

Hors programme lycée / Algèbre: second degré se ramenant au premier degré

1. Second degré: forme canonique

E.1 On va s'intéresser aux polynômes du second degré: des fonctions de la forme $x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ avec a , b et c sont des nombres réels fixés. On admet la proposition suivante:

Toute fonction polynomiale du second degré peut s'écrire sous la forme: $\alpha \cdot (x + \beta)^2 + \gamma$
Cette forme s'appelle la **forme canonique**.

Première méthode

- 1 **a** Développer chacune des identités remarquables ci-dessous:

a $(2x + 1)^2$ **b** $(3 - 2x)^2$
c $(3x + 7)^2$ **d** $(-4x + 1)^2$

- b** En déduire la forme canonique de chacune de ces polynômes du second degré:

a $9x^2 + 42x - 5$ **b** $4x^2 - 12x + 16$
c $4x^2 + 4x - 8$ **d** $16x^2 - 8x + 7$

- 2 En reportant cette méthode, en déduire la forme réduite de $25x^2 + 20x + 7$.

Seconde méthode

On s'intéresse à l'égalité:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = \alpha \cdot (x + \beta)^2 + \gamma$$

- 1 Montrer que les nombres α , β et γ doivent vérifier le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha = a \\ 2 \cdot \alpha \cdot \beta = b \\ \gamma + \alpha \cdot \beta^2 = c \end{cases}$$

On admettra que pour toute valeur du triplet $(a; b; c)$, le système précédent admet une unique solution.

- 2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les valeurs de α , β et γ :

$a: x \mapsto x^2 + 8x - 9$; $b: x \mapsto 2x^2 + 12x + 4$
 $c: x \mapsto 6x^2 + 6x + 7$; $d: x \mapsto -2x^2 + 3x - 4$

Question subsidiaire

- 1 Montrer que pour tout nombre a , b et c tel que $a \neq 0$, on a:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- 2 Que pouvez-vous dire de l'équation $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ si $b^2 - 4ac < 0$

- 3 On admet le fait que:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Donner les deux solutions de l'équation $2x^2 + 4x + 1 = 0$

- E.2** On s'intéresse aux équations de la forme:

$$(E): (x + \beta)^2 - \gamma = 0$$

- 1 **a** Factoriser: $(x + 2)^2 - 9$.
b Résoudre l'équation suivante: $(x + 2)^2 - 9 = 0$.

- 2 Pour chacune des équations suivantes, donner l'ensemble des solutions:

a $(x - 7)^2 - 3 = 0$ **b** $(x + 1)^2 + 2 = 0$
c $(x - 8)^2 = 0$

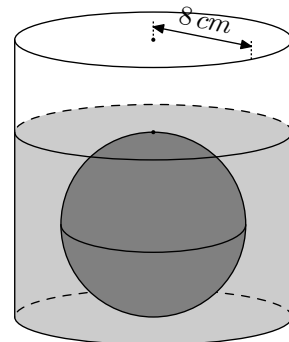
- 3 Quelle condition γ doit vérifier pour que:

- a** (E) admette deux solutions;
b (E) admette une unique solution;
c (E) n'admette aucune solution.

E.3

Dans un cylindre, dont la base a un rayon de 8 cm , on dépose une boule. On doit verser 104 cm^3 d'huile dans le cylindre pour juste recouvrir la boule.

Déterminer le rayon de la boule.



- E.4** Établir les égalités suivantes:

a $(x + 2)^2 - 4 = x^2 + 4x$
b $(x - 9)^2 + 11 = x^2 - 18x + 92$
d $(x + 3)^2 - 12 = x^2 + 6x - 3$
e $2(x + 1)^2 + 4 = 2x^2 + 4x + 6$

- E.5** Pour chacune des égalités suivantes, donner la valeur de α (sans justification), puis vérifier l'égalité proposée:

a $(x + 2)^2 - 5 = x^2 + \alpha \cdot x - 1$
b $(x - 3)^2 + 7 = x^2 - 6x + \alpha$
c $2(x + 1)^2 - 9 = \alpha \cdot x^2 + 4x - 7$
d $7(x - 2)^2 + 1 = 7x^2 + \alpha \cdot x + 29$
e $(x - 5)^2 + \alpha = x^2 - 10x + 10$
f $3(x + \alpha)^2 + 4 = 3x^2 + 48x + 196$

2. Expression algébriques

E.6 On considère l'expression algébrique suivante :

$$E = (x + 1)(2x - 1)$$

1 Relativement à la forme développée réduite de l'expression E , répondre aux questions suivantes :

- a Déterminer le coefficient du terme en x^2 .
- b Déterminer le terme numérique.

2 Justifier que l'expression E n'est égale à aucune des deux expressions suivantes :

$$F = 4x^2 + x - 1 \quad ; \quad G = 2(x + 1)^2 + 1$$

E.7 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = -6x^2 + 10x - 4$$

1 Établir les égalités suivantes :

$$f(x) = 2(x - 1)(2 - 3x) = -6\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}$$

2 Calculer l'image des nombres ci-dessous par la fonction

f

- a 0
- b $\frac{2}{3}$
- c $\frac{5}{6}$

E.8 Répondre aux questions suivantes sans aucune justification :

1 On considère le polynôme $P = 2 \cdot (2x - 1)(3 - x)(x + 2)$:

a Donner, sans justification, le coefficient du terme de degré 3 du polynôme P et la valeur de son terme numérique.

b Parmi les polynômes ci-dessous, lequel est la forme développée et réduite du polynôme P ?

• $-4x^3 + 6x^2 + 22x + 12$ • $4x^3 + 6x^2 + 22x - 12$

• $-4x^3 + 6x^2 + 22x - 12$ • $4x^3 + 6x^2 + 22x + 12$

2 Déterminer la valeur de a , un nombre réel, vérifiant l'égalité suivante :

$$(2x + 1)(3x^2 + a \cdot x + 1) = 6x^3 - 7x^2 - 3x + 1$$

3. Inéquations

E.9 Résoudre les inéquations suivantes :

- a $(2x + 1)(x + 2) < 0$
- b $(3 - x)(2x + 1) \geq 0$
- c $(5x + 1)(x - 2) > (3 + x)(x - 2)$
- d $(x + 3)(5 - x) \leq 2(x + 3)$

E.10 Résoudre les inéquations suivantes :

- a $(x + 2)(x - 3) > 0$
- b $(x + 2)(5 - 3x) + (x + 2)(x - 2) \geq 0$
- c $(2x + 1)(3x - 1) + (6x + 3)(3x - 1) \leq 0$
- d $(2 - 3x)(x - 5) + 2(10 - 2x) < 0$

E.11 Compléter le tableau de signes de chacune des expressions E :

1

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$			0	
$3 + x$		0		
$E = (2x + 1)(3 + x)$		0	0	

2

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$x - 2$				
$4x - 3$				
$E = (x - 2)(4x - 3)$				

3

x	$-\infty$	$+\infty$
$2 + x$		
$2 - x$		
$E = (2 + x)(2 - x)$		

E.12 Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $(3 - 2x)(3x + 1) > 0$
b) $(3x + 1)(x + 1) < (x + 1)(4x + 2)$

E.13 Soit (E) le polynôme du second degré : $(E) : x^2 + 4x - 12$

- 1) Déterminer la forme canonique de
a) Justifier que le polynôme (E) admet pour forme canon-

ique : $(x+2)^2 - 16$.

- b) Justifier que le polynôme (E) admet pour minimum -16 .
2) a) Dédurre de la question 1) a) la forme factorisée du polynôme (E) .
b) En déduire les deux racines du polynôme (E) .
3) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 4x - 12$

4. Forme canonique et extrémums

E.14 On considère l'expression $-2x^2 + 8x + 1$:

- 1) Établir l'égalité suivante :
 $-2x^2 + 8x + 1 = -2(x - 2)^2 + 9$
2) En déduire que cette expression atteint son maximum en $x = 2$. Quelle est sa valeur maximale ?

E.15

- 1) Déterminer la forme canonique de l'expression :
 $x^2 - 10x - 2$
2) Justifier que cette expression admet pour valeur minimale -27 et que cette valeur est atteinte en 5.

E.16 On considère le polynôme $x^2 - 6x + 12$:

- 1) Déterminer la forme canonique de ce polynôme.
2) Justifier que ce polynôme est strictement positif pour toute valeur de x .

E.17 On considère le polynôme $6x^2 - 4x + 2$.

- 1) Déterminer la forme canonique de ce polynôme.
2) Justifier que $\frac{4}{3}$ est la valeur minimale prise par ce polynôme sur $\mathbb{R}$.

E.18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + a \cdot x + b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

Déterminer les valeurs de a et de b afin que la fonction f atteigne sa valeur minimale 2 pour $x = 3$.

5. Forme canonique et sens de variations

E.19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^2 + 6x + 2$$

- 1) Justifier que la fonction f admet pour forme canonique :
 $f(x) = (x + 3)^2 - 7$
2) Établir la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty ; -3]$.

Rappels : on utilisera les deux propriétés suivantes :

- La fonction carrée étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on a :
 $a < b < 0 \implies a^2 > b^2$
ce qui se traduit par la phrase : "deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans l'ordre inverse."
- La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :
 $0 < a < b \implies a^2 < b^2$
ce qui se traduit par la phrase : "deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même ordre."

E.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -2x^2 + 6x + 1$$

- 1) Montrer que la fonction f admet pour forme canonique :
 $f(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$
2) Établir la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

E.21 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + 2x + 4}$$

- 1) Établir que l'ensemble de définition de f est :
 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1 - \sqrt{5} ; 1 + \sqrt{5}\}$
2) Sur l'intervalle $]1 + \sqrt{5} ; +\infty[$, établir le sens de la fonction f .

6. Exercices non-classés

E.22 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ dont l'image de $x \in \mathbb{R}$ est définie par la relation : $f(x) = 8x^2 - 2x + 1$

- 1) Donner la forme canonique de la fonction f .
2) Établir que la fonction f est minorée par $\frac{7}{8}$.

3 a Établir, sans justification, le tableau de variations de la fonction f .

b En déduire que la fonction f n'admet pas de zéro sur $\mathbb{R}$.

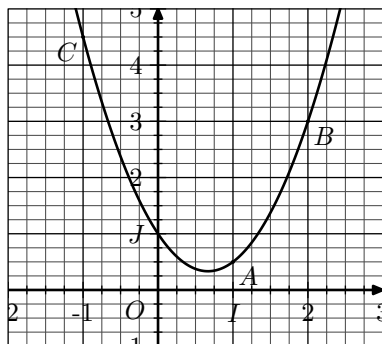
E.23

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

où a , b et c sont des nombres réels fixés, mais inconnus pour l'instant.

On considère la représentation de la fonction f dans le repère orthogonal $(O; I; J)$ ci-dessous :



1 Montrer que les nombres a , b , c doivent vérifier le système d'équation suivante :

$$\begin{cases} a - b + c = \frac{9}{2} \\ a + b + c = \frac{1}{2} \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

2 Résoudre le système précédent et en déduire l'expression de $f(x)$.

E.24 On considère les deux fonctions f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 6}$$

1 On considère le polynôme $-3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 6$ du second degré :

a À l'aide de la calculatrice, déterminer les deux racines de ce polynôme.

b Dresser le tableau de signes de ce polynôme.

c En déduire l'ensemble de définition de la fonction f .

2 À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de variations de la fonction f .

E.25

1 Établir que le polynôme $2x^2 - 3x - 2$ admet pour forme factorisée :

$$2x^2 - 3x - 2 = (2 \cdot x + a)(b \cdot x + c)$$

où les valeurs des nombres a , b , c seront à préciser.

2 Établir que le polynôme $12x^2 - 12x + 3$ admet pour forme factorisée :

$$12x^2 - 12x + 3 = 3 \cdot (2 \cdot x + a)(c \cdot x + d)$$

où les valeurs des nombres a , b , c seront à préciser.