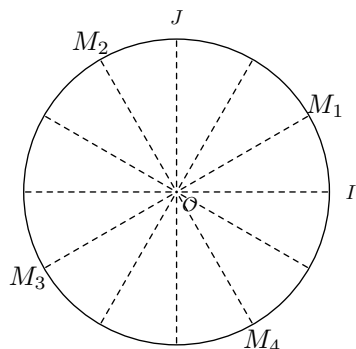


Hors programme lycée / Angles orientés

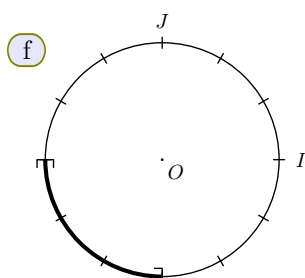
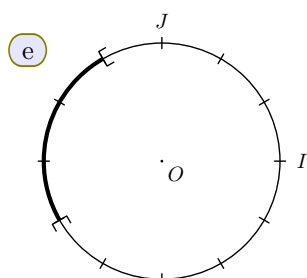
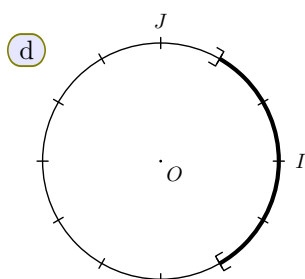
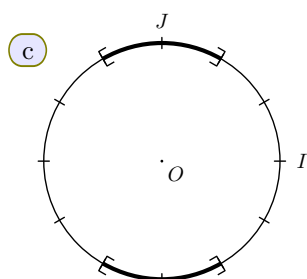
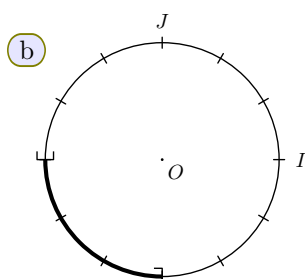
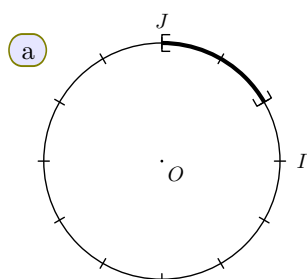
1. Intervalle d'angles orientés

E.1 Dans l'ensemble de cet exercice, le cercle trigonométrique a été partagé en 12 parties égales.

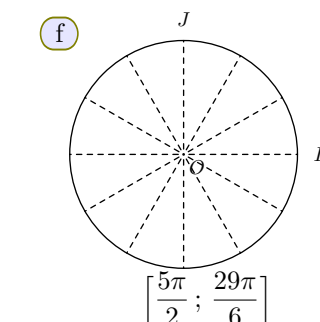
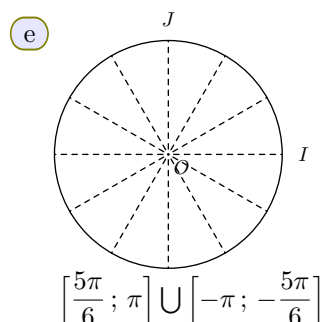
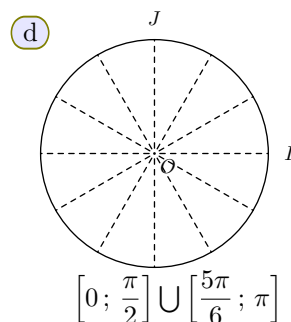
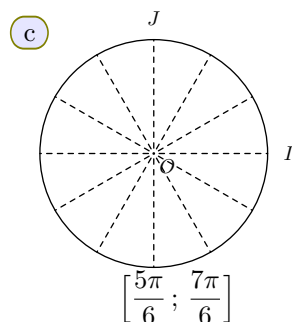
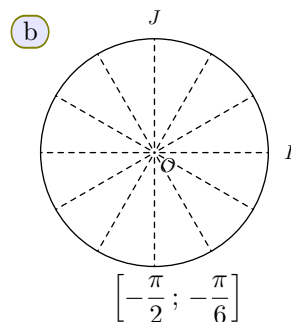
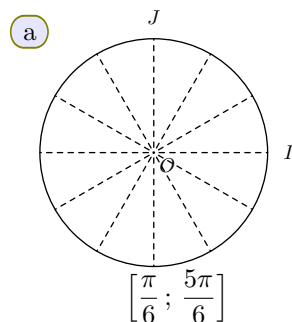
- 1 Déterminer la mesure, en radian, des angles $(\vec{OI}; \vec{OM}_i)$ pour $i=1, \dots, 4$.



- 2 Pour chaque question, une partie du cercle trigonométrique a été surlignée. Écrire, sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des mesures de l'angle $(\vec{OI}; \vec{OM})$ lorsque M décrit chacune de ces parties :

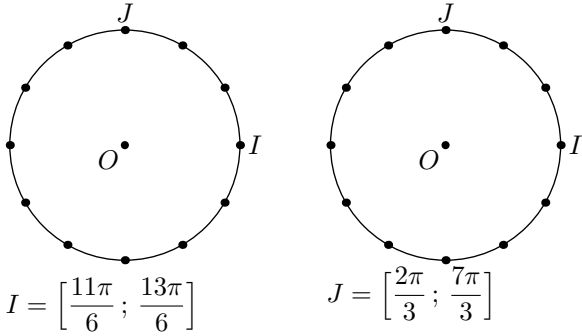


- 3 Pour chaque question, surligner l'ensemble des points M du cercle dont l'angle $(\vec{OI}; \vec{OM})$ appartient à l'intervalle indiqué :



E.2

- 1 a Pour chaque question, représenter sur le cercle l'ensemble des points repérés par un angle appartenant à l'intervalle donnée :



- b Donner l'expression de chacun de ses intervalles à l'aide de réunions d'intervalle exprimé par des mesures prin-

cipales.

- 2 Associer chacun des intervalles de la ligne du haut avec un ensemble de la ligne du bas :

a $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$	b $\left[\frac{23\pi}{6}; \frac{14\pi}{3} ig\right]$
c $\left[-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$	α $\left]-\pi; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$
β $\left]-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$	γ $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$

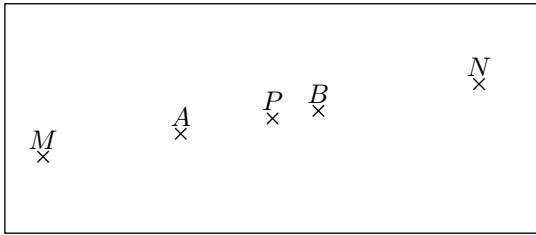
- E.3 On considère les deux intervalles de nombres réels :

a $I = \left[-\frac{19\pi}{6}; -\frac{11\pi}{4}\right]$	b $J = \left]\frac{20\pi}{3}; \frac{49\pi}{6}\right]$
---	---

Supposons que ces deux intervalles représentent des mesures d'angles orientées ; exprimer chacun de ces deux intervalles à l'aide des mesures principales associées de ces angles.

2. Lieu géométrique et angles orientées

- E.4 On considère, dans le plan, cinq points M, A, P, B, N alignés dans cet ordre.

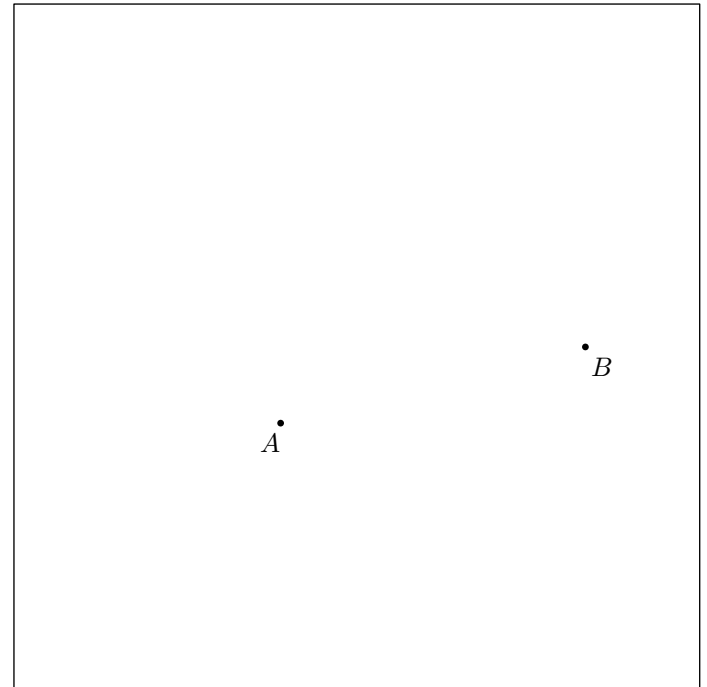


- 1 Déterminer la mesure des angles suivants :
- | | | |
|----------|----------|----------|
| a $MAMB$ | b $PAPB$ | c $NANB$ |
| d $ABMP$ | e $ABPM$ | |
- 2 Sur la figure ci-dessus, déterminer le lieu géométrique du Q vérifiant respectivement :
- | | |
|--|--|
| a $(\overrightarrow{QA}; \overrightarrow{QB}) = \pi + 2k\pi$ | b $(\overrightarrow{QA}; \overrightarrow{QB}) = 0 + 2k\pi$ |
|--|--|

- E.5 Soit A et B deux points fixés du plan. Déterminer le lieu géométrique des points M vérifiant les relations suivantes : faire une représentation d'une telle situation en précisant les emplacements possibles du point M .

a $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi$	b $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$
c $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	d $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$
e $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + k\pi$	

- E.6 On considère ci-dessous deux points A et B du plan :



Toutes les constructions demandées ne doivent être effectuées qu'à l'aide du compas et de la règle non-graduée. Les traits de constructions doivent rester présents sur la figure.

- 1 Placer un point C vérifiant : $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$
- 2 Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC .
- 3 Mettre en évidence le lieu des points M vérifiant la relation suivante : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}$
Quel est le théorème utilisé?

E.7

- 1 a Compléter le tableau ci-dessous :

k	-2	-1	0	1	2
$\frac{\pi}{3} + k\pi$					

- b Sur un des cercles trigonométrique ci-dessous, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation :

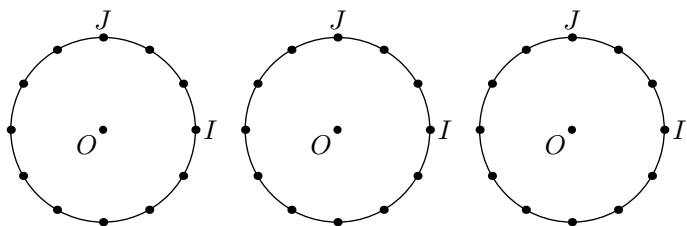
$$(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

- 2 Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation précisée :

a $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$

b $2(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{-2\pi}{3} + k\pi$

Les cercles suivants ont été partagés en douze parties égales.



E.8 On considère les expressions suivantes, où k est un en-

tier relatif :

a $\frac{\pi}{2} + k\pi$

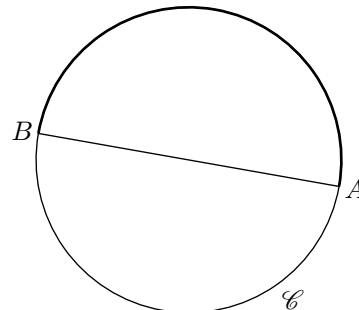
b $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

c $\pi + \frac{k\pi}{3}$

d $\frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M , lorsque k décrit $\mathbb{Z}$, du cercle trigonométrique repéré par cette mesure d'angle.

E.9 On représente ci-dessous un cercle de diamètre $[AB]$.



- 1 Soit M un point du demi-cercle mis en gras sur la figure.

Donner la mesure de $(\vec{MA}; \vec{MB})$.

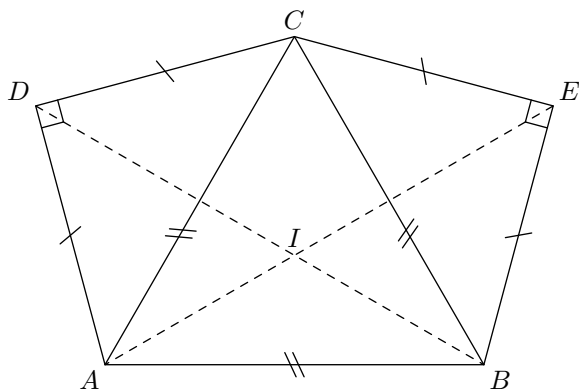
- 2 Déterminer l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$$(\vec{NA}; \vec{NB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

- 3 Quel sont les deux théorèmes utiles pour cet exercice?

3. Géométrie plane et Relation de Chasles

E.10 cm considère la configuration ci-dessous où ABC est un triangle équilatéral, DCA et CEB sont des triangles isocèles rectangle respectivement en D et E .



- 1 Donner la mesure principale en radian des angles suivants :

a $(\vec{AD}; \vec{AC})$ b $(\vec{AC}; \vec{AB})$

c $(\vec{BA}; \vec{BE})$ d $(\vec{DC}; \vec{AD})$

- 2 a Justifier que (DB) est la hauteur du triangle ADC issue de D et du triangle ABC issue de B .

- b Donner la mesure principale en radian des angles suivants :

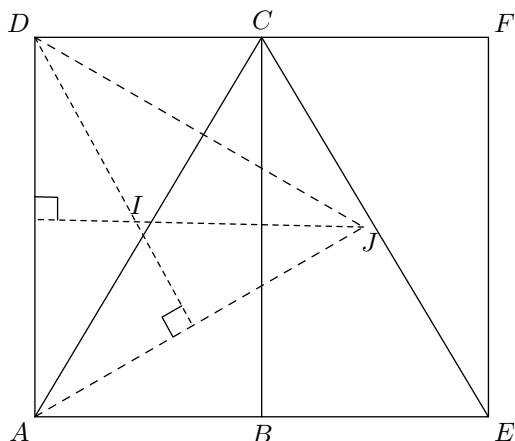
$$(\vec{IA}; \vec{IB}) \quad ; \quad (\vec{IB}; \vec{IE})$$

- 3 À l'aide de la relation de Chasles, déterminer la mesure principale en radian des angles suivants :

a $(\vec{CD}; \vec{AB})$ b $(\vec{DC}; \vec{AB})$ c $(\vec{IB}; \vec{CE})$

E.11 On considère un triangle AEC équilatéral inscrit dans le rectangle $AEFD$. À l'intérieur du rectangle, on trace le triangle équilatéral DAJ ; on note I son centre.

Attention, la figure ci-dessous n'a pas été tracée correctement; le but de l'exercice est de montrer que les point I et J appartiennent respectivement aux segments $[AC]$ et $[BC]$.



On utilisera la propriété suivante :

$$(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{w}) \implies \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires et de même sens.}$$

- 1 a Justifier que : $(\vec{AC}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{6}$.
- b Justifier que l'angle au centre $(\vec{IA}; \vec{ID})$ mesure $\frac{2\pi}{3}$.
- c En déduire que les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- 2 a Justifier que le triangle DCJ est isocèle en C .
- b En déduire la mesure de l'angle $(\vec{CA}; \vec{CJ})$.
- c En déduire que les points J, E, C sont alignés.

4. Equations et congruences

E.12

- 1 Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les équations suivantes :

a $2 \sin 2x = 1$ b $\cos 3x = 1$

- 2 Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les équations suivantes :

a $\sin 2x = \sin x$ b $\cos 2x = \cos x$

E.13 Dans cet exercice, on souhaite montrer que tous les nombres de l'ensemble $E = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ vérifient l'équation :

$$\sin 2x = \sin x$$

- 1 a Compléter, dans le tableau ci-dessous, la valeur de α quand k parcourt les valeurs proposées :

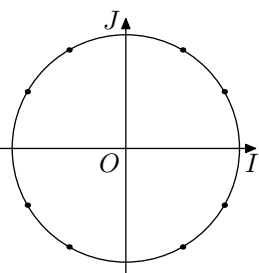
k	-2	-1	0	1	2	3	4
$\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$							

- b En se servant de la question précédente, donner la mesure principale de l'angle α en fonction de k :

k	-2	-1	0	1	2	3	4
Mesure principale de α							

- c Placer l'ensemble des points de E sur le cercle trigonométrique ci-dessous :

- 2 Montrer que **tous** les éléments de E vérifient l'équation : $\sin 2x = \sin x$



E.14 On considère l'ensemble E de nombres défini par :

$$E = \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 1 Donner l'ensemble de nombres formé par l'ensemble des mesures principales des angles de l'ensemble E .
- 2 Montrer que tous les nombres de E vérifient l'équation suivante : $\cos(3x) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

E.15 Lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{Z}$, alors l'expression $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ décrit un ensemble de nombre qu'on note E et qui peut s'écrire sous la forme :

$$E = \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 1 Donner les mesures principales des angles représentés par cet ensemble.
- 2 Vérifier que chaque nombre de l'ensemble E vérifie l'équation : $\cos 2x = 0$

E.16 Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les équations suivantes :

a $2 \cdot \cos 2x = 1$ b $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ d $\sin 3x = \cos x$

E.17

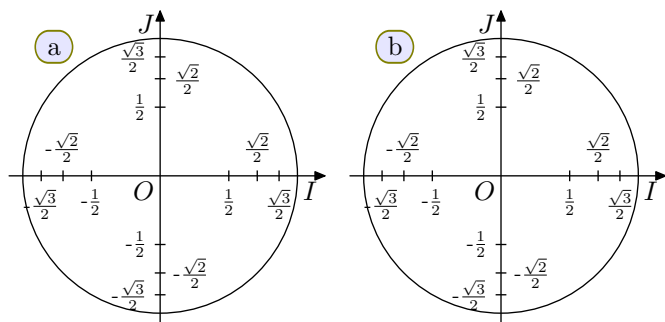
- 1 a Résoudre l'équation : $2x^2 + 7x + 3 = 0$.
- b Résoudre l'équation ci-dessous dans $]-\pi; \pi]$: $\sin 2x = -\frac{1}{2}$
- 2 En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $2 \cdot (\sin 2x)^2 + 7 \cdot \sin 2x + 3 = 0$

5. Inéquations

E.18 En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

a $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b** $2 \sin x \leq 1$ **c** $\cos x < -\frac{1}{2}$

E.19 Ci-dessous sont représentés deux cercles trigonométriques où sont indiqués sur les axes des valeurs remarquables :



1 Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

a $\cos \left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6} \right] \right)$ **b** $\cos \left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3} \right] \right)$

2 Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

a $\sin \left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6} \right] \right)$ **b** $\sin \left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3} \right] \right)$

E.20 En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

a $\cos x > 0$ **b** $\sin x > 0$ **c** $\sin x < -\frac{1}{2}$

E.21

1 À l'aide de la représentation du cercle trigonométrique :

a Représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble E :

$$E = \left\{ \cos x \mid x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} \right] \right\}$$

Exprimer l'ensemble E sous forme d'un intervalle.

b Représenter sur l'axe des ordonnées l'ensemble F :

$$\left\{ \sin x \mid x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] \right\}$$

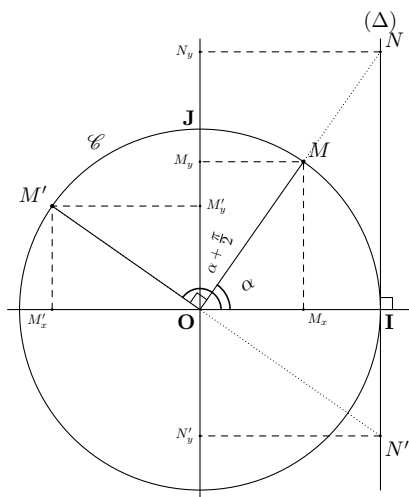
Exprimer l'ensemble F sous forme d'un intervalle.

2 Graphiquement et en s'aidant de la représentation du cercle trigonométrique, donner l'ensemble des solutions de chacune des inéquations ci-dessous :

a $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b** $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ **c** $\cos x < 0$

6. Démonstrations des propriétés des angles associés

E.22 Dans le plan munit d'un repère orthonormé et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère deux points $M(\alpha)$ et $M'(\alpha + \frac{\pi}{2})$ du cercle trigonométrique.

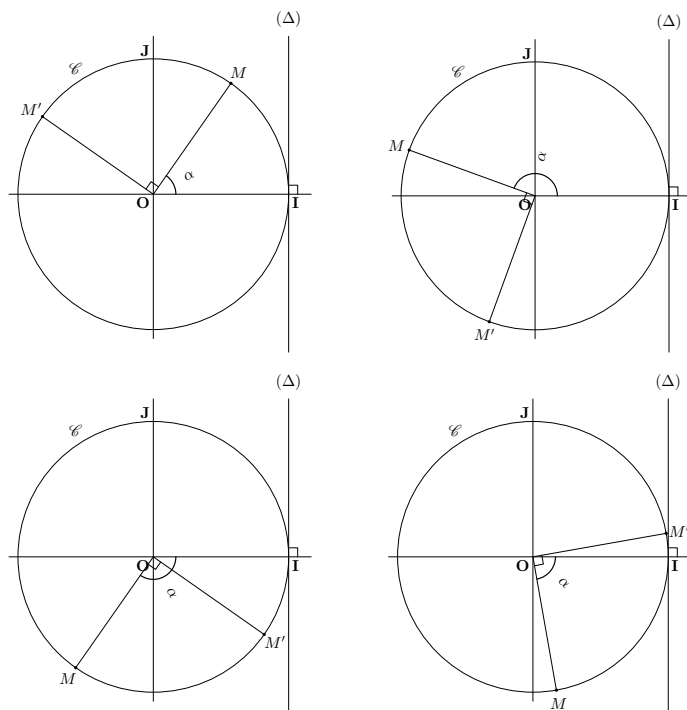


1 À l'aide des coordonnées des points figurant sur la figure, donner les valeurs du cosinus, sinus et tangente pour les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

2 **a** Par quelle transformation, le triangle OMM_x a pour image le triangle $OM'M'_y$?

b En déduire les valeurs de $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ et $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

3 Nous allons déterminer le signe des différentes valeurs des fonctions trigonométriques pour les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Ceci afin de s'assurer de la validité des formules trouvées à la question **2** quelle que soit la valeur de l'angle α :



	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$
$\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$			
$\alpha \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$			

	$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$	$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$
$\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$			
$\alpha \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$			
$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$			

On en déduit que :

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\tan \alpha.$$

Question subsidiaire :

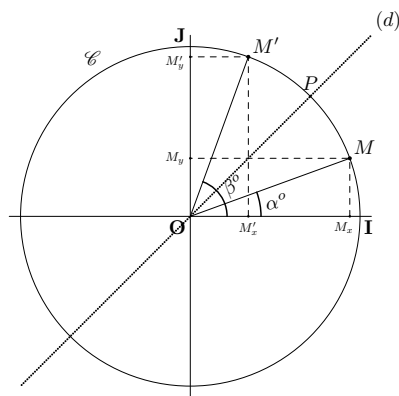
Nous allons montrer d'une autre manière que :

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} :$$

- 4 a Exprimer ON en fonction de α .
- b En utilisant le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, exprimer la valeur de ON' en fonction de α .
- c En déduire l'aire du triangle ONN' .
- 5 En utilisant le fait que (OI) est la hauteur du triangle ONN' issue de O , calculer d'une seconde manière l'aire du triangle ONN' .
- 6 Établir la formule suivante :

$$IN' + \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{1}{\sin \alpha}$$
- 7 En déduire la relation : $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$.

E.23 Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ trigonométrique : c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1.



On note les points M et M' respectivement repéré par les angles complémentaires α et β ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$). On note :

$M(\alpha)$ et $M'(\beta)$.

On note (d) la bissectrice de l'angle $\widehat{JOI}$ et P le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (d)

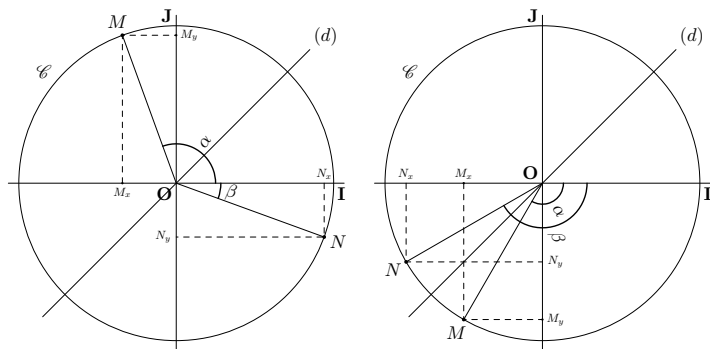
- 1 Dans cette question, nous allons montrer que les deux points M et M' sont symétriques relativement à la droite (d) . Pour cela, notons N l'image du point M par la symétrie d'axe (d) :
 - a Justifier que le point N est un point du cercle $\mathcal{C}$.
 - b Donner la mesure de l'angle $\widehat{JON}$ en fonction de α . En déduire que le point N appartient à la demi-droite $[OM']$.
 - c Justifier que l'image du point M , par la symétrie d'axe (d) , est le point M' .

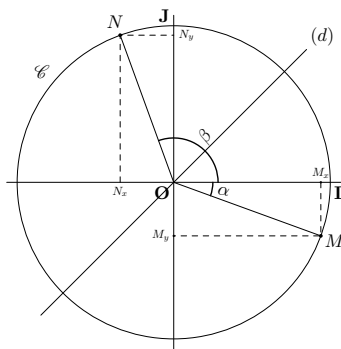
On note M_x (resp. M'_x) le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et M_y (resp. M'_y) le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées du point M (resp. M').

- 2 a Établir des liens entre les coordonnées des points M et M' dans le repère $(O; I; J)$.
- b En déduire les relations suivantes :

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad ; \quad \sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Pour finir l'étude de comparaison du cosinus et du sinus de deux angles complémentaires, il faut aussi voir ce qui se passe si le point M se trouve sur un autre quadrant sur le cercle trigonométrique. On considère deux points M et N du cercle trigonométrique caractérisés respectivement par les angles α et β ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur les axes du repère :





- 3 a Pour chacune des trois figures ci-dessous, établir oralement la véracité de l'assertion ci-dessous :

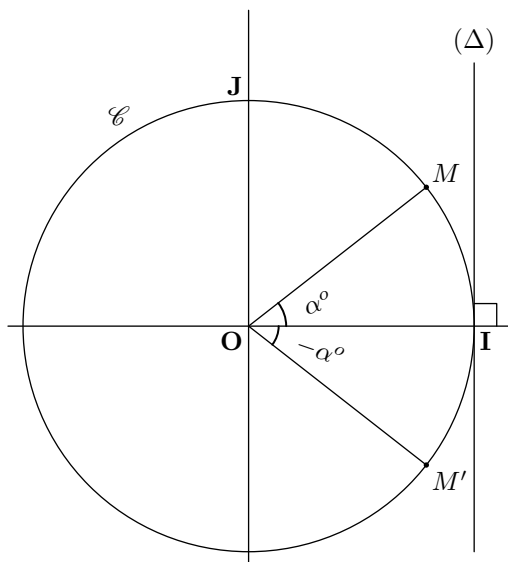
Les angles α et β sont complémentaires si, et seulement si, les points M et N sont symétriques relativement à la droite (d)

- b Justifier que ceci nous suffit pour établir pour toute valeur de α , les égalités suivantes :

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) ; \quad \sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

- 4 En déduire la relation reliant $\tan \alpha$ et $\tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$.

E.24 On considère un repère orthonormé $(O; I; J)$ et le cercle trigonométrique de ce repère : c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1. La droite (Δ) est la tangente en I au cercle $\mathcal{C}$.



7. Repérage polaire et cartésien

E.25 On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

Chaque point ci-dessous est présenté avec ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$.

Déterminer les coordonnées polaires $[\rho; \theta]$ associées (le cas échéant, donner une valeur arrondie au dixième près) :

- a $M(-3; -\sqrt{3})$ b $N(2; -2)$
c $P(\sqrt{6}; -\sqrt{2})$ d $Q(5; 2)$

Soit α un nombre réel quelconque. On considère les points $M(\alpha)$ et $M'(-\alpha)$.

Un exemple de cette situation est donnée dans le graphique ci-contre.

- 1 Pour mettre en évidence, les différentes valeurs des fonctions trigonométriques associées aux angles α et $-\alpha$:
 - a Tracer le projeté orthogonal de M sur la droite (OI) . Le nommer M_x .
 - b Tracer le projeté orthogonal de M sur la droite (OJ) . Le nommer M_y .
 - c Nommer N le point d'intersection des droites (OM) et (Δ) . Tracer le projeté orthogonal de N sur la droite (OJ) . Le nommer N_y .
 - d Faites de même pour le point M'
- 2 a Comparer les abscisses des points M et M' .
b En déduire une relation entre $\cos \alpha$ et $\cos(-\alpha)$?
- 3 a Comparer les ordonnées des points M et M' .
b En déduire une relation entre $\sin \alpha$ et $\sin(-\alpha)$?
- 4 a Comparer les ordonnées des points N et N' .
b En déduire une relation entre $\tan \alpha$ et $\tan(-\alpha)$?

E.26 On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

- 1 Chaque point ci-dessous est présenté avec ses coordonnées polaires $[\rho; \theta]$.

Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun de ses points : (le cas échéant, donner une valeur arrondie au dixième près) :

- a $M\left[3; \frac{\pi}{4}\right]$ b $N\left[2; -\frac{\pi}{6}\right]$
c $P\left[3\sqrt{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ d $Q\left[10; -\frac{\pi}{12}\right]$

- 2 On considère le point R de coordonnée polaire $[4; \theta]$ tel

que $\tan\theta = \sqrt{3}$. Peut-on déterminer de manière unique les coordonnées cartésiennes du point R .

E.27 Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, construire uniquement au compas et à la règle non-graduée les points suivants :

- a $A\left[3; \frac{3\pi}{2}\right]$ b $B\left[\frac{5}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$
 c $C\left[2; -\frac{2\pi}{3}\right]$ d $D\left[\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right]$

E.28

1 On considère deux points M et N du plan respectivement de coordonnée polaire $\left[\sqrt{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ et $\left[2; -\frac{\pi}{4}\right]$.

Déterminer les coordonnées cartésiennes des points M et N .

2 On considère deux points P et Q du plan respectivement

de coordonnées cartésiennes $(-5; 5)$ et $(3; -\sqrt{3})$.

Déterminer les coordonnées polaires des points P et Q .

E.29 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$:

1 On considère les deux points A et B définis par leurs coordonnées cartésiennes :

a $A(-3\sqrt{3}; 3)$ b $B\left(-\frac{1}{10}; -\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$

Déterminer les coordonnées polaires de ces deux points.

2 On considère les deux points C et D définis par leurs coordonnées polaires :

a $C\left(\frac{1}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right)$ b $D\left(\sqrt{15}; \frac{\pi}{6}\right)$

Déterminer les coordonnées cartésiennes de ces deux points.

8. Angles orientés

E.30 

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$, on considère le cercle de centre O et de rayon 1 appelé **cercle trigonométrique**.

Tout point M définit un angle géométrique $\widehat{IOM}$.

Le sens de parcours du cercle trigonométrique permet de caractériser tout point du cercle par son angle géométrique :

- l'angle est positif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- l'angle est négatif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

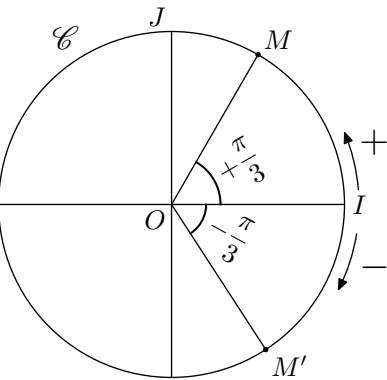
Dans la représentation ci-dessus :

- On a : $(\vec{OI}; \vec{OM}) = +\frac{\pi}{3}$ rad

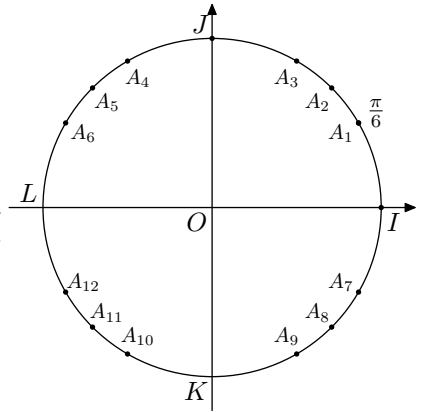
Dans le cercle trigonométrique, on note $M\left(+\frac{\pi}{3}\right)$.

- On a : $(\vec{OI}; \vec{OM'}) = -\frac{\pi}{3}$ rad

Dans le cercle trigonométrique, on note $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.



1 Dans la figure ci-dessous, les points A_i définissent un angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OA}_i)$ ayant une mesure "remarquable". Pour chacun des points, indiquer la mesure de l'angle associé et rajouter le signe permettant de repérer chaque point marqué du cercle trigonométrique :



2 Dans le cercle trigonométrique ci-dessus, placer sur cette figure les points N, P, Q, R, S, T réalisant les mesures suivantes :

- a $(\vec{OI}; \vec{ON}) = -\frac{\pi}{4}$ rad b $(\vec{OI}; \vec{OP}) = \frac{5\pi}{6}$ rad
 c $(\vec{OI}; \vec{OQ}) = -\frac{2\pi}{3}$ rad d $(\vec{OK}; \vec{OR}) = -\frac{\pi}{4}$ rad
 e $(\vec{OK}; \vec{OS}) = \frac{\pi}{6}$ rad f $(\vec{OJ}; \vec{OT}) = -\frac{\pi}{4}$ rad

E.31

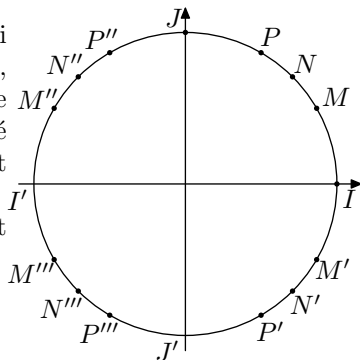


Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous sur lequel sont placés plusieurs points :

Les points M, N, P vérifient les mesures suivantes :

$$\widehat{IOM} = 30^\circ ; \widehat{ION} = 45^\circ$$

$$\widehat{IOP} = 60^\circ$$



1 Donner la mesure des angles repérant les points M, N, P en radians.

2 Les points M', N', P' sont respectivement les images des points M, N, P par la symétrie d'axe (OI) :

a Que peut-on dire de $(\vec{OI}; \vec{OM})$ et $(\vec{OI}; \vec{OM'})$?

b Donner la mesure en radians des angles suivants :
 $(\vec{OI}; \vec{OM'})$; $(\vec{OI}; \vec{ON'})$; $(\vec{OI}; \vec{OP'})$

3 Les points M'', N'' et P'' sont respectivement les images des points M, N, P par la symétrie d'axe (OJ) :

a Que peut-on dire de $(\vec{OI}; \vec{OM})$ et $(\vec{OI}; \vec{OM''})$?

b Donner la mesure en radians des angles suivants :
 $(\vec{OI}; \vec{OM''})$; $(\vec{OI}; \vec{ON''})$; $(\vec{OI}; \vec{OP''})$

4 Les points M''', N''' et P''' sont respectivement les images des points M, N, P par la symétrie de centre O :

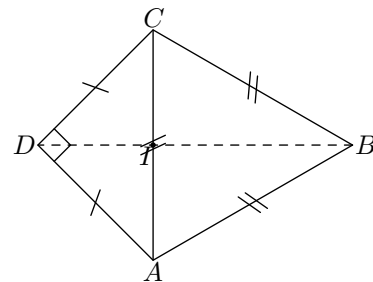
a Quelle relation algébrique vérifie les deux angles :
 $(\vec{OI}; \vec{OM})$; $(\vec{OI}; \vec{OM'''})$

b Donner la mesure en radians des angles suivants :
 $(\vec{OI}; \vec{OM'''})$; $(\vec{OI}; \vec{ON'''})$; $(\vec{OI}; \vec{OP'''})$

E.32



On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous qui est constitué de deux triangles ABC et ACD respectivement équilatéral et isocèle rectangle en D .



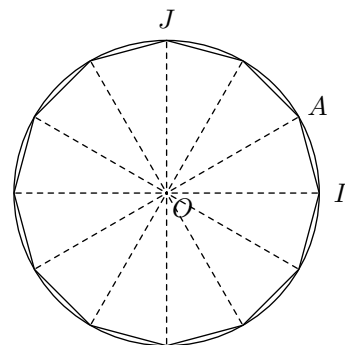
À l'aide des points de cette figure et pour chaque question, donner un angle orienté réalisant les mesures suivantes :

a $\frac{\pi}{3}$ rad b $-\frac{\pi}{4}$ rad c $-\frac{\pi}{6}$ rad d $\frac{7\pi}{12}$ rad

E.33



On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ ci-dessous où est inscrit un dodécagone (*polygone régulier à 12 côtés*)



1 Déterminer la mesure de l'angle $(\vec{OI}; \vec{OA})$

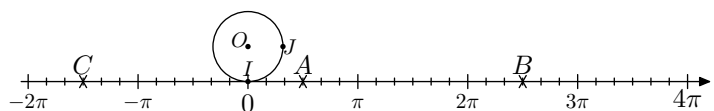
2 Placer sur le cercle $\mathcal{C}$ les points M, N, P tels que :

a $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{2\pi}{3}$ rad b $(\vec{OJ}; \vec{ON}) = -\frac{\pi}{6}$ rad

c $(\vec{OA}; \vec{OP}) = -\frac{\pi}{2}$ rad c $(\vec{OQ}; \vec{OJ}) = -\frac{5\pi}{6}$ rad

9. Mesures principales

E.34 On considère la droite graduée suivante sur lequel est posé le cercle trigonométrique (*cercle de rayon 1*). Le point I (*unité des abscisses*) est placé sur l'origine de la droite graduée.



On fait rouler le cercle sur l'ensemble de la droite graduée.

1 Indiquer les différentes positions possibles du point I sur la droite.

2 Justifier que les points A, B, C de la droite graduée représente le même point du cercle trigonométrique.

E.35

- 1 a Que pouvez-vous dire des points du cercle trigonométrique repérés par les angles :
 50° ; 410° ; 3650° ; -310°
- b Même question pour les angles :
 $\frac{\pi}{3}$ rad ; $-\frac{5\pi}{3}$ rad ; $\frac{7\pi}{3}$ rad

Ainsi, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, tous les angles de l'ensemble $\{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ définissent un même point sur le cercle trigonométrique.

La figure ci-contre montre que le point M peut être repéré par les deux angles :

$$M\left(\frac{7\pi}{6}\right) ; M\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

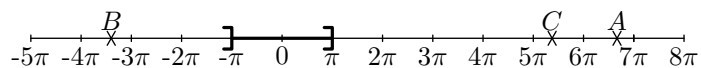
L'intervalle $]-\pi; \pi]$ s'appelle l'**intervalle des mesures principales** et a une longueur de 2π . On admet que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un seul élément de l'ensemble $\{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

- 2 a Compléter par *oui* ou *non* le tableau ci-dessous :

Angle	$-\frac{3}{7}\pi$	$-\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	$\frac{57}{4}\pi$	$-\pi$
appartient à $]-\pi; \pi]$					

- b Lequel des nombres ci-dessous appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$?
 $\frac{9\pi}{2} - 4\pi$; $\frac{9\pi}{2} - 2\pi$; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2} + 2\pi$; $\frac{9\pi}{2} + 4\pi$
- c Lequel des nombres ci-dessous appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$?
 $-\frac{5\pi}{3} - 2\pi$; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi$; $-\frac{5\pi}{3} + 4\pi$
- d Soit $\mathcal{E} = \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donner l'unique élément de l'ensemble $\mathcal{E}$ appartenant à l'intervalle des mesures principales.

E.36 On considère la droite graduée ci-dessous où sont placés les points $A\left(\frac{20}{3}\pi\right)$, $B\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$ et $C\left(\frac{43}{8}\pi\right)$.



- 1 a Graphiquement, déterminer le nombre de fois dont on doit enlever 2π à l'abscisse du point A afin d'obtenir la mesure principale de ce nombre?
- b En déduire la mesure principale de $\frac{20}{3}$.
- 2 Déterminer la mesure principale des abscisses des points B et C .

E.37

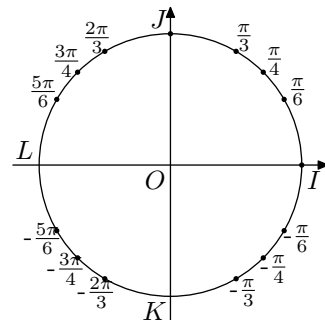
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On désigne par M et N deux points du cercle trigonométrique.

- 1 Parmi les mesures d'angles ci-dessous, lesquelles appartiennent à l'intervalle des mesures principales :

a $\frac{5\pi}{3}$ b $-\frac{7\pi}{4}$ c $-\frac{2\pi}{3}$ d $1,1\pi$

- 2 Déterminer la mesure principale des angles définis par les points M , N , P et Q ci-dessous, puis placer chacun de ces points sur le cercle trigonométrique ci-contre :

a $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{7\pi}{3}$
 b $(\vec{OI}; \vec{ON}) = -\frac{15\pi}{4}$
 c $(\vec{OI}; \vec{OP}) = \frac{5\pi}{3}$
 d $(\vec{OI}; \vec{OQ}) = \frac{19\pi}{6}$



E.38

Déterminer la mesure principale des angles orientés de mesure suivante :

a $\frac{9\pi}{4}$ b $\frac{192\pi}{6}$ c $-\frac{5\pi}{4}$
 d $-\frac{33\pi}{2}$ e $\frac{16\pi}{7}$ f $\frac{52\pi}{3}$

E.39

- 1 Donner la mesure principale des angles suivants :

a $\frac{15\pi}{7}$ b $\frac{13\pi}{9}$ c $\frac{173\pi}{12}$
 d $\frac{165\pi}{7}$ e $-\frac{64\pi}{15}$ f $-\frac{429\pi}{33}$

- 2 Voici deux intervalles de mesures d'angles orientés :

$$I = \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] ; J = \left[\frac{7\pi}{3}; \frac{35\pi}{8} \right]$$

Déterminer l'écriture de chacun de ces ensembles en utilisant les mesures principales d'angles orientés.

E.40

- 1 On se propose, dans cette question, de déterminer la mesure principale de l'angle $\alpha = \frac{73}{5}\pi$:

a Soit k un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :
 $-\pi < \frac{73}{5}\pi + 2 \cdot k \cdot \pi \leq \pi$

Réaliser un encadrement de k à l'aide de l'encadrement ci-dessus.

- b À l'aide de la calculatrice, déterminer l'unique nombre entier k réalisant cet encadrement.

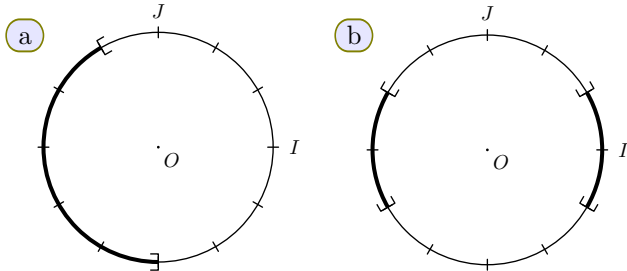
- c En déduire la mesure principale de l'angle α .

- 2 De la même manière, déterminer la mesure principale des angles suivants :

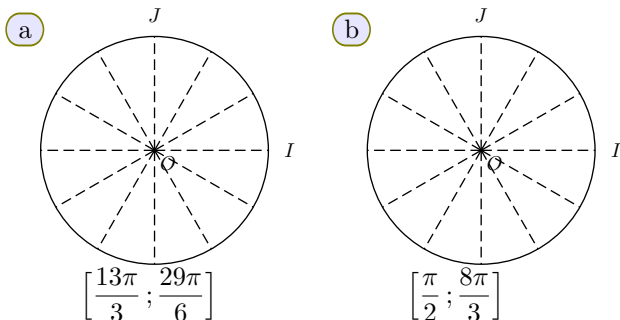
a $-\frac{29}{3}\pi$ b $-\frac{27}{4}\pi$ c $\frac{70}{9}\pi$

E.41

- 1 Donner, sous forme de réunions d'intervalles, l'ensemble formé par les mesures principales des angles repérant les points surlignés du cercle trigonométrique :



- 2 Pour chaque question, surligner l'ensemble des points ayant pour angle orienté l'ensemble précisé sous le cercle trigonométrique :



E.42 Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

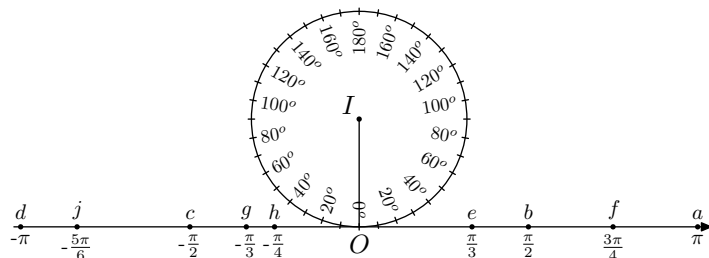
- (a) $\frac{254\pi}{5}$ (b) $-\frac{70\pi}{3}$ (c) $\frac{92\pi}{7}$

E.43

On considère une droite graduée d'origine O sur laquelle est placé des points définis par leur abscisse :

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right) ; b(\pi) ; c\left(-\frac{\pi}{2}\right) ; d(-\pi) ; e\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) ; g\left(-\frac{\pi}{3}\right) ; h\left(-\frac{\pi}{4}\right) ; j\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

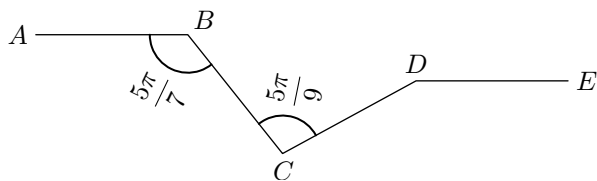


On considère le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 placé sur la droite graduée comme l'indique la figure précédente.

- 1 (a) Soit M un point de $\mathcal{C}$ tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure π .
Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$
- (b) Placer l'unique point A du cercle $\mathcal{C}$ tel que l'arc $\widehat{OA}$ ait pour longueur π .
- 2 (a) Soit M un point de $\mathcal{C}$ tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure $\frac{\pi}{2}$.
Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$
- (b) Placer les deux points B et C appartenant au cercle $\mathcal{C}$ tel que les arcs $\widehat{OB}$ et $\widehat{OC}$ aient pour longueur $\frac{\pi}{2}$.
- 3 De même, placer les points E, F, G, H, J tels que les arcs $\widehat{OE}, \widehat{OF}, \widehat{OG}, \widehat{OH}, \widehat{OJ}$ aient respectivement la même longueur que l'abscisse des points e, f, g, h, j .

10. Angles orientés et algèbre

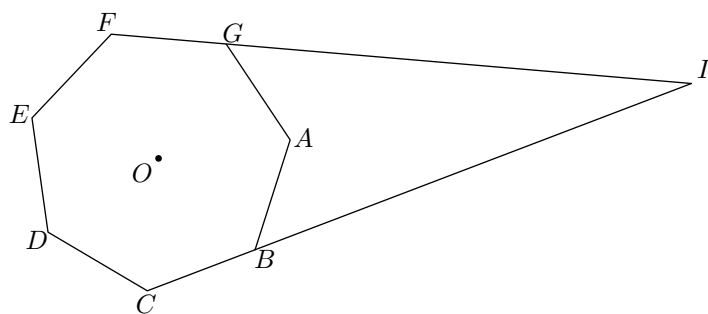
E.44 Sur le dessin ci-dessous, est représentée une ligne brisée $ABCDE$ dont les angles géométriques $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ ont été indiqués.



Les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})$.

E.45

On considère l'heptagone régulier $ABCDEFGH$ de centre O .



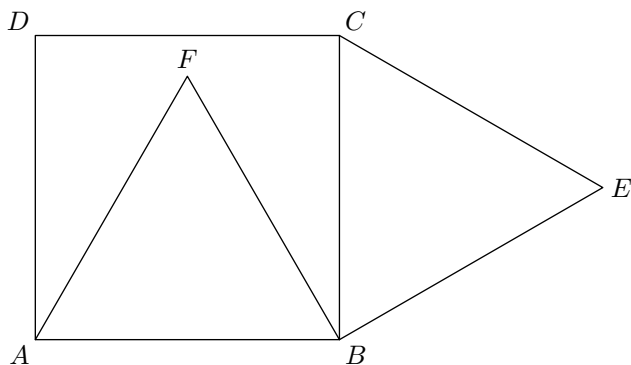
Le point I est le point d'intersection des droites (BC) et (FG) .

- 1 Donner, en justifiant votre démarche, la mesure des angles orientés suivants (on passera dans un premier temps par l'angle géométrique) :
- (a) $(\overrightarrow{OG}; \overrightarrow{OB})$ (b) $(\overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AB})$ (c) $(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CD})$
- 2 Déterminer, avec l'aide de la relation de Chasles, la mesure des angles orientés suivants :

- (a) $(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{CB})$ (b) $(\overrightarrow{IG}; \overrightarrow{IB})$

E.46 On considère le carré $ABCD$.

Soit le point E extérieur au carré tel que BCE soit équilatéral.
Soit F le point intérieur au carré tel que le triangle ABF soit équilatéral.



On souhaite montrer que les points D , F et E sont alignés.

1 a Donner la mesure des deux angles orientés suivants :
 $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{DF}; \overrightarrow{DA})$

b En déduire la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DF})$.

2 a Donner la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CE})$.

b En déduire la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})$.

3 En déduire que les points D , F et E sont alignés.

Les questions suivantes ont pour objectif d'utiliser la relation de Chasles.

4 Déterminer la mesure des angles orientés :

a $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{CF})$ b $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{CE})$