieu des segments $[DF]$.
   d. À l'aide du compas, vérifier que l'égalité suivante : $EF = 2\times KL$

## 2. Théorème des milieux : parallélisme

**E.3** Soit $ABC$ un triangle quelconque. Soient $I$ le milieu de $[AB]$ et $J$ le milieu de $[AC]$

1. Effectuer le tracé d'une figure représentant cette situation.
2. Placer le point $M$ symétrique du point $I$ par rapport au point $J$. Démontrer que le quadrilatère $AMCI$ est un parallélogramme
3. a. Démontrer que : $IB = MC$
   b. Démontrer que $IMCB$ est un parallélogramme en utilisant la propriété suivante :

> **Si** un quadrilatère a deux de ses côtés opposés parallèles et de même longueur **Alors** c'est un parallélogramme

4. a. En déduire que $(IM)/\!/(BC)$? Que peut-on dire des droites $(IJ)$ et $(BC)$?
   b. Recopier et compléter la phrase suivante :

> Dans un triangle quelconque, **Si** une droite passe par les ............ de deux des côtés **Alors** elle est ............ au ............

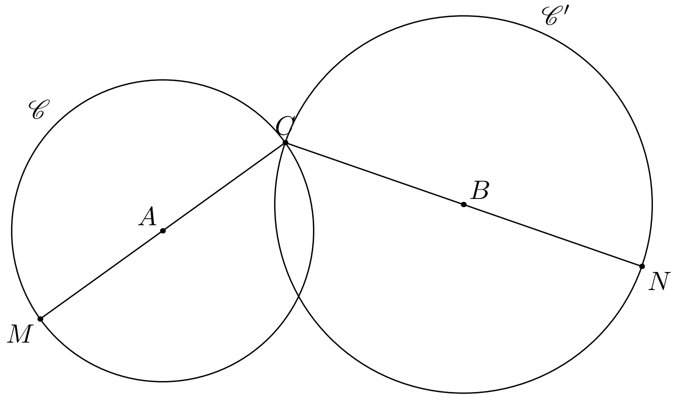
5. a. Prouver que $IM = BC$. Que peut-on dire des longueurs $IJ$ et $BC$?
   b. Recopier et compléter la phrase suivante :

Dans un triangle quelconque, **Si** un segment a pour extrémités les ............ de deux des côtés du triangle **alors** sa longueur est ............ celle du troisième côté.

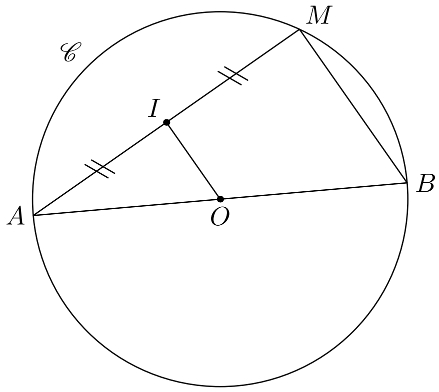
E.4 On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif $A$ et $B$ s'interceptant : $C$ est l'un de ces points d'intersection.
$M$ et $N$ sont deux points tels que $[CM]$ et $[CN]$ forment deux diamètres respectivement de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Montrer que les droites $(AB)$ et $(MN)$ sont parallèles.




E.5 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$ et de diamètre $[AB]$. Soit $M$ un point du cercle distinct de $A$ et de $B$.
On note $I$ le milieu de $[AM]$.

Montrer que les droites $(IO)$ et $(BM)$ sont parallèles.




E.6 Soit $ABC$ un triangle. On note $I$ le milieu du segment $[AB]$, $J$ milieu de $[BC]$ et $K$ milieu de $[AC]$.

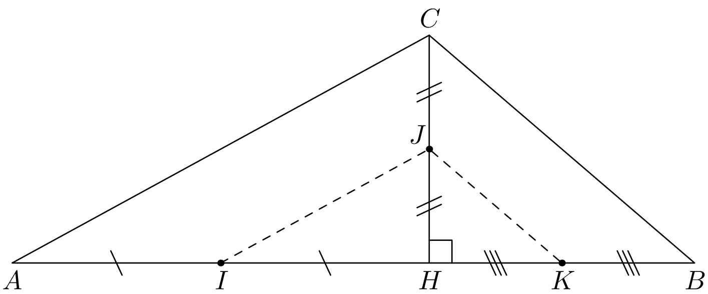
1. Déterminer la nature du quadrilatère $AIJK$.
2. Supposons dans cette question que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$. Déterminer la nature de $AIJK$.

## 3. *Théorème des milieux : longueurs*

E.7 Soit $A$, $B$, $C$ trois points du plan tels que :
$AB = 6\,cm \quad ; \quad BC = 3\,cm$

1. Compléter correctement les phrases suivantes :
   - a) La longueur $AB$ est ...................... de la longueur $BC$.
   - b) La longueur $BC$ est ...................... de la longueur $AB$.
2. Compléter en choisissant correctement le facteur manquant :
   - a) $AB = \ldots\ldots \times BC$
   - b) $BC = \ldots\ldots \times AB$

E.8 On considère un triangle $ABC$ quelconque. On note $H$ le pied de sa hauteur issue du point $C$. On note $I$, $J$, $K$ respectivement les milieux des segments $[AH]$, $[CH]$ et $[BH]$.




Démontrer que le triangle $IJK$ est une réduction de facteur de $\frac{1}{2}$ du triangle $ABC$.

E.9 Soit un parallélogramme $ABCD$. Soit $O$ le milieu de $[BD]$, $I$ le milieu de $[AD]$, $J$ le milieu de $[BC]$.

1. Démontrer que $(OI)$ est parallèle à $(AB)$.
2. Démontrer que $(OJ)$ est parallèle à $(AB)$.
3. Démontrer que $O$, $I$, $J$ sont alignés.

*Question facultative :*

4. Que représente $O$ pour le segment $[IJ]$ ?

## 4. *Réciproque du théorème des milieux*

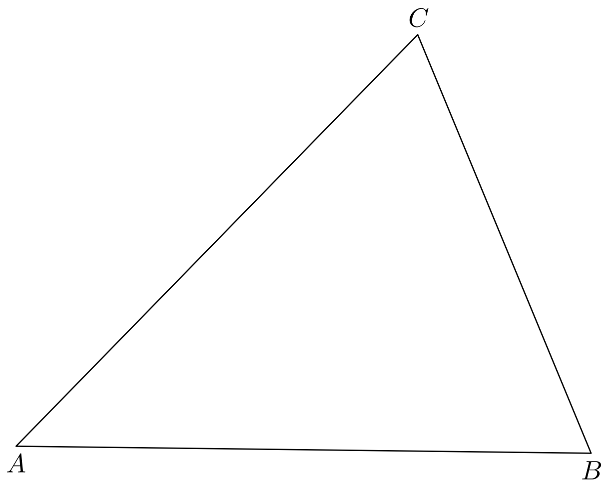
E.10 On considère :

- $ABC$ un triangle quelconque ;
- $I$ le milieu $[AB]$ ;
- la droite $(d)$ telle que $I\in(d)$ et $(d)/\!/(BC)$ ;
- $J$ le point d'intersection des droites $(d)$ et $(AC)$.

1. Effectuer le tracé d'une figure représentant cette situation.
2. On note $K$ le milieu du segment $[BC]$.
Démontrer que : $(AC)/\!/(IK)$.
3. Démontrer que $IJCK$ est un parallélogramme.
4. Démontrer que : $IK=JC$
5. Démontrer que : $IK=\dfrac{1}{2}\times AC$.
6. En déduire que le point $J$ est le milieu de $[AC]$.
7. Recopier et compléter la phrase suivante :

**Si** une droite passe par le ............... d'un côté d'un triangle et est ............... à un deuxième côté **alors** cette droite passe par le ............... du troisième côté

E.11 On considère le triangle $ABC$ représenté ci-dessous :




1. Réaliser le programme de tracé suivant :
   a. Placer le point $I$ milieu du segment $[BC]$.
   b. Tracer le segment $[AI]$ et y placer le point $J$ milieu du segment $[AI]$.
   c. La droite $(BJ)$ intercepte la droite $(AC)$ au point $K$.
   d. La droite parallèle à la droite $(BK)$ passant par le point $I$ intercepte la droite $(AC)$ au point $L$
2. Démontrer que le point $L$ est le milieu du segment $[KC]$.
3. Démontrer que le point $K$ est le milieu du segment $[AL]$.
4. Justifier que le segment $[AC]$ est partagé en trois parts égales.

E.12

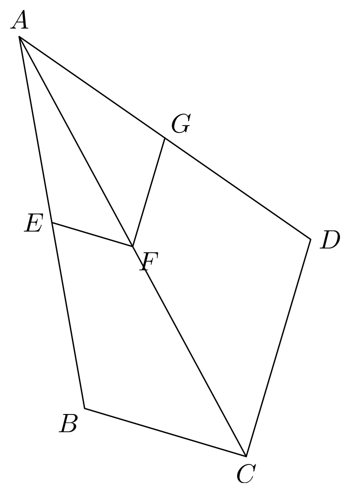
On considère les deux triangles $ABC$ et $ACD$.

$E$ est le milieu de $[AB]$.

On trace la parallèle à $(BC)$ passant par $E$, elle coupe $[AC]$ en $F$.

On trace la parallèle à $(CD)$ passant par $F$, elle coupe $[AD]$ en $G$.

Montrer que les droites $(EG)$ et $(BD)$ sont parallèles.



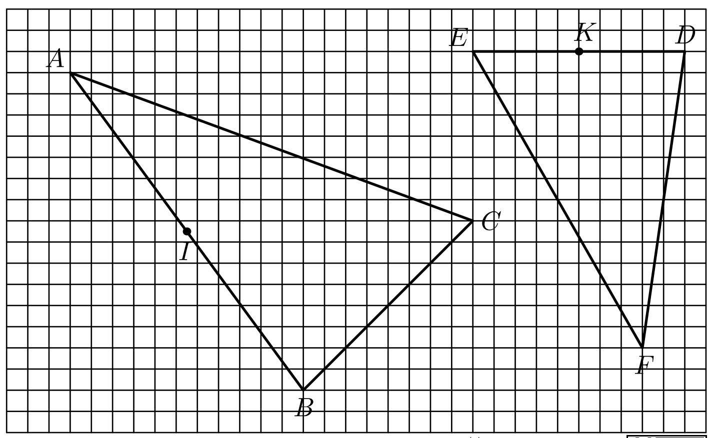

E.13 Soit un triangle $ABC$ rectangle en $A$. La médiatrice de $[AB]$ coupe $[AB]$ en $M$ et $[BC]$ en $O$.

1. Démontrer que $(OM)$ est parallèle à $(AC)$.
2. Démontrer que $O$ est le milieu de $[BC]$.
3. Démontrer que $OA=OB=OC$. En déduire que le cercle passant par $A$, $B$, $C$ a pour centre $O$.
4. Compléter la phrase suivante :

Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est ...............

## 5. *Théorème et réciproque*

E.14 Dans le quadrillage ci-dessous, on considère les deux triangles $ABC$ et $DEF$ :



Pour les questions suivantes, seule la règle non-graduée est autorisée ; les tracés doivent être suivis de justification.

1. Placer le milieu $J$ du segment $[AC]$.
2. Tracer la droite parallèle à la droite $(EF)$ et passant par le point $K$.

**E.15** Dans le plan, on considère un triangle $ABC$ dont les dimensions sont :

$AB = 6\,cm$ ; $AC = 9\,cm$ ; $\widehat{BAC} = 60^o$

On note $I$ et $J$ les deux points de la demi-droite $[AB)$ vérifiant les mesures :

$AI = 2\,cm$ ; $AJ = 4\,cm$

On note $K$ et $L$ les deux points de la demi-droite $[AC)$ vérifiant les mesures :

$AK = 3\,cm$ ; $AL = 6\,cm$

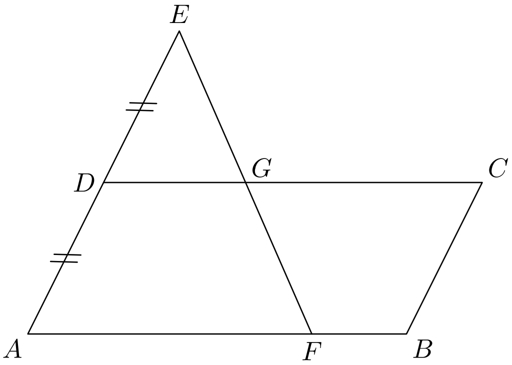
On note $M$ le point d'intersection des droites $(JL)$ et $(BK)$.

1. Effectuer le tracé de cette configuration.
2. Montrer que les droites $(IK)$ et $(JL)$ sont parallèles.
3. Justifier que le point $M$ est le milieu du segment $[BK]$.
4. Montrer que la droite $(JL)$ est parallèle à la droite $(BC)$.
5. En déduire que $(IK)$ est parallèle à $(BC)$.

**E.16** On considère le parallélogramme $ABCD$ et le point $E$ tel que $D$ soit le milieu de $[AE]$.

Soit $F$ un point du segment $[AB]$ tel que : $AF = \dfrac{3}{4} \times AB$.

La droite $(EF)$ intercepte le segment $[DC]$ en $G$.




1. Montrer que $G$ est le milieu de $[EF]$.
2. Sachant que $DC = 5\,cm$, en déduire la mesure du segment $[DG]$

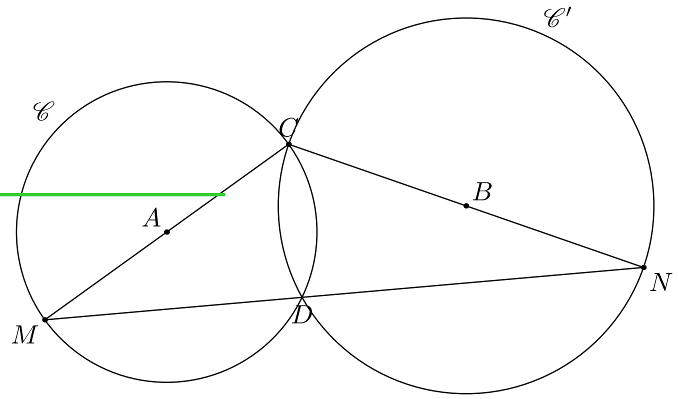
**E.17** On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif $A$ et $B$ s'interceptant aux points $C$ et $D$.

$M$ et $N$ sont deux points tels que $[CM]$ et $[CN]$ forment deux diamètres respectivement de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

1. Montrer que les droites $(AB)$ et $(MN)$ sont parallèles.

On note $I$ le point d'intersection des droites $(AB)$ et $(CD)$

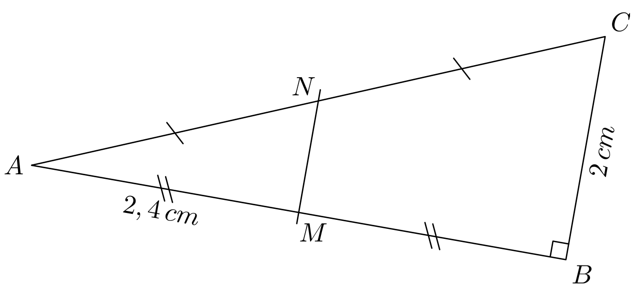
2. Montrer que le point $I$ est le milieu du segment $[CD]$.
3. Montrer que les droites $(AI)$ et $(MD)$ sont parallèles.
4. Montrer que les droites $(IB)$ et $(DN)$ sont parallèles.
5. En déduire que les points $M$, $D$ et $N$ sont alignés.
*(on se servira de la propriété : si deux droites sont parallèles et ont un point commun alors ces deux droites sont confondus)*




## 6. *Théorème des milieux et du théorème de Pythagore*

**E.18** On considère le triangle $ABC$ représenté ci-dessous où le point $M$ est le milieu du segment $[AB]$ et le point $N$ est le milieu du segment $[AC]$. On a les deux mesures suivantes :

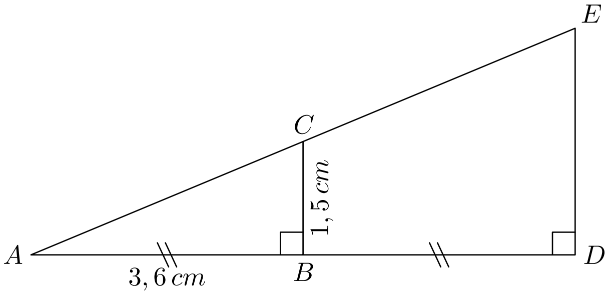
$AM = 2{,}4\,cm$ ; $BC = 2\,cm$




1. a. Établir que les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont parallèles.
   b. Déterminer la mesure du segment $[MN]$.
   c. Justifier que le triangle $AMN$ est rectangle en $M$.
2. Déterminer la mesure du segment $[AN]$.

## 7. Réciproque du théorème des milieux et du théorème de Pythagore

E.19 On considère le triangle $ADE$ est rectangle en $D$ où $B$ est le milieu du segment $[AD]$. La droite perpendiculaire à $(AD)$ et passant par le point $B$ intercepte en $C$ la droite $(AE)$ :




1. Démontrer que $ED = 3\,cm$.
2. Déterminer la longueur du segment $[AE]$.
3. a. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $ABC$.
   b. Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle $ADE$.
   c. Donner la valeur du quotient $\dfrac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$.

## 8. Exercices sans indications

E.20 On considère un trapèze $ABCD$ tel que $(AB)/\!/(CD)$. Les points $I$, $J$ et $K$ sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$.

1. Réaliser cette figure.
2. Montrer que la droite $(IK)$ est parallèle à la droite $(AB)$.

## 9. Exercices non-classés

E.21 Dans le plan, on considère un triangle $ABC$ dont les dimensions sont :

$AB = 6\,cm \quad ; \quad AC = 9\,cm \quad ; \quad \widehat{ABC} = 60^o$

On note $I$ et $J$ les deux points de la demi-droite $[AB)$ vérifiant les mesures :

$AI = 2\,cm \quad ; \quad AJ = 4\,cm$

On note $K$ et $L$ les deux points de la demi-droite $[AC)$ vérifiant les mesures :

$AK = 3\,cm \quad ; \quad AL = 6\,cm$

On note $M$ le point d'intersection des droites $(JL)$ et $(BK)$.

1. Réaliser le dessin de cette configuration.
2. Montrer que les droites $(IK)$ et $(JL)$ sont parallèles.
3. Justifier que le point $M$ est le milieu du segment $[BK]$.
4. Montrer que la droite $(JL)$ est parallèle à la droite $(BC)$.
5. En déduire que $(IK)$ est parallèle à $(BC)$.