Hors programme lycée / Autres suites

1. *Suites et nombres de Fibonacci*

E.1 L'hypothèse du continue suppose que toute partie de droite peut être découpée indéfiniment et que chaque partie à une longueur non-nulle.
Cette hypothèse va à l'encontre de la conception de la matière en tant que masse d'atome, mais est très utilisé dans les phénomènes de mouvement, dans la théorie quantique.

Le calcul infinitésimal est la branche des mathématiques qui étudient l'infiniment loin et l'infiniment proche.

(paradoxe de Zénon d'Elée)

> "Il n'y a point de mouvement, car il faut que le mobile arrive au milieu de son parcours avant d'atteindre la fin"

Ce paradoxe est censé mettre en échec la continuité : c'est-à-dire que l'on peut diviser indéfiniment une longueur. Concept a l'opposé du discret *(théorie atomiste)*

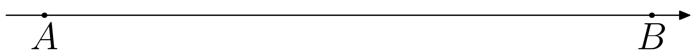
E.2 Considérons un point X se déplaçant de A vers B en décrivant l'intégralité du segment.

On décompose le parcours du point de la manière suivante :

- On dira que ce point arrivera à la première étape, lorsqu'il aura parcouru la moitié de $[AB]$: on notera X_1 ce point.
- Il sera à la seconde étape lorsqu'il aura parcouru la moitié du chemin restant, c'est-à-dire la moitié de $[X_1B]$: ce point sera noté X_2.
- La troisième étape sera la moitié de $[X_2B]$: la moitié de la distance restant...
- Et ainsi de suite.

On considère X_0 comme étant le point A de départ.

1. Placer sur la droite ci-dessous les points X_1, X_2, X_3 et X_4.



2. On supposera désormais que la distance AB mesure 1 mètre.
   a. Donner la distance X_0X_1, X_1X_2, X_2X_3 et X_3X_4.
   b. Par extrapolation, donner les mesures de X_4X_5, X_5X_6, X_6X_7 et X_7X_8.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}$, faîtes une conjecture quant à la distance $X_{n-1}X_n$.
3. On se propose d'étudier la somme infinie de termes :
   $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$
   Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme à n termes :
   $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$
   a. Écrire, sans calculer, les sommes S_3, S_4 et S_5.
   b. Établir la formule : $S_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S_n$
   c. Donner une raison pour laquelle les nombres S_n se rapprochent de la valeur 1 lorsque le nombre d'étapes devient très grande.
   On dira que S_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   d. En notant S la valeur limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$: on notera $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = S$. Par passage à la limite de la formule (2), on obtient l'égalité :
   $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S$.
   Retrouver la valeur de S.

On vient de mettre en évidence une des propriétés de l'hypothèse du continu :

> Tout segment peut être découpé en une infinité de segments tous de longueurs non-nulle.

E.3

> Définition du petit Robert de la dichotomie : Division, subdivision binaire *(entre deux éléments qu'on sépare nettement et qu'on oppose)*

En admettant la thèse de la continuité, tout objet est divisible à l'infini. On sait que $\sqrt{2} \in [1\,;2]$ car :
$1^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < 2^2$

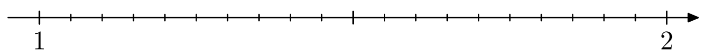
Deux nombres et leurs carrés étant rangés dans le même ordre.
$1 < \sqrt{2} < 2$

Mise en place de l'algorithme :

- À l'étape 0 *(l'étape initiale)*, on sait que $\sqrt{2}$ est contenu dans l'intervalle $[1\,;2]$
- Pour passer à l'étape suivante, on considère le milieu de cet intervalle 1,5. Puis on compare 1,5 et $\sqrt{2}$ afin de savoir si $\sqrt{2}$ est contenu dans l'intervalle $[1\,;1{,}5]$ ou l'intervalle $[1{,}5\,;2]$.
- On obtient ainsi un nouvel intervalle correspondant à l'étape 1

On réitère ce procédé une infinité de fois. On notera $[a_n\,;b_n]$ l'intervalle correspondant à l'étape n et u_n sa longueur.

1. a. Donner la valeur de u_0, u_1 et u_2.
   b. Placer les points a_0, b_0, a_1, b_2, a_3 et b_4 sur la droite graduée ci-dessous.



2. a. Donner la valeur de u_n en fonction de n.
   b. Donner un encadrement de $b_n - a_n$ pour $n = 10$.
   En déduire la précision de l'approximation de $\sqrt{2}$ par u_{10}
3. Que devient la valeur de u_n lorsque n croit vers $+\infty$ *(on dit que n tends vers l'infini)*. C'est-à-dire quel est la valeur de $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$.

E.4 **Achille et la tortue** *(paradoxe de Zénon d'Elée)*

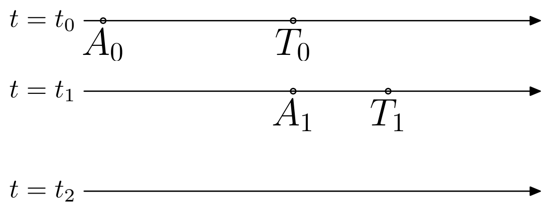
Si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper, quel que soit sa vitesse ; car qu'Achille court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler cette avance

On suppose que la tortue a pris un mètre d'avance, qu'Achille court à la vitesse de $2\,{}^{m}\!/_{s}$ et la tortue à une vitesse de $1\,{}^{m}\!/_{s}$.

On note t_0 l'instant de départ, A_0 la position initiale d'Achille et T_0 celle de la tortue.
t_1 est l'instant où Achille atteint la position précédente de la Tortue. Notons A_1 cette position, la tortue continuant à avancer se trouve en T_1.
Et ainsi de suite.

En se basant sur le fait qu'on puisse découper en autant de bout le parcours d'Achille et de la tortue *(hypothèse de la continuité)*, on croit qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue puisqu'il lui restera toujours une part du chemin à parcourir. Autre embêtement, tous ses petits segments mis bout à bout on quelle mesure? Autrement dit, Achille rattrapera la tortue à l'infini?

1. Placer sur la dernière droite graduée le point A_2 et T_2.



2. Donner les valeurs de T_0-A_0, T_1-A_1, T_2-A_2.

3. On accepte le fait que, à tout rang de l'étude, on a :
$u_n = T_n - A_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Nous allons calculer à quelle distance du point d'Achille, les participants vont se rejoindre. On note :
$u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

   a. Développer : $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times S_n$

   b. En déduire : $S_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}$

   c. Donner la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini qu'on note :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad \text{ou} \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque :

- Les paradoxes de Zénon ont été rapporté par Aristote dans son livre sur la physique *(Livre VI)*
- On aurait aussi pût considérer les deux fonctions qui au temps associe la position d'Achille et de la tortue sur la droite et déterminer le point d'intersection.

E.5 La discontinuité *(paradoxe de Zénon d'Elée)*

E.6

1. On considère le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Montrer que, pour tout entier n naturel supérieur à 2, les nombres F_n vérifient la relation suivante :
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Les nombres (F_n) s'appellent les "*nombres de Fibonacci*" ; toute suite de nombres présentant une telle relation sera dite de "*Suites de Fibonacci*".

Plus précisément, la suite étudiée précédemment est définie par les conditions initiales :
$F_0=0 \quad ; \quad F_1=1$

Il est clair que : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} F_n = +\infty$.
Nous allons étudier maintenant le rapport de deux termes consécutifs ; c'est-à-dire que nous allons étudier la valeur du quotient $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ quand n devient de plus en plus grand *(c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$).*

2. a. Pour $n=2$, établir l'égalité suivante :
$\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = 2$

   b. Compléter le tableau suivant avec une précision à 10^{-5} près :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$										

3. Faire une conjecture quant à la limite de la suite (F_n) et le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous allons maintenant montrer que toutes suites de Fibonacci ont le rapport de ses termes consécutifs qui tend vers le nombre d'or :

4. En notant R_n la valeur du rapport $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, montrer que :
$$R_n = 1 + \frac{1}{R_{n-1}}$$

5. En admettant, que la suite (R_n) admet une limite finie r lorsque n tend vers $+\infty$, en déduire que r vérifie la relation :
$r^2 = r + 1$

6. Vérifier que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont deux nombres vérifiant cette équation.

7. En admettant le fait qu'un polynôme du second degré ne peut s'annuler qu'en au plus deux valeurs, dîtes pourquoi la suite des rapports $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ tend nécessairement vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

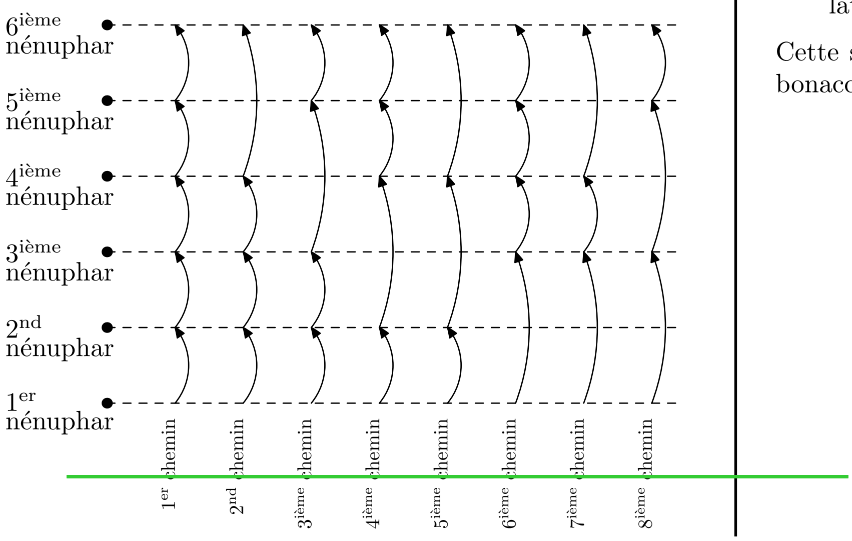
E.7 Fibonacci est un mathématicien italien du 13ième siècle. Il est notamment connu pour avoir défini une suite de nombres *(appelée suite de Fibonacci)* ayant une implication forte dans certains phénomènes de modélisation : modèle mathématique, étude de la prolifération de bactérie.

Nous allons étudier le déplacement d'une grenouille pour mettre en place cette suite de nombres.

On considère une rivière où une grenouille veut se déplacer de nénuphars en nénuphars ; elle peut :

- soit passer d'un nénuphar à un suivant ;
- soit sauter par-dessus un nénuphar pour atteindre directement le suivant.

Lorsque 6 nénuphars sont alignés, voici les huit trajets possibles que la grenouille peut emprunter pour passer du premier nénuphar au dernier.



1. a. Donner le nombre de chemins différents que peut prendre la grenouille lorsque son chemin est constitué de :
   2 nénuphars ; 3 nénuphars
   4 nénuphars ; 5 nénuphars
   Dans chaque cas, faire un dessin représentant tous les chemins possibles.
   b. Dans le cas où le chemin est constitué de 6 nénuphars, le schéma précédent indique que 8 trajets distincts sont possibles. Comment peut-on retrouver le nombre 8 avec les résultats de la question a.
   Justifier votre raisonnement.
   c. En déduire le nombre de trajets possibles lorsque le chemin est composé de 10 nénuphars.
2. On note F_n le nombre de trajets possibles lorsque le chemin est composé de n nénuphars. Donner une relation entre F_n, F_{n-1} et F_{n-2}.

Cette suite de nombre s'appelle la suite des nombres de Fibonacci.

2. *Suites définies conjointement (terminales)*

E.8 On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 \cdot v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

Partie A

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme où le paramètre `n` est un entier supérieur ou égal à 1 :

```
Fonction f(n)
    u ← 0
    v ← 1
    Pour k variant de 1 à n
        w ← u
        u ← (w+v)/2
        v ← (w+2·v)/3
    Fin Pour
    Renvoyer (u;v)
```

   a. On appelle la fonction `f` avec pour argument la valeur `n`=2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'appel à la fonction `f`.

k	w	u	v
1			
2			

   b. Pour un nombre entier N donné, à quoi correspond le couple de valeurs renvoyé par la fonction `f` par rapport à la situation étudiée dans cet exercice?

Partie B

1. a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel, on a :
   $v_n - u_n > 0$
   b. En déduire que la suite (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.
2. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Partie C

1. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier na-

turel n, par :

$w_n = v_n - u_n$

a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

b) Justifier que les limites des suites (u_n) et (v_n) sont égales.

2) On considère la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = 2 \cdot u_n + 3 \cdot v_n$

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. *Un peu plus loin : suites homographiques*

E.9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

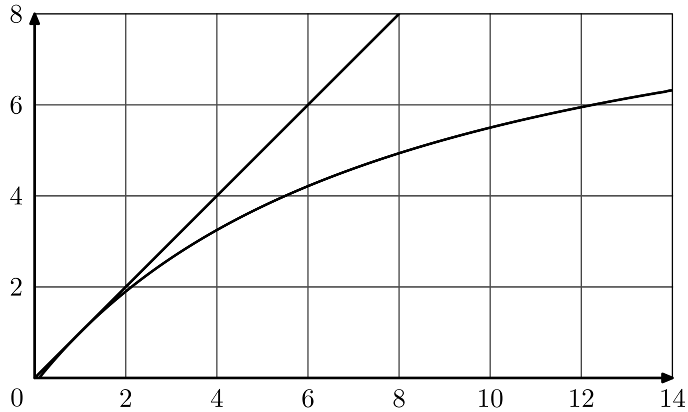
$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{10 \cdot u_n - 1}{u_n + 8} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On admet que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et que les termes de la suite sont strictement supérieur à 1.

1) On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{10x - 1}{x + 8}$$

ainsi que la représentation de la première bissectrice du plan :



Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite.

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{9}$$

b) Donner la formule explicite définissant chaque terme de la suite (v_n) en fonction du rang n.

c) En déduire la formule explicite définissant chaque terme de la suite (u_n) en fonction du rang n.

E.10 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{-u_n + 6}{u_n - 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

a) Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

b) Montrer que : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = -\dfrac{1}{4}$

c) En déduire la nature de la suite (v_n) ainsi que la formule explicite déterminant le terme de rang n en fonction de n.

3) a) Déterminer l'expression du terme u_n en fonction du terme v_n.

b) En déduire la formule explicite définissant les termes de (u_n) en fonction de n.

