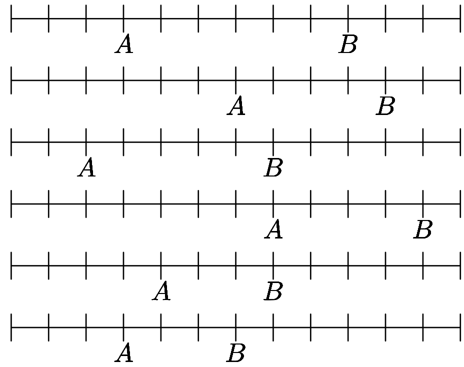
Hors programme lycée / Barycentres

1. Première approche

E.1 Dans chaque cas, placer le point G, s'il existe, sur les droites graduées ci-dessous vérifiant la relation demandée :



$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

$2 \cdot \overrightarrow{AG} + 3 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

$3 \cdot \overrightarrow{GA} + 2 \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

$5 \cdot \overrightarrow{GA} - 3 \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

$-2 \cdot \overrightarrow{GA} + 2 \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{GA} - 4 \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

2. Barycentre de deux points

E.2 Soit A et B deux points du plan. On note K le symétrique de A par rapport à B.

Parmi les systèmes pondérés ci-dessous, indiquer le système admettant K pour barycentre :

a $\{(A;1)\ ;\ (B;-1)\}$ b $\{(A;-1)\ ;\ (B;1)\}$

c $\{(A;-2)\ ;\ (B;1)\}$ d $\{(A;1)\ ;\ (B;-2)\}$

E.3 Soit A, B et C trois points alignés, vérifiant la relation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

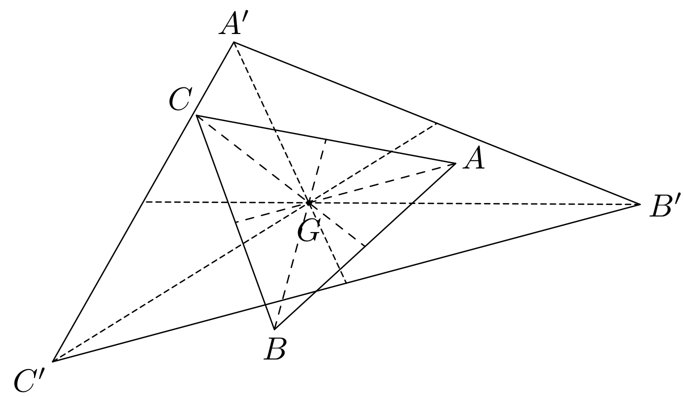
1. a Montrer que ces trois points vérifient la relation suivante :
$$\overrightarrow{CA} + 2 \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$$
   b Déterminer les coefficients du système ci-dessous afin que C soit le barycentre de ce système :
$$\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$$

---

2. Montrer que A est barycentre du système pondéré $\{(B;2);(C;-3)\}$

3. Déterminer les coefficients de pondérations des points A et C afin que ce système admette B pour barycentre.

E.4 La figure ci-contre représente deux triangles ABC et $A'B'C'$ admettant le même point G pour isobarycentre.



Établir la relation suivante : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$

E.5 Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

3. Suites et barycentres - Annales

E.6 **Partie A**

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

- A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$
- B_1 barycentre de $\{(A_0;1);(B_0;2)\}$

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n;1);(B_n;2)\}$

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12\,cm$.

   Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $(A_0;\overrightarrow{i})$ avec $\overrightarrow{i} = \frac{1}{12} \cdot \overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 12 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

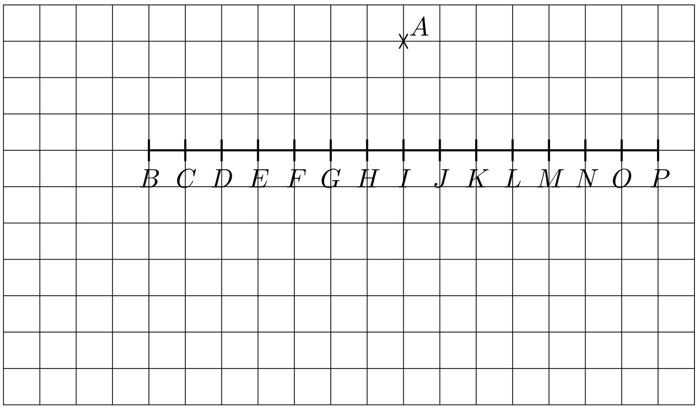
1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs ;
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par : $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.

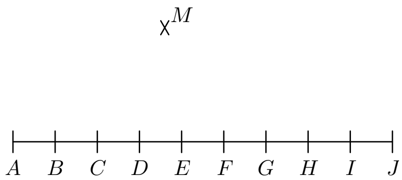
4. *Réduction et barycentre de deux points*

E.7



1. On définit le vecteur $\vec{u}$ défini par la relation : $\vec{u} = \overrightarrow{AL} + 2 \cdot \overrightarrow{AF}$
   a. Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$.
   b. Déterminer le barycentre du système : $\{(L\,;1)\,;\,(F\,;2)\}$.
   c. Réduire l'écriture du vecteur $\vec{u}$ sous la forme : $\vec{u} = k \cdot \overrightarrow{AZ}$ où $k \in \mathbb{R}$ et Z est un des 15 points du segment.
2. Pour chacune des questions suivantes, donner une simplification de l'expression en introduisant un système pondéré bien choisi et son barycentre ; puis, tracer un représentant de cette expression :
   a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$ b. $-\overrightarrow{AJ} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$

E.8 On considère le segment $[AJ]$ représenté ci-dessous subdivisé en 9 parts égales et M un point du plan :



1. Algébriquement, justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{MC} + 4 \cdot \overrightarrow{MH} = 5\overrightarrow{MG}$
2. Compléter les égalités suivantes :
   a. $-2 \cdot \overrightarrow{MB} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = \alpha \cdot \overrightarrow{M\ldots}$
   b. $-2 \cdot \overrightarrow{MC} - 5 \cdot \overrightarrow{MJ} = \beta \cdot \overrightarrow{M\ldots}$

5. *Règle d'homogénéité*

E.9 Soit A et B deux points du plan.

1. Donner un système pondéré à partir des points A et B dont le barycentre vérifie la relation suivante : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$
2. Donner un système pondéré à partir des points A et B dont le barycentre vérifie la relation suivante : $\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$

6. *Barycentre de trois points*

E.10 Dans chaque cas, déterminer la valeur des coefficients α, β, γ afin que le point G soit barycentre du système : $G\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta)\,;\,(C\,;\gamma)\}$

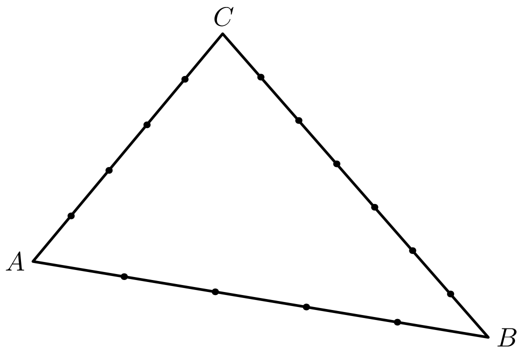
Les points A, B, C vérifient les relations :

1. $3 \cdot \overrightarrow{GA} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
2. M représente un point quelconque du plan : $5 \cdot \overrightarrow{MG} = 2 \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} + 3 \cdot \overrightarrow{MC}$

E.11 On considère dans le plan trois points A, B, C non-alignés.

Démontrer qu'il n'existe pas de point M vérifiant la relation : $3 \cdot \overrightarrow{MA} - 4 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

E.12 On considère le triangle ABC ci-dessous. Chacun de ses côtés a été partagé en 12 parts égales :



On souhaite déterminer l'emplacement du point G vérifiant la relation vectorielle :

$$4\cdot\overrightarrow{GA}+6\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

1. Considérons le point M vérifiant la relation vectorielle :
$$2\cdot\overrightarrow{MA}+3\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$$
   a. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que le point M vérifie la relation :
   $$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{BA}$$
   b. Placer le point M sur la figure.
   c. En utilisant la relation de Chasles et la définition du point G, établir la relation vectorielle suivante :
   $$10\cdot\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$
   d. En déduire que le point G appartient à la droite (MC).
2. Considérons le point N barycentre du système partiel :
$$\big\{(B\,;6)\,;\,(C\,;1)\big\}$$
Placer le point N sur la figure.
3. En déduire la position du point G.

E.13 Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct $\Big((\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{2}\Big)$. On note I son centre et J le milieu de $[AI]$.

Déterminer la valeur du nombre réel m afin que le point C soit le barycentre du système pondéré suivant :

$$\big\{(A\,;m)\,;\,(B\,;1)\,;\,(D\,;1)\big\}$$

E.14 À tout point M du plan, on associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MC}$$

Montrer que cette transformation du plan est l'homothétie de rapport -3 et de centre G, où G désigne le barycentre du système :

$$\big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;2)\big\}$$

E.15 *Parmi les trois propositions suivantes, une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.*

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que :

$$2\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$

Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

a. $\big\{(A\,;\,1)\,;\,(C\,;\,2)\big\}$

b. $\big\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,2)\big\}$

c. $\big\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,1)\big\}$

E.16 Soit A, B et C trois points non-alignés.

1. a. Soit M le point défini par la relation vectorielle :
   $$\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}\quad \text{où } \alpha\in\mathbb{R}$$
   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles :
   - le point M appartient au segment $[AB]$;
   - le point M appartient à l'ensemble $(AB)\backslash[AB]$

   b. Déterminer les conditions sur les deux nombres réels a et b afin que le barycentre G du système pondéré :
   $$\big\{(A\,;a)\,;\,(B\,;b)\big\}$$
   appartienne au segment $[AB]$.
2. On considère le barycentre H du système pondéré :
$$H\big\{(A\,;a)\,;\,(B\,;b)\,;\,(C\,;c)\big\}$$
Déterminer les conditions sur a, b et c afin que le point H appartienne à l'intérieur du triangle ABC.

E.17 *Pour l'affirmation suivante, une seule des propositions proposées est exacte. Donner la réponse exacte :*

Soit $ABCD$ un carré direct $\Big(\big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\big)=\dfrac{\pi}{2}\Big)$. On note I le centre du carré.

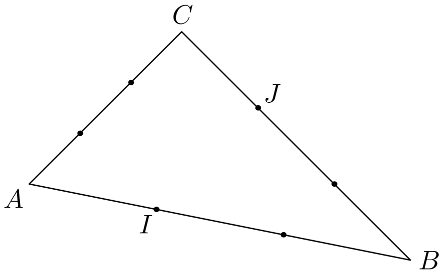
L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=AB$$

est :

1. la médiatrice de $[AC]$.
2. le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
3. la médiatrice de $[AI]$.
4. le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

E.18 Dans le plan, on considère le triangle ABC représenté ci-dessous où ses côtés sont partagés en trois parties égales.



1. a. Justifier que les deux systèmes pondérés suivants admettent le même barycentre :
$\Big\{(A\,;2)\,;\,(B\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;2)\Big\}$
$\Big\{(I\,;1)\,;\,(J\,;1)\Big\}$

   b. Justifier que le milieu du segment $[IJ]$ est le centre de gravité du triangle.

2. Placer les points suivants en servant uniquement d'une règle non-graduée ; les traits de construction doivent être présent sur la figure, mais aucune justification n'est demandée :

   a. Le point G centre de gravité du triangle ABC

   b. Le point H milieu du segment $[AC]$.

7. *Réduction d'expressions*

E.19 Soit A, B, C trois points du plan non-alignés. On considère les trois systèmes pondérés et leurs barycentres associés suivants :

$G\Big\{(A\,;2)\,;\,(B\,;1)\Big\}$; $H\Big\{(C\,;-1)\,;\,(B\,;2)\Big\}$

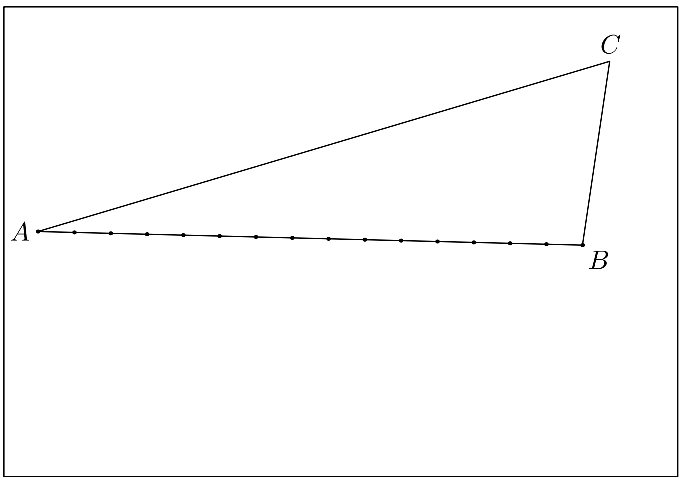
$I\Big\{(A\,;2)\,;\,(B\,;3)\,;\,(C\,;-1)\Big\}$

1. Justifier que ces trois systèmes admettent effectivement un barycentre.

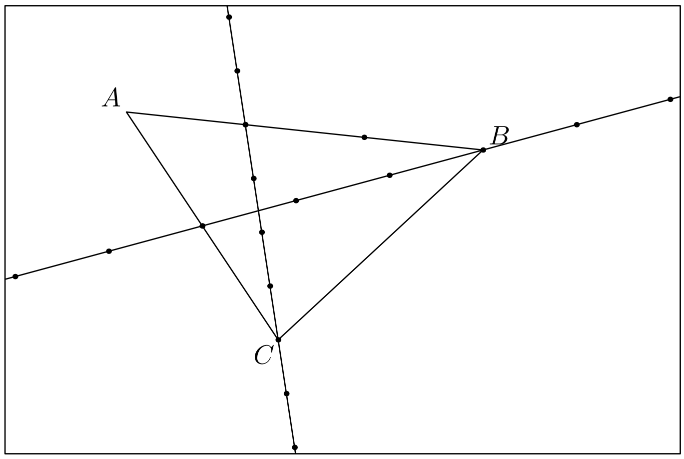
2. a. Justifier l'égalité vectorielle suivante :
$2{\cdot}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=3{\cdot}\overrightarrow{IG}$

   b. Démontrer que les trois points G, H, I sont alignés.

3. Ci-dessous est donnée la représentation de trois points du plan non alignés et où le segment $[AB]$ a été divisé en 15 parts égales. Déterminer la position du point I sur cette figure ; aucune justification n'est demandée.



E.20 Dans le plan, on considère les trois points A, B, C représentés ci-dessous :



Les marques représentées sur les segments ou sur les droites représentent un partage régulier de chacune d'eux.

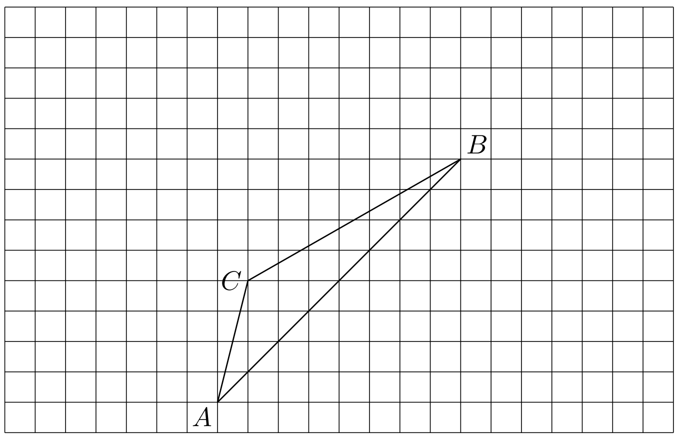
M représente un point du plan quelconque :

1. a. Placer, sans justification, le point G barycentre du système pondéré $\Big\{(A\,;2)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;1)\Big\}$

   b. Réduire l'expression vectorielle ci-dessous où M est un point quelconque du plan :
$2{\cdot}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

2. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, définis ci-dessous, sont colinéaires :
$\overrightarrow{u}=2{\cdot}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$
$\overrightarrow{v}=2{\cdot}\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2{\cdot}\overrightarrow{MC}$

E.21 Dans le plan, on considère trois points A, B, C non-alignés. On note :

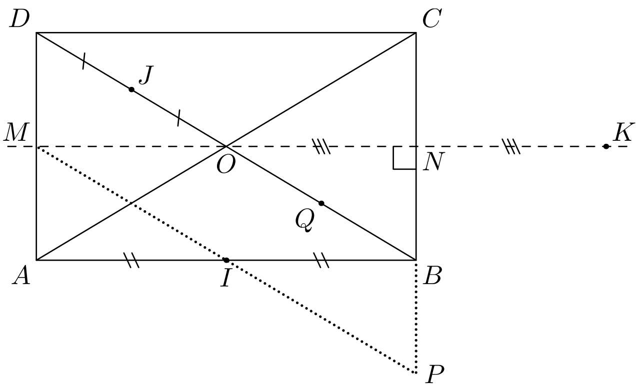


- I le barycentre du système $\{(B\,;1)\,;\,(C\,;\,-2)\}$
- J le barycentre du système $\{(A\,;-1)\,;\,(B\,;3)\}$
- G barycentre de $\{(A\,;1)\,;\,(B\,;-1)\,;\,(C\,;-4)\}$

1. Placer les points I et J dans le dessin ci-dessous.
2. a. Justifier l'égalité suivante :
$\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}-4\cdot\overrightarrow{IC}=-4\cdot\overrightarrow{IG}$
   b. En déduire l'égalité : $2\cdot\overrightarrow{IJ}=4\cdot\overrightarrow{IG}$.
   c. Placer le point G sur la figure.
3. En laissant vos traits de construction, tracer un représentant du vecteur :
$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}$

8. Règle d'associativité

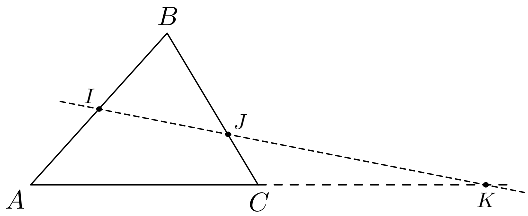
E.22 On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un rectangle. I est le milieu de $[AB]$; J milieu de $[DO]$ et K le symétrique de O relativement à la droite (CB).



1. a. Soit Q le milieu du segment $[OB]$.
Déterminer les coefficients d'un système pondéré $\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta)\,;\,(C\,;\gamma)\}$ admettent le point Q pour barycentre.
   b. En déduire la valeur de δ afin que le point J soit le barycentre de :
$\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta)\,;\,(C\,;\gamma)\,;\,(D\,;\delta)\}$
2. a. Soit M et N les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$. À l'aide du calcul vectoriel, montrer que :
$\overrightarrow{DK}-3\cdot\overrightarrow{CK}-3\cdot\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{0}$
   b. Déterminer la pondération apportée au sommet du rectangle pour que K soit le barycentre des points A, B, C et D.
3. a. Le point P est tel que : $\overrightarrow{CP}=\dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{CB}$
Justifier que I est le milieu du segment $[MP]$.
   b. En déduire des coefficients de pondérations non-nuls des quatre sommets du rectangle afin que I soit le barycentre de $ABCD$.

E.23 On considère un triangle quelconque ABC et les points I, J, K vérifiant les relations vectorielles suivantes :

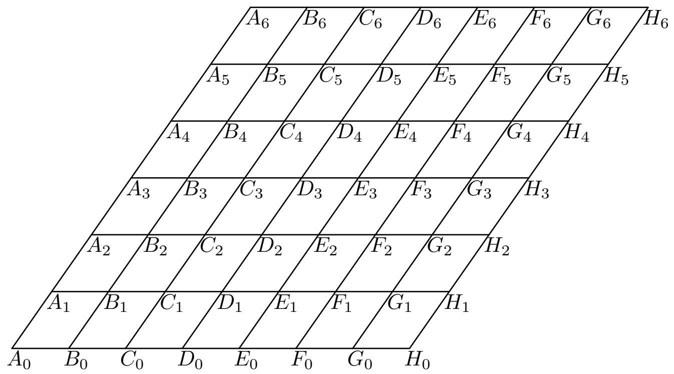
$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\quad;\quad\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CB}\quad;\quad\overrightarrow{AK}=2\cdot\overrightarrow{AC}$$



On souhaite montrer que les points I, J et K sont alignés.

1. a. Montrer que B est le barycentre du système pondéré de points $\{(C\,;-2)\,;\,(J\,;3)\}$
   b. En déduire la relation suivante :
$-2\cdot\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}$
2. Établir la relation suivante : $2\cdot\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}$
3. En déduire que I est barycentre du système :
$\{(J\,;3)\,;\,(K\,;-1)\}$

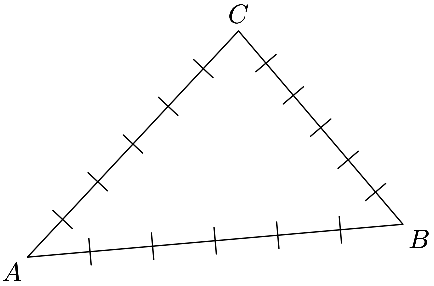
E.24 Dans le plan, on considère le quadrillage ci-dessous :



1. Déterminer le barycentre G du système :
$\{(A_1\,;1)\,;\,(C_5\,;1)\,;\,(F_5\,;2)\}$
2. En se servant uniquement des points présentés sur la figure, déterminer le barycentre H du système :
$\{(A_6\,;2)\,;\,(D_6\,;-2)\,;\,(B_4\,;-3)\}$
3. Déterminer la valeur de α, un nombre réel, afin que le système pondéré $\{(B_4\,;2)\,;\,(H_1\,;1)\,;\,(E_4\,;\alpha)\}$ admette le point B_1 pour barycentre.

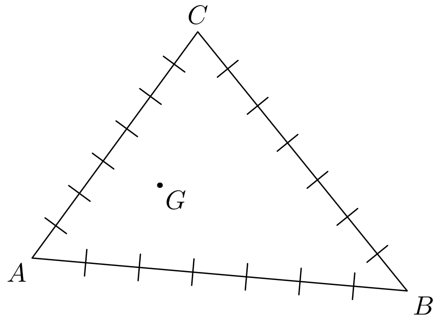
9. *Barycentre et caractérisation de droites*

E.25 On considère ci-dessous le triangle ABC dont chacun des côtés a été partagés en six parties égales.



1. a. Placer le point E le milieu de $[AC]$.
   b. Placer le point F barycentre du système pondéré suivant :
   $$\Big\{(A\,;1)\ ;\ (B\,;2)\Big\}$$
   c. Placer le point G barycentre du système pondéré suivant :
   $$\Big\{\Big(C\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\ ;\ (B\,;\sqrt{2})\Big\}$$
2. Tracer les trois droites (BE), (FC) et (AG).
   On remarque que les trois droites sont concourantes.
3. On considère le point H barycentre du système pondéré suivant de trois points :
   $$\Big\{(A\,;1)\ ;\ (B\,;2)\ ;\ (C\,;1)\Big\}$$
   a. Justifier que H est le barycentre du système pondéré suivant :
   $$\Big\{(F\,;3)\ ;\ (C\,;1)\Big\}$$
   b. Justifier que H est également le barycentre du système suivant :
   $$\Big\{(B\,;1)\ ;\ (E\,;1)\Big\}$$
   c. Justifier que le point H appartient à la droite (GA).
4. En déduire que les droites (BE), (FC) et (AG) sont concourantes.

E.26 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous dont tous les côtés ont été subdivisés en 7 parties égales et un point G placé à l'intérieur du triangle ABC.



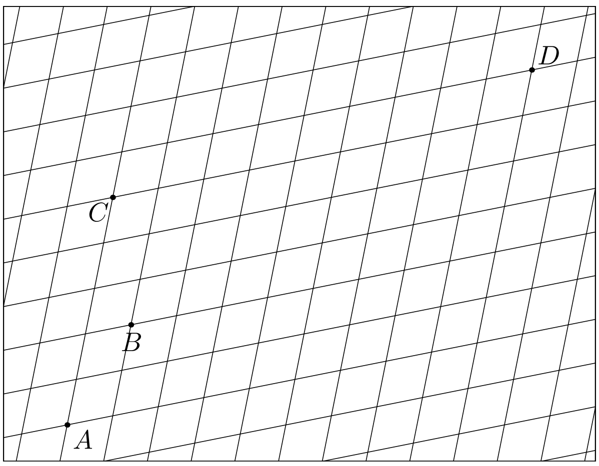
Déterminer la pondération affectée aux points A, B, C afin que G soit le barycentre du triangle ABC. Justifier votre démarche.

E.27 Dans le plan, on considère un triangle ABC. Soit I et J deux points vérifiant les relations vectorielles suivantes :
$$\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CA}$$
Soit O le point d'intersection des droites (AI) et (BJ). On note K le point d'intersection de (CO) avec la droite (AB).

Déterminer la valeur de α vérifiant la relation suivante :
$$\overrightarrow{BA} = \alpha\cdot\overrightarrow{BK}$$

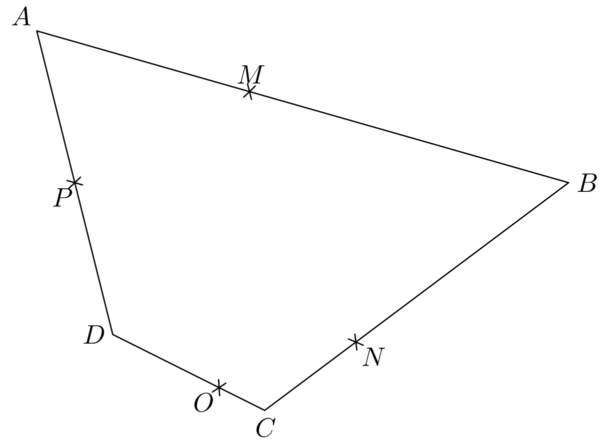
10. *Barycentre de plusieurs points*

E.28 On considère les quatre points A, B, C, D représentés ci-dessous :



Déterminer la position du barycentre du système pondéré suivant :
$$\Big\{(A\,;3)\,;\,(B\,;-5)\,;\,(C\,;2)\,;\,(D\,;1)\Big\}$$

E.29 Dans le plan, on considère le quadrilatère $ABCD$ ci-dessous :



Pondérant les points de cette figure, on obtient les points M, N, O, P barycentre partiel respectivement des couples suivants $(A\,;B)$, $(B\,;C)$, $(C\,;D)$, $(D\,;A)$:

1. a. Déterminer la position du barycentre partiel du triangle BCD.
   b. Déterminer la position du barycentre partiel du trian-

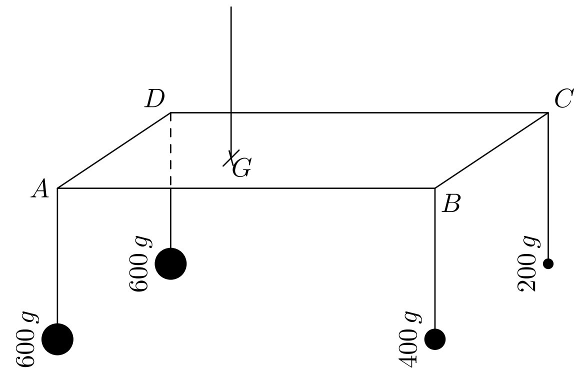
gle ABC.

2. En déduire la position du point G barycentre du quadrilatère $ABCD$.

E.30 On considère le plan munit de quatre points A, B, C et D.
Munis d'un poids, on obtient le système pondéré suivant $\big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;2)\,;\,(C\,;1)\,;\,(D\,;-2)\big\}$; on note G son barycentre.

1. Écrire une relation vectorielle faisant intervenir ces cinq points du plan.
2. En déduire que A est barycentre du système $\big\{(B\,;\beta)\,;\,(C\,;\gamma)\,;\,(D\,;\delta)\,;\,(G\,;\varepsilon)\big\}$ dont on déterminera les coefficients.

E.31 Un lustre possède quatre ampoules distinctes en poids et en tailles ; son armature en fer est de forme rectangulaire et de dimension $30\,cm$ sur $10\,cm$. Une représentation de ce lustre est donnée ci-dessous :

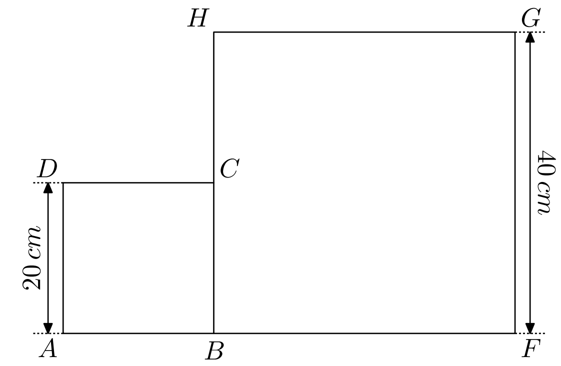


1. Tracer dans le plan le rectangle $ABCD$ à l'échelle $^1\!/_2$.

On souhaite trouver le centre de gravité de cette figure ; pour cela, on associe à ce problème le système pondéré $\big\{(A\,;3)\,;\,(B\,;2)\,;\,(C\,;1)\,;\,(D\,;3)\big\}$ et on recherche la position du point G :

2. Placer les points suivants :
   a. I barycentre partiel des points A et B.
   b. J le barycentre partiel des points B et C.
   c. K le barycentre partiel des points C et D.
   d. L le barycentre partiel A et D.
3. En déduire la position du point G sur la figure.

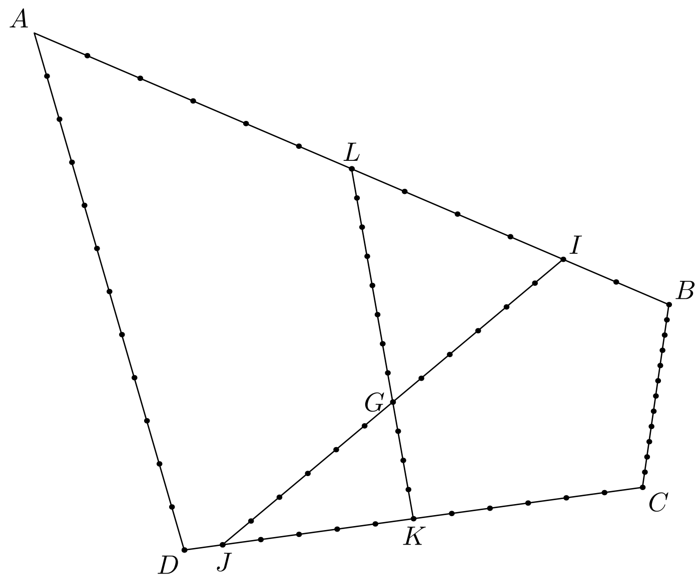
E.32 On considère une plaque de métal homogène et d'épaisseur constante ; on effectue la découpe suivante.



Les quadrilatères $ABCD$ et $CDEF$ sont deux carrés de côtés respectifs $20\,cm$ et $40\,cm$

1. Déterminer l'aire respective des deux carrés.
2. En déduire la position du centre de gravité de cette plaque.

E.33 Dans le plan, on considère le quadrilatère $ABCD$; chacun de ses côtés ont été partagés en douze parties égales. Les points I, J, K, L font parties de ce marquage ; les segments $[IJ]$ et $[KL]$ ont été partagés de la même façon.



Déterminer deux pondérations non homogènes du système $\big\{A\,;\,B\,;\,C\,;\,D\big\}$ admettant le point G pour barycentre.

11. *Barycentre et coordonnées*

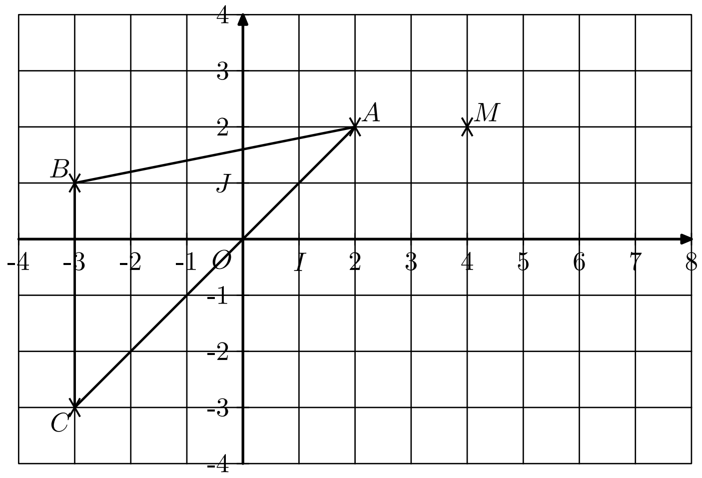
E.34 On munit le plan du repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(2\,;5)$, $(3\,;-2)$, et $(-3\,;-1)$

On considère le système pondéré suivant :

$$\big\{(A\,;1)\ ;\ (B\,;2)\ ;\ (C\,;4)\big\}$$

Déterminer les coordonnées du point G barycentre de ce système.

E.35 On considère le plan muni du repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ représenté ci-dessous :



Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives : $(2\,;2)$, $(-3\,;1)$, $(-3\,;-3)$.

On considère le système pondéré ci-dessous ayant pour le point G pour barycentre :

$$G\Big\{(A\,;2)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;1)\Big\}$$

1. a. Déterminer les coordonnées du point G.
   b. Placer le point G dans le repère.
2. Soit M le point du plan ayant pour coordonnée $(4\,;2)$. Placer le point H vérifiant la relation :
   $$\overrightarrow{MH} = 2{\cdot}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

12. *Barycentre et nombres complexes*

E.36 Dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, le point A a pour affixe i.

À tout point M d'affixe z avec $z\neq \mathrm{i}$, on associe le point M' dont l'affixe est définie par :
$$z' = \frac{-z^2}{z-\mathrm{i}}$$

On nomme G l'isobarycentre des points A, M et M' et g l'affixe de G :

1. Vérifier l'égalité : $g=\dfrac{1}{3{\cdot}(z-\mathrm{i})}$
2. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3{\cdot}r}$.
3. Démontrer que : $\arg(g)=-\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$

E.37 Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On prendra pour unité graphique $1\,cm$

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives :
$$z_A = 3+2{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_B = -3 \quad ; \quad z_C = -1-6{\cdot}\mathrm{i}$$

Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :
$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}{\cdot}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

13. *Espace et isobarycentre*

E.38 On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$. On considère les points :
$$P\,(1\,;2\,;3) \quad ; \quad Q(4\,;2\,;-1) \quad ; \quad R\,(-2\,;3\,;0)$$

Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane.

1. Montrer que le tétraèdre $OPQR$ n'est pas régulier.
2. On nomme P' le centre de gravité du triangle OQR. Calculer les coordonnées de P', centre de gravité du triangle OQR.
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3{\cdot}x+2{\cdot}y+16{\cdot}z=0$
4. On considère la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

   $\mathcal{P}$: *Dans un tétraèdre, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*

   La propriété $(\mathcal{P})$ est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

E.39 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$.

On considère les points :
$$A(1\,;-1\,;4) \quad ; \quad B(7\,;-1\,;-2) \quad ; \quad C(1\,;5\,;-2)$$

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}$
   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
   c. En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer les coordonnées du point G isobarycentre des points A, B, C.

E.40 ⚠ On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

1. Exprimer plus simplement le vecteur :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

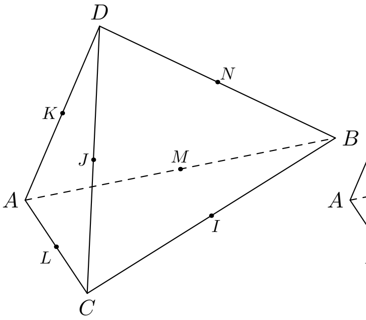
2. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$ est nul.

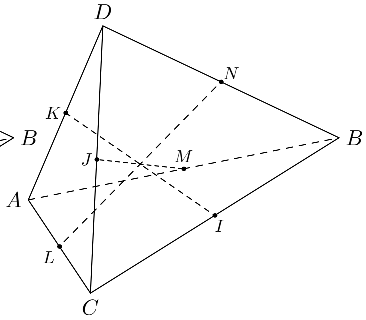
3. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

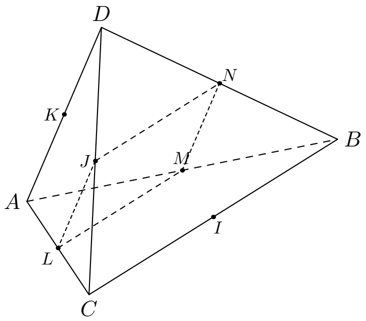
4. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

14. *Espace et barycentre*

E.41 On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous où I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[DC]$, $[AD]$, $[AC]$, $[AB]$, $[BD]$.







En se servant de l'isobarycentre du tétraèdre, montrer les deux questions suivantes :

1. Montrer que les droites (JM), (KI), (LN) sont concourantes.

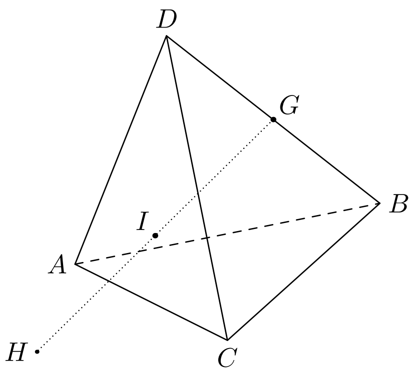
2. Montrer que le quadrilatère $JLMN$ est un parallélogramme.

Pour les deux questions suivantes, on se servira des théorèmes de géométrie classique :

3. Montrer que le quadrilatère $JLMN$ est un parallélogramme.

4. En déduire que les trois droites reliant les milieux de côtés opposés sont concourantes.

E.42 On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous :

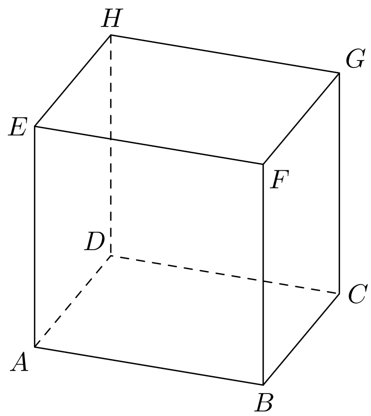


On considère :

- Le point G barycentre du système : $\big\{(D\,;2)\,;\,(B\,;2)\big\}$.
- Le point H barycentre du système :
$\big\{(A\,;3)\,;\,(B\,;-2)\,;\,(C\,;3)\big\}$.

On nomme I le milieu du segment $[GH]$. Justifier que le point I appartient au plan (ADC).

E.43 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormé $\big(D\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\big)$ tel que :
$\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DA} \quad ; \quad \overrightarrow{j} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DC} \quad ; \quad \overrightarrow{k} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DH}$

1. Donner les coordonnées des points A, C et E.

2. Déterminer les coordonnées du point I barycentre du système $\big\{(C\,;2)\,;\,(E\,;1)\big\}$

3. Déterminer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DI}$.

E.44 ⚠ Dans l'espace, on considère trois points A, B et C. On note G le barycentre du système :
$\big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;2)\big\}$

On considère La transformation, qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\cdot\overrightarrow{MC}$

Justifier que cette transformation est l'homothétie de centre G et de rapport 3.

15. *Espace, barycentre et droite*

E.45 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on donne les trois points :

$A(1\,;2\,;-1)$; $B(-3\,;-2\,;3)$; $C(0\,;-2\,;-3)$

On appelle G le barycentre du système pondéré :

$\{(A\,;1)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;2)\}$

1. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2\,;0\,;-5)$.
2. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan $(\mathcal{P})$ avec la droite (CG).

E.46 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on a les points :

$A\,(0\,;0\,;2)$; $B\,(0\,;4\,;0)$; $C\,(2\,;0\,;0)$

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B et C.

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse :

La droite (AG) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

E.47 On considère l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé .

Pour tout réel k, on considère le point M_k dont les coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 3\cdot k \\ z = 2 + k \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les coordonnées du point M_k dans les trois cas suivants :
   $k=0$; $k=1$; $k=-1$
   (b) Justifier que les points M_0, M_1 et M_{-1} sont alignés.
2. On considère le point A de coordonnées $(-1\,;9\,;4)$:
   (a) Le point A appartient-il à l'ensemble des points M_k?
   (b) Le point A appartient-il à la droite (M_0M_1)?
3. (a) Montrer que, pour tout k réel, les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_k}$ et $\overrightarrow{M_0M_1}$ sont colinéaires.
   (b) En déduire la nature de l'ensemble des points M_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$.
   (c) Sans justification, donner la nature de l'ensemble des points M_k lorsque k décrit chacun des trois ensembles suivants :
   $]-\infty\,;0]$; $[0\,;1]$; $[1\,;+\infty[$

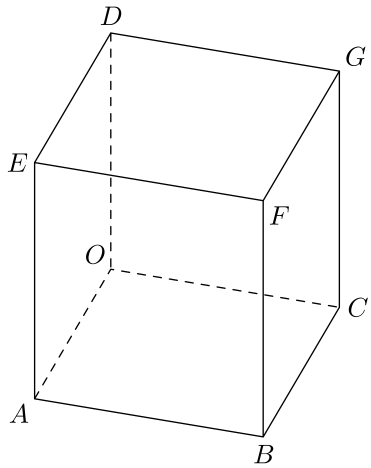
E.48 On considère le cube $OABCDEFG$ d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous. Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient Les points P et Q tels que :
$\overrightarrow{OP} = 2\cdot\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OQ} = 4\cdot\overrightarrow{OC}$

On appelle R le barycentre des points pondérés $(B\,;-1)$ et $(F\,;2)$.

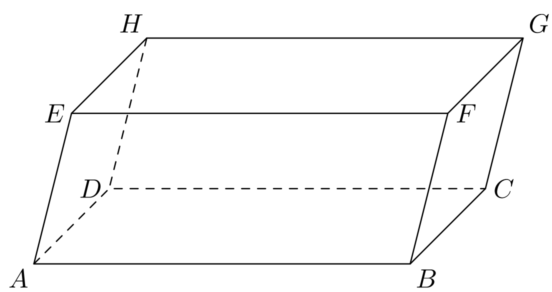
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.

1. (a) Démontrer que le point R a pour coordonnées $(1\,;1\,;2)$.
   (b) Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
   (c) Quelle est la nature du triangle PQR?
2. On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation :
   $4\cdot x + 2\cdot y + z - 8 = 0$
   (a) Montrer que les points P, Q, R vérifient l'équation.
   (b) Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).



16. *Espace, barycentre et recherche de la pondération*

E.49 On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



Le système pondéré suivant admet le point N comme barycentre :

$$\Big\{(A\,;1)\,;(B\,;-1)\,;(E\,;-1)\,;(D\,;-1)\Big\}$$

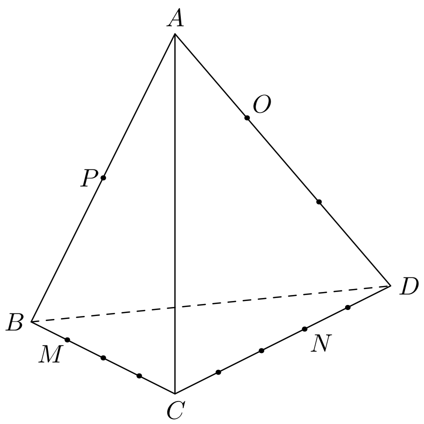
1. a. Donner un représentant, à l'aide des points de cette figure, de la somme suivante :
$\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}$

   b. Établir que le point N est le milieu du segment $[AG]$.

2. On munit l'espace du repère $\big(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\big)$. En se servant des coordonnées des points, établir que le point N est le milieu du segment $[AG]$.

3. On considère le système $\{E\,;F\,;A\,;H\}$; déterminer la pondération de ce système afin que son barycentre soit le point N

E.50 On considère le tétraèdre $ABCD$ présenté ci-dessous :



Les arêtes de ce tétraèdre ont été partagées en part égales. Les points M, N, O, P sont respectivement des points des arêtes $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$, $[AB]$.

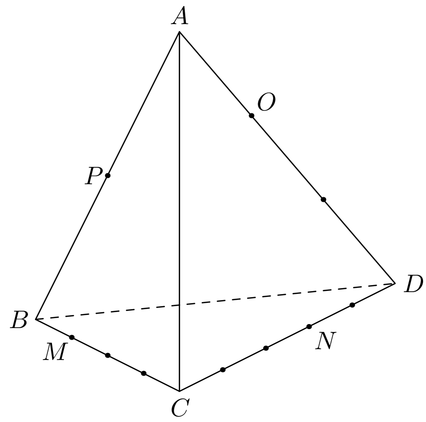
1. Déterminer la pondération, si elle existe, des sommets du tétraèdre afin que les points M, N, O, P soient les barycentres partiels des extrémités des arêtes auxquelles ils appartiennent.

2. Notons G le barycentre de ce tétraèdre :

   a. Justifier que le point G appartient à la droite (PN).

   b. En déduire que les points M, N, O, P sont coplanaires.

E.51 On considère le tétraèdre $ABCD$ présenté ci-dessous :



Les arêtes de ce tétraèdre ont été partagées en part égales. Les points M, N, O, P sont respectivement des points des arêtes $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$, $[AB]$.

1. Déterminer la pondération, si elle existe, des sommets du tétraèdre afin que les points M, N, O, P soient les barycentres partiels des extrémités des arêtes auxquelles ils appartiennent.

2. Notons G le barycentre de ce tétraèdre :

   a. Justifier que le point G appartient à la droite (PN).

   b. En déduire que les points M, N, O, P sont coplanaires.

E.52 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\Big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\Big)$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :
$A\,(-1\,;1\,;3)\quad;\quad B\,(2\,;1\,;0)\quad;\quad C\,(4\,;-1\,;5)$

Peut-on écrire C comme barycentre des points A et B?

E.53 On considère le tétraèdre $ABCD$; on note I milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1. a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés :
$$\big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;-1)\,;\,(D\,;1)\big\}$$
Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placer I, J et G_1 sur la figure *(voir feuille annexe)*.

   b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;(D\,;2)\big\}$.
Démontrer que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placer G_2.

   c. Démontrer que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

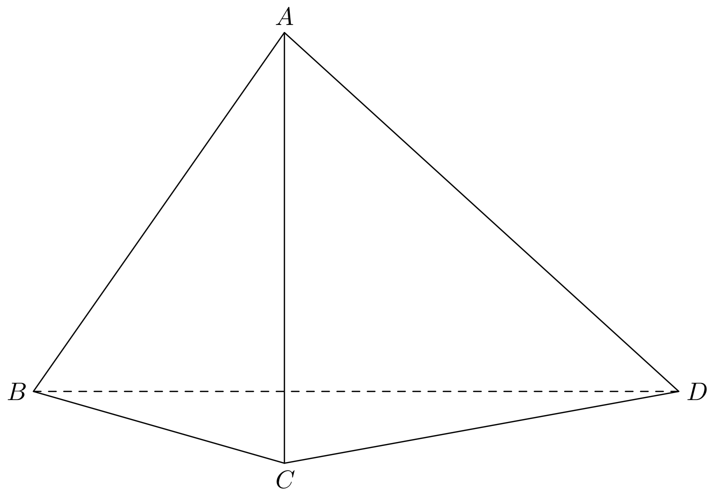
2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés :
$$\big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;m-2)\,;\,(D\,;m)\big\}$$

   a. Préciser l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

   b. Démontrer que G_m appartient au plan (ICD).

   c. Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

   d. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$.



E.54 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

On considère les points :
$A(-1\,;1\,;3)$; $B(2\,;1\,;0)$; $C(4\,;-1\,;5)$

Peut-on écrire le point C comme barycentre des points A et B.

17. *Espace, barycentre et lieu géométrique*

E.55 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$. On considère les points $A\,(3\,;1\,;3)$ et $B(-6\,;2\,;1)$.

Déterminer les caractéristiques de l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$$\big\|4\cdot\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\big\|=2$$

E.56 L'espace est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

On considère les points :
$A(1\,;-1\,;3)$; $B(0\,;3\,;1)$; $C(6\,;-7\,;-1)$
$D(2\,;1\,;3)$; $E(4\,;-6\,;2)$

1. a. Montrer que le barycentre du système :
$$\big\{(A\,;2)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;1)\big\}$$
est le point E.

   b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que :
$$\big\|2\cdot\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\big\|=2\cdot\sqrt{21}$$

2. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

E.57 *Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse :*

Soit B et C deux points de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que :
$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$
est la sphère de diamètre $[BC]$.

18. *Ancienne annales et suites (avant 2012)*

E.58 **Partie A**

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\,;\vec{u})$ donné en annexe, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n\,;2)$ et $(B_n\,;1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n\,;1)$ et $(B_n\,;3)$.

1. Sur le graphique, placer les points A_2, B_2.

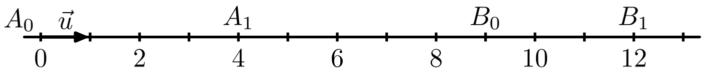
2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :
$$a_{n+1}=\frac{2\cdot a_n+b_n}{3}$$
On admet de même que : $\quad b_{n+1}=\dfrac{a_n+3\cdot b_n}{4}$

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
   $u_n = b_n - a_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
   b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante *(on pourra utiliser le signe de u_n)*.
   b. Étudier les variations de la suite (b_n).
3. Que peut-on dire des résultats précédents quant à la convergence des suites (a_n) et (b_n)?

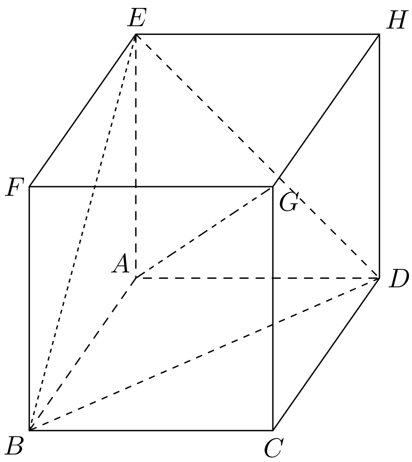
Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
   $v_n = 3{\cdot}a_n + 4{\cdot}b_n$
   Montrer que la suite (v_n) est constante.
2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).



19. *Ancienne annales et espaces (avant 2012)*

E.59 On considère le cube $aBCDEFGH$ ci-contre ; O_1 et O_2 sont les centres des carrés $ABCD$ et $EFGH$, et I est le centre de gravité du triangle EBD.



Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\Big\{(E\,;1)\,;\,(B\,;1{-}m)\,;\,(G\,;2m-1)\,;\,(D\,;1{-}m)\Big\}$$

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. a. Vérifier que les points A, G_m, E et O_1 sont coplanaires.
   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapportée au repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan ABD.
2. Déterminer les coordonnées du point G_m.
3. Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

E.60 Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\dfrac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$S_m = \Big\{(A\,;1)\,;\,(B\,;m)\,;\,(C\,;2m)\Big\}$$

Pour tout point M du plan, on note :

$$\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0.

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment $[CI]$	
G_1 est barycentre de $\left\{(J\,;2)\,;\,(C\,;\frac{2}{3})\right\}$	
Pour tout point M : $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$	
Pour tout „ distinct de $-\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$	
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$	

E.61 Dans le plan $(\mathcal{P})$, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur $[AH]$ tel que $AH = BC = 4$. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés :
$$\{(A\,;2)\,;\,(B\,;1)\,;\,(C\,;1)\}$$

2. On désigne le point M un point quelconque de $(\mathcal{P})$.
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V} = 2\cdot\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.
   b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :
$$\|2\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{V}\|$$

3. On considère le système de points pondérés :
$$\{(A\,;2)\,;\,(B\,;n)\,;\,(C\,;n)\}$$
où n est un entier naturel fixé.
   a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.
   b. Montrer que le point G_n appartient au segment $[AH]$.
   c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.
   Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.
   d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|2\cdot\overrightarrow{MA} + n\cdot\overrightarrow{MB} + n\cdot\overrightarrow{MC}\| = n\cdot\|\overrightarrow{V}\|$$
   Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A. En préciser le centre et le rayon, notée R_n.
   e. Construire E_2.

E.62 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ *(unité graphique : 2 cm).*

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$$z_A = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_B = \overline{z_A} \quad ; \quad z_C = -3$$

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_1 et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\cdot\mathrm{i}\cdot z^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.
   b. Placer les points A', B' et C'.
   c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.
2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.
   a. Déterminer les affixes des points G et G'.
   b. Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C'?
3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation :
$$y = -\frac{1}{3}\cdot x^2 + \frac{3}{4}$$
(On ne demande pas de tracer cette parabole)

E.63 On considère un tétraèdre $ABCD$. On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que :
$$AB = CD \quad ; \quad BC = AD \quad ; \quad AC = BD$$
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques)

1. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.
   b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

E.64 On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3.

Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;4)$ admettent un barycentre. On le note G.
2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E_1 : "*G appartient à la droite (BC)*" ;
   - E_2 : "*G appartient au segment $[BC]$*".

   b. Montrer que la probabilité de l'événement E_3 : "*G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés*" est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question 1

   On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à $0{,}999$.

E.65 L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;1\,;1)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;4\,;-2)$.
   Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives :
   $$2x+y+2z+1=0 \quad ; \quad x-2y+6z=0$$

   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles?
3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

   b. Montre que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G?

E.66 ⚠ $ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A. Un triangle et son centre de gravité

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   a. Calculer les coordonnées de I.
   b. Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G?
3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

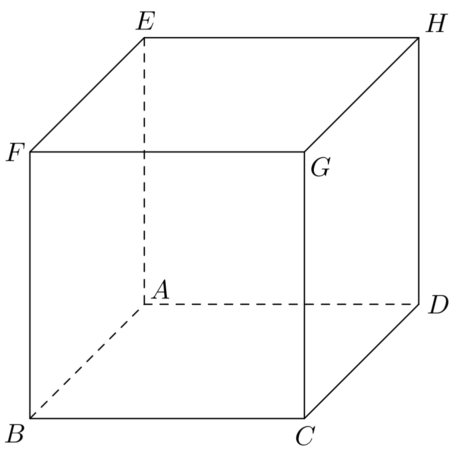
Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k}=k\cdot\overrightarrow{AG}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1. Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
2. Calcul des coordonnées de N_k.
   a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
   b. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.
   c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1\,;3\cdot k-1\,;0)$.
3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC)?
4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale?
5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

   Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.



E.67 ⚠ Pour chacune des huit affirmations *(entre guillemets)* ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention "vrai" ou "faux".

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.
Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. "*Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$"
2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$, g ne s'annulant pas :

   "*Si* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$ *et si* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$"
3. "*Si f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que* $0\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{x}$ *sur* $[0\,;+\infty[$ *alors* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$"
4. On considère un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.

   "*Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère* $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$"
5. "*La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :*
   $y'-y=(2x+3)\mathrm{e}^x$"
6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2

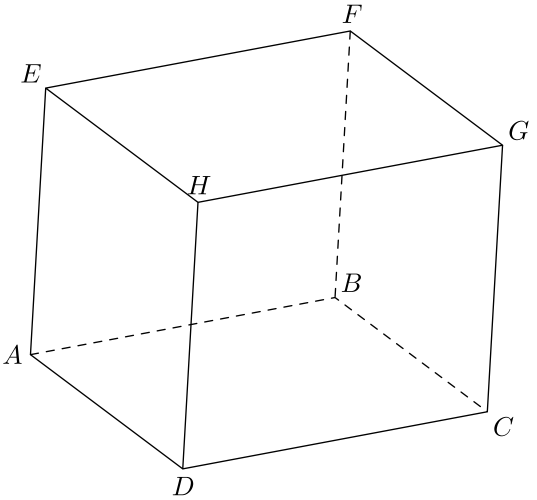
   "*Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu du segment $[CI]$*"
7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.

   "*L'ensemble des points M du plan tels que :*
   $\left\|3\cdot\overrightarrow{MA}-2\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$
   est le cercle de centre G et de rayon 1".
8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

   "*Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est nul si, et seulement si, $M=A$ ou $M=B$*".

20. *Exercices non-classés*

E.68 ⚠ On considère dans l'espace un cube de $3\,cm$ de côté, noté $ABCDEFGH$ et représenté ci-dessous :



Soit I le barycentre des points pondérés $(E\,;2)$ et $(F\,;1)$, J celui de $(F\,;1)$ et $(B\,;2)$ et enfin K celui $(G\,;2)$ et $(C\,;1)$.

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Δ cet ensemble

1. Placer les points I, J et K sur la figure ci-dessus.
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormé suivant :

$$\left(A\,;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.
4. Soit $P\,\big(2\,;0\,;0\big)$ et $Q\,\big(1\,;3\,;3\big)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.
   a. Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\,;y\,;z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ?
   b. Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. a. Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω

E.69 ⚠ Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et M un point quelconque de ce cercle $\mathscr{C}$.

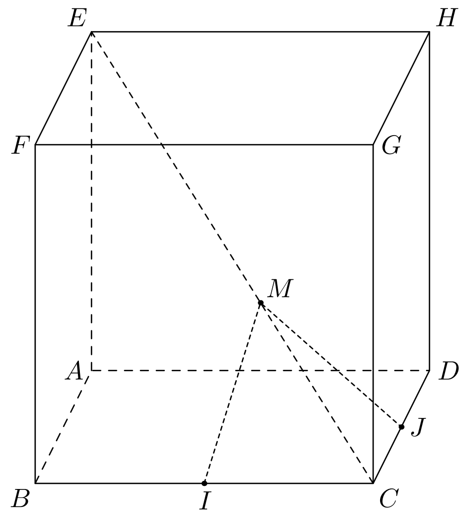
Le point D est défini par : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{ID}$

1. Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}$ sont nuls.

   En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.
2. Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IG}$.

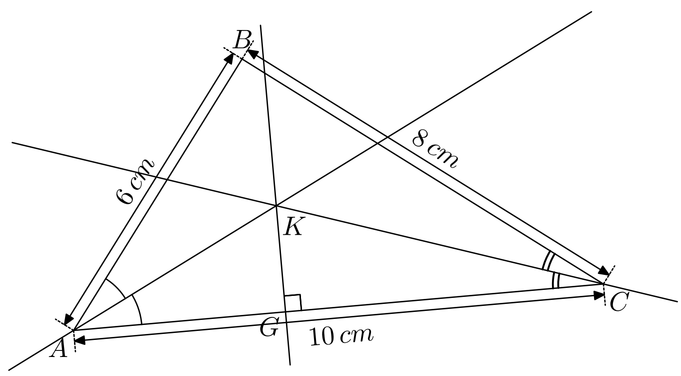
E.70 La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\big(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\big)$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $\big[0\,;1\big]$, tel que les coordonnées du point M soient $\big(1-t\,;1-t\,;t\big)$.
2. a. Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$.
   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
   c. Exprimer IM^2 en fonction de t.

E.71 Dans le plan, on considère la configuration ci-dessous :



1. Donner le programme de tracé de cette configuration en commençant par la phrase :

   "Tracer le triangle ABC tel que :
   $AC=10\,cm$; $BC=8\,cm$; $AB=6\,cm$"
2. Les tracés suivants doivent être tracés à l'aide de la règle graduée et du compas :
   a. Reproduire cette figure en vraie grandeur.
   b. Tracer le cercle de centre K et passant par le point G. Que remarquez-vous?

