Hors programme lycée / Comportements asymptotiques

1. Première approche

E.1 On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{2{\cdot}x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x)=\frac{2{\cdot}x^2+x}{5{\cdot}x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2{,}1}{3{,}01}$	$\frac{2{,}01}{3{,}000\,1}$	$\frac{2{,}001}{3{,}000\,001}$	$\frac{2{,}000\,1}{3{,}000\,000\,01}$

x	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	$\frac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\frac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$	$\frac{-0{,}999\,998}{0{,}001}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0{,}12}{0{,}5}$	$\frac{0{,}010\,2}{0{,}05}$	$\frac{0{,}001\,002}{0{,}005}$	$\frac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$

Remarquer que, dans chaque tableau, les valeurs de x “*progressent lentement*” vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs approchées de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :
   “*x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*”
   Pour la fonction f, cette valeur se note :
   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$

2. À l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au “*voisinage*” de l'axe des ordonnées.

2. Calculs de limites à l'infini

E.2 Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x{\cdot}(2x+1)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} (3-4x)(x+1)$

c. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} 3x^2+2x+\frac{3}{2x+1}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{3x-4}{5+\frac{1}{x}}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{3}{2x-1}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{x^2+x}{x^3-2x}$

E.3 Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2x^4-x^3$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} 5x^3-2x^2$

c. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{3}{5-2x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \sqrt{2+x^2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{x^2+1}{-x^4+x}$

E.4 Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{3x+2}{5-3x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{x^2+3x-1}{2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+7}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{5x^2-3}{5-3x^2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{x^4+3x+1}{x^3-2x^2+4}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}}$

E.5 Déterminer chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -5x^3-7x$ b. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2x^3-3x^2$

c. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{x^7-5x^6}{2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{x^5-x^3+2}{-2x^2-x+2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{x^3-x^2+5}{x^4+3x+1}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{x^2-5x+2}{-3x^2+5x-1}$

3. Calcul de limites en un réel

E.6 Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{1}{2}^-} \frac{3}{2x-1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \frac{-2}{3-x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{3}{2}^+} \frac{4-x}{3-2x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 5^-} \frac{(x-5)(7-x)}{2x-10}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 4^-} \frac{1}{\sqrt{8-2x}}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -2^-} \frac{3x^2+4x-4}{2x+4}$

E.7 Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{3x^4 - 2x^2}{5x^2 - x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{6x^{12} + 5x^6 - 3x^2}{3x^8 - 5x^2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x\sin x}$

E.8 Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x^2+2}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 + x - 6}$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{3}{2}^-} \sqrt{3 - 2x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 3x + 1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{5}{\sqrt{x^2+x}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 4^-} 5x + 3 - \frac{2}{x-4}$

E.9 Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{x^4 - x^3}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{x+5}{4-2x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1} \frac{x+1}{x^2-1}$ d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^+} \frac{x-5}{3x^2 - 11x + 6}$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{1}{3}^+} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+} \frac{-2x^2 + 7x - 6}{x^2 - 4x + 4}$

4. *Calculs de limites*

E.10 Déterminer la valeur des limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^3 - 2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{1}{2}^+} \frac{3x - 2}{-2x^2 + 7x - 3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^-} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{2+x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3} \frac{4x^2 - 12x + 9}{-x^2 + 5x - 6}$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\infty} x - \sqrt{2x^2+1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} x - \sqrt{2x^2+1}$

E.11 Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{\frac{1}{x} - x^2}{x - 1}$

c) $\cancel{\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x\sin x}}$ d) $\cancel{\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^2+1} - x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -3^-} \frac{\sqrt{6-x} - 3}{2x^2 + 5x - 3}$ f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x - x\sqrt{x}}$

E.12 Déterminer la valeur des limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^5 - 2x^2}{x^2 + \sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^2 - 4} - x$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 4^-} \frac{4 - 2\sqrt{x}}{x - 4}$ d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \sqrt{x^3 + 2} - x$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2x^2 - 4x + 2}$

E.13 Donner si possible la valeur des limites suivantes ; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{x-2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2} \frac{2x+1}{3x^2 - 3x - 2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -5} \frac{x^2}{(x+5)^2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^-} \frac{1}{\sqrt{-x-2}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} x^2 - x + 1$ f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1^+} \frac{x-3}{2x+2}$

5. *Asymptote horizontale et verticale*

E.14 En observant chacun des tableaux de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser ci la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

a)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variation de f	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

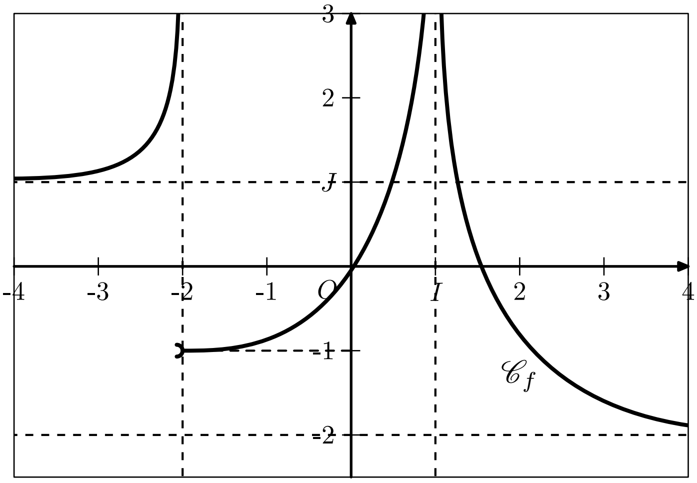
b)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	-1 ‖ -1	$\nearrow$	$+\infty$

c)

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Variation de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

E.15 Ci-dessous est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$ a été représentées en pointillés.

Dresser le tableau de variations complet de cette fonction.

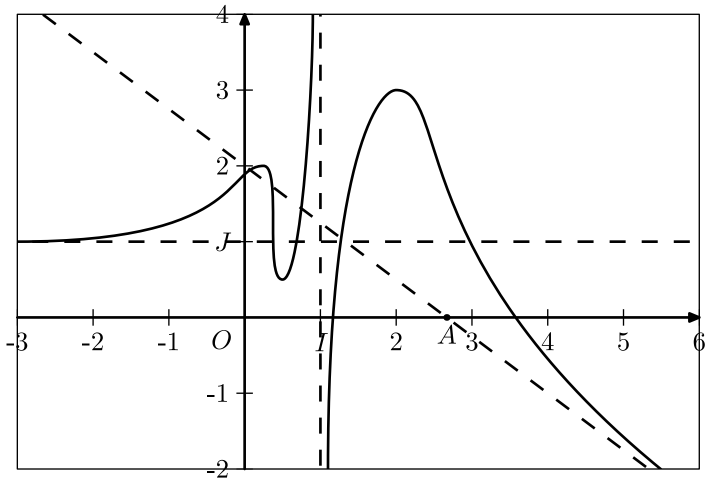
6. *Asymptote oblique*

E.16

1. On considère la fonction f définie dont l'image d'un nombre x est défini par :
$$f(x) = \frac{6x^3+x^2+7x+9}{2x^2-x+3}$$
Montrer que la droite (d) d'équation $y{=}3x{+}2$ est l'asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie par la relation :
$$g(x) = \frac{4x^2-8x+5}{3-2x}$$
Déterminer les valeurs des nombres réels a et b vérifiant :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \big[g(x)-(a{\cdot}x+b)\big] = 0$$

E.17 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on a représenté la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-3\,;6]\backslash\{1\}$



Les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont représentés en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 1^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$$

7. *Asymptote oblique et étude*

E.18 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels a, b, c vérifiant :
$$a{\cdot}x+b+\frac{c}{x+3} = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$
   b. En déduire une expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f *(n'oublier aucune valeur dans le tableau)*.

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

E.19 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{6x^2+x+1}{2x+1}$$

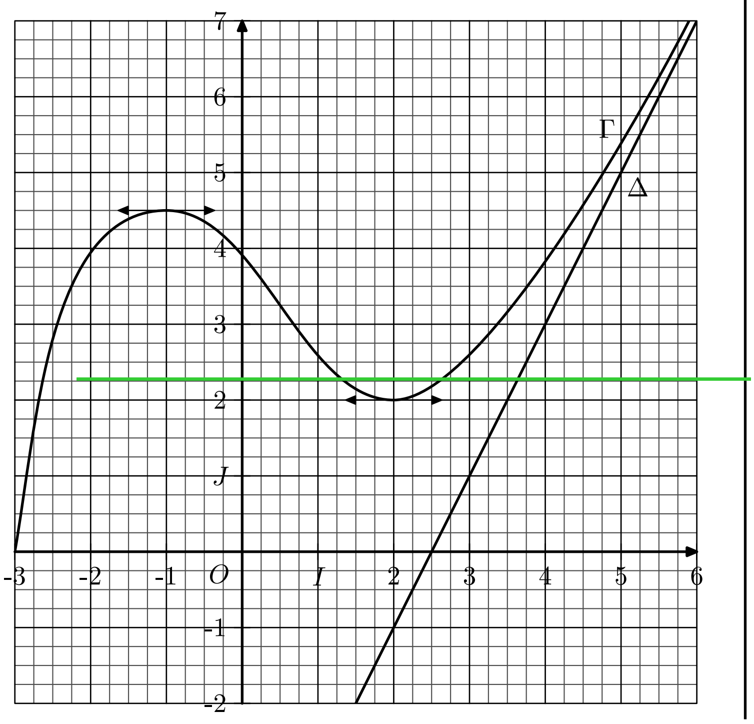
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   - a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
   - b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   - c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   - d. En étudiant les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.
2. Montrer que la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite (d) d'équation $y=3x-1$ pour asymptote oblique.

E.20 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$, croissante sur les intervalles $\left[-3\,;-1\right]$ et $\left[2\,;+\infty\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left[-1\,;2\right]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$.
2. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \left|f(x)-(2x-5)\right| = +\infty$.
4. $f'(0) = 1$
5. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[-2\,;1\right]$

E.21 Soit f a fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\cdot x}$$

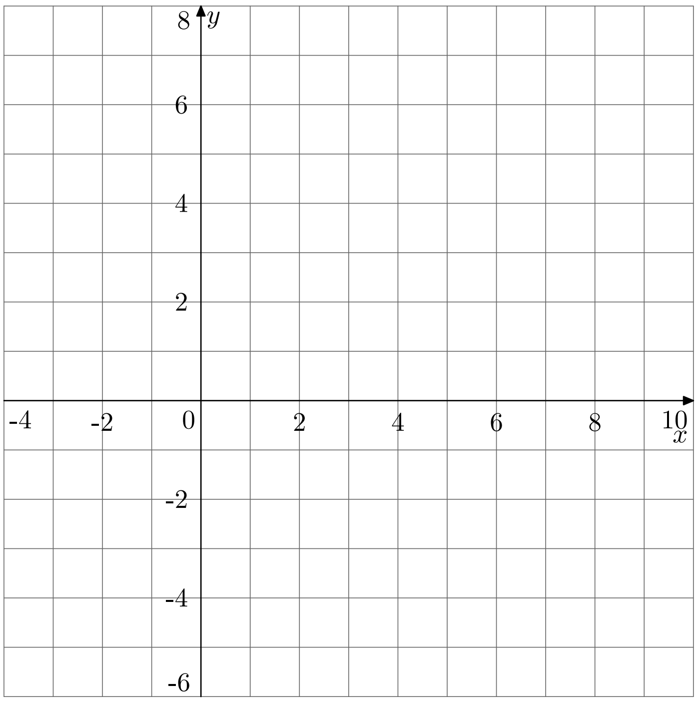
et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$.

1. a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.
   - b. Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ *(pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$*)*.
   - c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
2. a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y=m$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.
   - b. Pour tout $m>\sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $\left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot y$.

8. *Limites et fonctions homographiques*

E.22

1. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2+x}{x-3}$.



Voici un des paradoxes de Zénon d'Elée *(500 - 430 Avant Jésus Christ)* :

> "Il n'y a point de mouvement, car il faut que le mobile arrive au milieu de son parcours avant d'atteindre la fin"

2 a Ainsi, nous allons nous déplacer sur une droite graduée du point $A(4)$ vers le point $B(3)$: on dira que c'est un déplacement vers la gauche, mais également que l'on se dirige vers 3, mais en restant avec des valeurs supérieures à 3, on notera $x \longmapsto 3^+$. En se déplaçant à la manière de Zénon d'Elée, on notera :

- u_0 l'abscisse de position initiale : c'est-à-dire 4 ;
- u_1 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,5 ;
- u_2 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,25 ;

...

Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	4	3,5	3,25					

b Vérifier, en vous servant des fonctions et du tableau de valeurs de votre calculatrice, que la valeur de u_n peut s'exprimer **en fonction** de la valeur de n par la relation *(fonctionnelle)* suivante :

$$u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c Donner, pour les trois premières précision demandée dans le tableau ci-dessous, à partir de quelle valeur de n, u_n est une valeur approchée de 3 :

Précision	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-10}
Valeur de n				

d Pour utiliser cette formule dans le tableau, nous allons la transformer :

$$\left[3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - 3 < 0{,}5\times10^{-10}$$

$$\left[\left[3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - 3\right]\times10^{10} < 0{,}5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times10^{10} < 0{,}5$$

Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant cette l'inégalité.

e Existe-t-il un n vérifiant $u_n=3$?
Peut-on dire qu'il existe un rang N à partir duquel u_n devienne une valeur approchée de 3 à 10^{-100} près.
On notera que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=3$. Cela signifie que la position u_n sera aussi proche que l'on souhaite de 3, pour autant qu'on augmente la valeur n.

3 a Montrer que : $f(x)=1+\dfrac{5}{x-3}$

b Soit n un nombre entier, on pose $x=3+\dfrac{1}{2^n}$. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de n. Simplifier cette écriture.

c Compléter le tableau suivant à l'aide des valeurs exactes :

x	4	3,5	3,25	3,125	3,0625	3,03125
$f(x)$						

d Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x s'approche de plus en plus vers 3 par la gauche. On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$.

e Que peut-on dire de la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $x=3$. On dira que la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$

4 Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x)$; c'est-à-dire de la valeur limite de l'image de x lorsque x vers 3 par la droite *(en gardant des valeurs inférieures à 3)*.

Nous allons maintenant étudier le comportement de la fonction f lorsque x va tendre vers $+\infty$.

5 a On considère la suite de nombre défini par $v_n=3+2^n$. Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5
v_n					

b Compléter le tableau suivant avec les valeurs exactes :

x	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$f(x)$					

c Que peut-on de la valeur de f lorsque x tend vers $+\infty$. On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *(la valeur limite de l'image de x par la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$)*

d Que peut-on dire de la position relative de la courbe relativement à la droite d'équation $y=1$? On dira que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

e Imaginer rapidement quel sera la valeur de $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

E.23 On appelle fonction homographique toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ avec a, b, c et d des nombres réels fixés.

1. a. Pour quelle valeur de x cette fonction n'est pas définie.
   b. Que pouvez-vous dire dans le cas où $c=0$ et $d=0$.

On admet la proposition suivante :

Toute fonction homographique $x \longmapsto \dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto \alpha + \dfrac{\beta}{c\cdot x+d}$

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition, ainsi que leurs valeurs de α et β :

$$g : x \longmapsto \frac{3x+2}{x+1} \quad ; \quad h : \longmapsto \frac{x}{1-2x}$$

$$k : x \longmapsto \frac{2x-4}{5+2x}$$

3. En déduire pour chacune d'elles l'équation de leurs asymptotes horizontales et verticales.

9. *Exercices non-classés*

E.24 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "à *gauche*" et "à *droite*".

$$f : x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2} \quad ; \quad g : x \longmapsto \frac{1}{(2x-1)(3x+5)}$$

$$h : x \longmapsto \frac{x+2}{4x^2+4x+1} \quad ; \quad j : x \longmapsto \frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$k : x \longmapsto \frac{x+2}{2x^2+5x+2}$$

E.25 faire exercice de la forme limite en 0

$$\left(2x^2+x\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)$$

et

$$\frac{2x^2+x}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}$$