Hors programme lycée / Comportements asymptotiques

1. Première approche

E.1 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. En traçant la courbe représentative de cette fonction à votre calculatrice, faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\mapsto-\frac{1}{2}^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\frac{1}{2}^-} f(x)$$

3. a. Établir la relation algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{-5}{4x+2} + \frac{3}{2}$$

   b. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} f(x)$$

4. a. Que peut-on dire du signe de $3x-1$ lorsque x se rapproche de $-\dfrac{1}{2}$?

   b. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\frac{1}{2}^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\frac{1}{2}^-} f(x)$$

E.2 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2-x+3}{3x-1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Tracer la courbe représentative de cette fonction à votre calculatrice.

   b. En effectuant des "*Zoom out*", observer l'allure de la courbe au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Que pouvez-vous dire sur l'allure de la courbe?
3. a. Établir la relation algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{3}{3x-1} + x$$

   b. Donner la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) - x \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) - x$$

4. En déduire les observations faîtes à la calculatrice.

E.3 On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2{\cdot}x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2{\cdot}x^2+x}{5{\cdot}x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2{,}1}{3{,}01}$	$\frac{2{,}01}{3{,}000\,1}$	$\frac{2{,}00\,1}{3{,}000\,001}$	$\frac{2{,}000\,1}{3{,}000\,000\,01}$

x	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	$\frac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\frac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$	$\frac{-0{,}999\,998}{0{,}00\,1}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0{,}12}{0{,}5}$	$\frac{0{,}010\,2}{0{,}05}$	$\frac{0{,}001\,002}{0{,}005}$	$\frac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$

Remarquer que, dans chaque tableau, les valeurs de x "*progressent lentement*" vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression des valeurs décimales arrondies de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :

   "*x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*"

   Pour la fonction f, cette valeur se note :

   $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x)$.
2. À l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "*voisinage*" de l'axe des ordonnées.

2. Manipulations des formes indéterminées

E.4

1. a. Expliquer pourquoi la limite suivante est une forme indéterminée :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x^2-x+1$$

   b. En justifiant l'égalité ci-dessous, donner la valeur de la limite de la question précédente :

$$x^2-x+1 = x^2\Big(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)$$

2. a. Expliquer pourquoi la limite suivante est une forme indéterminée :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2x^2+2x+1}{3x^2-2}$$

   b. En justifiant l'égalité ci-dessous, donner la valeur de la limite de la question précédente :

$$\frac{2x^2+2x+1}{3x^2-2} = \frac{x^2\Big(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Big)}{x^2\Big(3-\dfrac{2}{x^2}\Big)}$$

3. La limite ci-dessous est une forme indéterminée ; à l'aide d'une transformation adéquate, déterminer la valeur de cette limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-2x^2+1}{2x+1}$$

E.5 On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2+5x-6}{x-1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :
$$\lim_{x\mapsto 1^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto 1^+} f(x).$$
   b. Montrer que, pour $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(x)=x+6$
   c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a.

3. Calculs de limites à l'infini

E.6 Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot(2x+1)$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} (3-4x)(x+1)$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 3x^2+2x+\frac{3}{2x+1}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3x-4}{5+\frac{1}{x}}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{3}{2x-1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^2+x}{x^3-2x}$

E.7 Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^4-x^3$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 5x^3-2x^2$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3}{5-2x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \sqrt{2+x^2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^2+1}{-x^4+x}$

E.8 Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3x+2}{5-3x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2+3x-1}{2x+1}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+7}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{5x^2-3}{5-3x^2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^4+3x+1}{x^3-2x^2+4}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}}$

E.9 Déterminer chacune des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} -5x^3-7x$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3-3x^2$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^7-5x^6}{2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^5-x^3+2}{-2x^2-x+2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^3-x^2+5}{x^4+3x+1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^2-5x+2}{-3x^2+5x-1}$

4. Calcul de limites en un réel

E.10 Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^-} \frac{3}{2x-1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^-} \frac{-2}{3-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^+} \frac{4-x}{3-2x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto5^-} \frac{(x-5)(7-x)}{2x-10}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^-} \frac{1}{\sqrt{8-2x}}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-} \frac{3x^2+4x-4}{2x+4}$

E.11 Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \frac{3x^4-2x^2}{5x^2-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \frac{6x^{12}+5x^6-3x^2}{3x^8-5x^2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{1}{x\sin x}$

E.12 Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{x^2+2}{x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto2} \frac{x^2-4x+4}{2x^2+x-6}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^-} \sqrt{3-2x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0} \frac{x^3-2x}{2x^2-3x+1}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{5}{\sqrt{x^2+x}}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^-} 5x+3-\frac{2}{x-4}$

E.13 Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^+} \frac{1}{(x-3)(x-5)}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^+} 3x-2-\frac{2x+1}{2+x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} (2x^2+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{2}{5}^+} \frac{10x^2+x-2}{-2x^2-5x-2}$

E.14 Déterminer les valeurs des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\frac{x^4-x^3}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+}\frac{x+5}{4-2x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1}\frac{x+1}{x^2-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3^+}\frac{x-5}{3x^2-11x+6}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{1}{3}^+}\frac{3x^2+2x-1}{x-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^+}\frac{-2x^2+7x-6}{x^2-4x+4}$

5. *Calculs de limites*

E.15 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{|x|}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{|x|}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

E.16 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{4x^2+2x-1}{-2x+1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\frac{2}{3}^+}\frac{3x^2-1}{12x^2+23x+10}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{-x^2+x+6}{4x^2+16x+16}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{(1-x)^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^+}\frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^+}\frac{8-x\sqrt{x}}{x-4}$

Indication pour la question (f), déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant la factorisation suivante :

$$64-x^3=(x-4)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$$

E.17 Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x+\cos x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2+\cos x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

E.18 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x^3-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^+}\frac{3x-2}{-2x^2+7x-3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{2x-\sqrt{x+3}}{2+x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto3}\frac{4x^2-12x+9}{-x^2+5x-6}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$

E.19 Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+}\frac{\frac{1}{x}-x^2}{x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{x\sin x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-3^-}\frac{\sqrt{6-x}-3}{2x^2+5x-3}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{x-x\sqrt{x}}$

E.20 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^5-2x^2}{x^2+\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2-4}-x$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^-}\frac{4-2\sqrt{x}}{x-4}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^3+2}-x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{2x^2-4x+2}$

E.21 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}-3x^4+2x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\Big(\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\Big)(3x^2-2x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^6-3x^2}{3x^2+7x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3x-\sqrt{x}}{2x+3}$

E.22 Donner si possible la valeur des limites suivantes ; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

(a) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\mapsto2}\frac{2x+1}{3x^2-3x-2}$

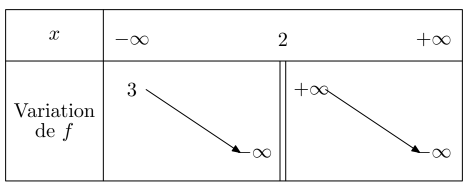
(c) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-5}\frac{x^2}{(x+5)^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{1}{\sqrt{-x-2}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x^2-x+1$ (f) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{x-3}{2x+2}$

6. *Asymptote horizontale et verticale*

E.23 En observant chacun des tableaux de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser si la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

(a)



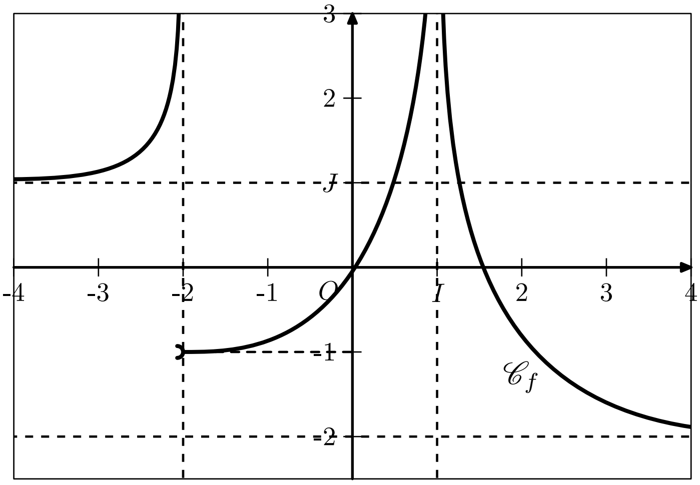
(b)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	-1 ‖ -1	$\nearrow$	$+\infty$

(c)

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Variation de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

E.24 Ci-dessous est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$ ont été représentées en pointillés.

Dresser le tableau de variations complet de cette fonction.

7. *Asymptote oblique*

E.25

(1) (a) Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2+3x-2}{2(x+1)} - \frac{1}{2}x - 1$$

(b) Donner l'équation de l'asymptote oblique de la fonction f en $+\infty$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+3x-2}{2(x+1)}$$

(2) (a) Déterminer les valeurs de a et de b afin que :

$$a{\cdot}x+b+\frac{2}{x+2} = \frac{-6x^2-11x+8}{3(x+2)}$$

(b) Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$ de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{-6x^2-11x+8}{3(x+2)}$$

E.26

(1) On considère la fonction f définie dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{6x^3+x^2+7x+9}{2x^2-x+3}$$

Montrer que la droite (d) d'équation $y{=}3x{+}2$ est l'asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

(2) On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \frac{4x^2-8x+5}{3-2x}$$

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b vérifiant :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \big[g(x)-(a{\cdot}x+b)\big] = 0$$

E.27 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

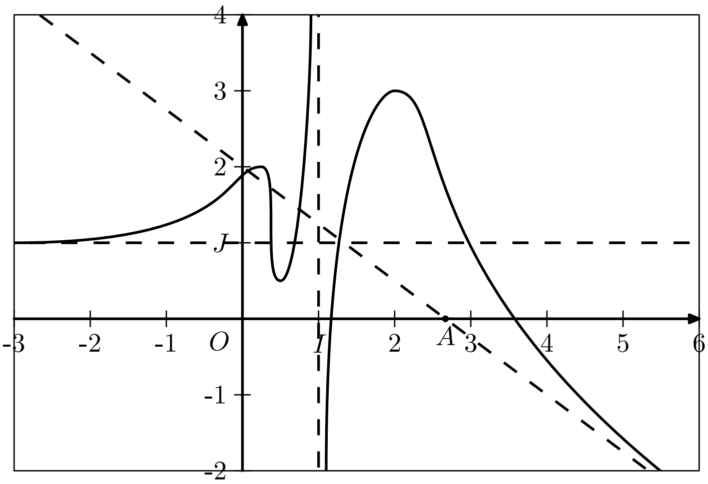
$$f(x) = \frac{8x^2-2x-5}{2x+1}$$

(1) Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant l'égalité :

$$f(x) = a{\cdot}x+b+\frac{c}{2x+1} \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

(2) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation.

E.28 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on a représenté la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-3\,;6]\backslash\{1\}$



Les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont représentés en pointillées.

(1) Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

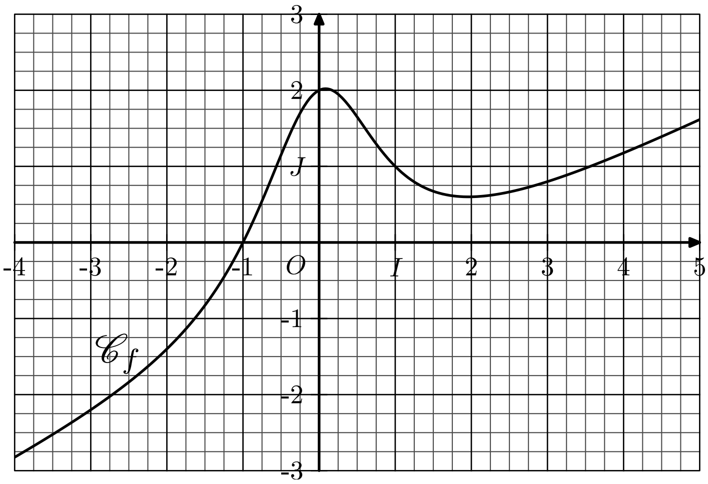
(2) Donner la valeur de chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 1^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$$

E.29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{2(x^2+1)}$$

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$:



1. a. Déterminer trois réels a, b et c vérifiant la relation :
$$f(x) = a{\cdot}x + b + \frac{c}{x^2+1}$$
   b. En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Tracer la droite (Δ)

2. On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ a pour position relative avec $\mathscr{C}_f$:
   - $\mathscr{C}_g$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty\,;1[$;
   - $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $]1\,;+\infty[$.

   a. Effectuer le tracé d'une fonction g vérifiant les conditions ci-dessus.
   b. Faire une conjecture quant à la valeur des deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} g(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} g(x)$$

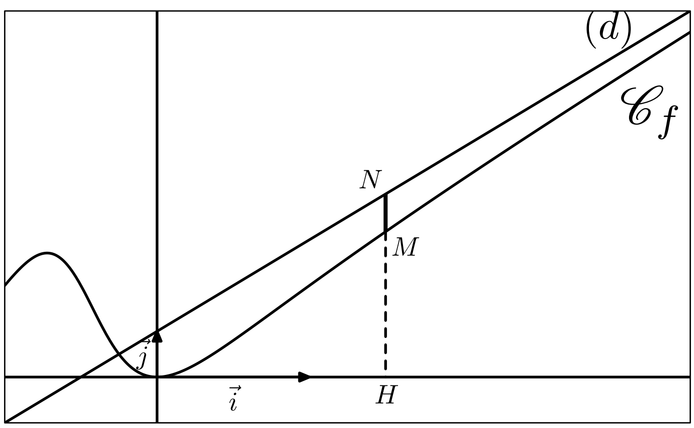
8. *Asymptote oblique et étude*

E.30 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{2x^2(2x+3)}{2x^2+2x+1}$$

1. a. Déterminer les deux nombres réels a et b vérifiant la relation :
$$f(x) = a{\cdot}x + b - \frac{4x+1}{2x^2+2x+1}$$
   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote oblique (d) en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on précisera l'équation réduite.

2. Voici une représentation de cette courbe et de son asymptote oblique :



On considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N est le point de la droite (d) d'abscisse x.
Le point H est la projection orthogonale de ces deux points sur l'axe des ordonnées ; il a pour coordonnée $H(x\,;0)$.

Dans les prochaines questions, on étudie la distance MN pour des valeurs de x appartenant à $\mathbb{R}^+$:

   a. Exprimer la distance MN en fonction de x.
   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$\left|\frac{4x+1}{2x^2+2x+1}\right| \leqslant \frac{2}{x}$$
   Indication : on pourra se servir du fait que chaque terme est positif sur $\mathbb{R}^+$
   c. En déduire l'existence d'un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ sur lequel $MN \leqslant 10^{-6}$.

E.31 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$

1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels a, b, c vérifiant :
$$a{\cdot}x + b + \frac{c}{x+3} = \frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$
   b. En déduire une expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f *(n'oublier aucune valeur dans le tableau).*

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

E.32 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{6x^2+x+1}{2x+1}$$

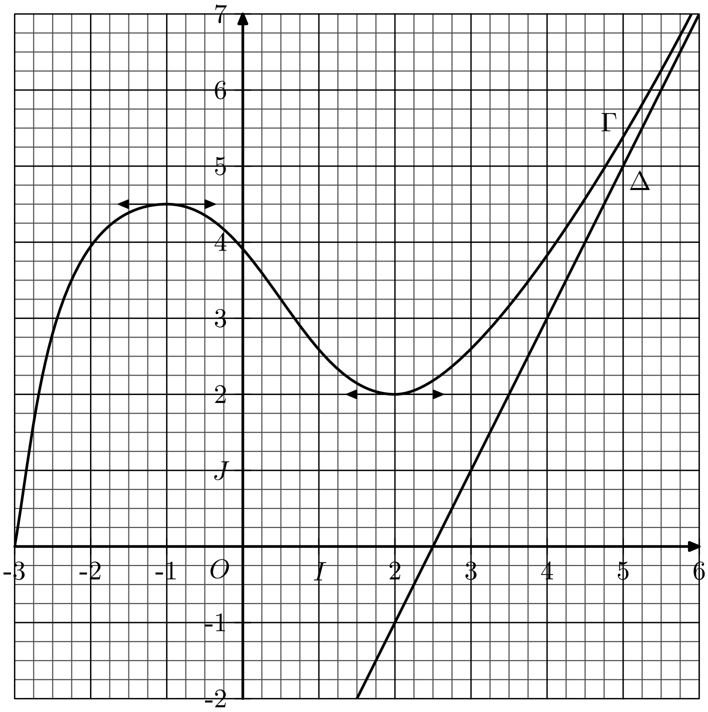
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   d. En étudiant les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.
2. Montrer que la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite (d) d'équation $y=3x-1$ pour asymptote oblique.

E.33 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\big[-3\,;+\infty\big[$, croissante sur les intervalles $\big[-3\,;-1\big]$ et $\big[2\,;+\infty\big[$ et décroissante sur l'intervalle $\big[-1\,;2\big]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $\big[-3\,;+\infty\big[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\big(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\big)$.

Elle passe par le point $A(-3\,;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $\big[-3\,;+\infty\big[$.
2. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$
3. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \Big|f(x)-(2x-5)\Big| = +\infty$.
4. $f'(0) = 1$
5. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\big[-2\,;1\big]$

E.34 Soit f la fonction définie sur $\big]0\,;+\infty\big[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\cdot x}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$.

1. a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$.
   b. Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ *(pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera* $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\Big(f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}\Big)$*).*
   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
2. a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y=m$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.
   b. Pour tout $m>\sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $\big]\sqrt{2}\,;+\infty\big[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot y$.

9. *Encadrement*

E.35 On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{-2x^2-2x-3}{x^2-2x-3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. a. Dresser le tableau de signes de l'expression x^2-2x-3.
   b. En déduire la valeur des limites suivantes :
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^-} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+} f(x)$
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^-} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^+} f(x)$
4. a. Établir que la dérivée de la fonction f est :
   $$f'(x) = \frac{6x(x+3)}{\big[(x-3)(x+1)\big]^2}$$
   b. Dresser le tableau de variations complet de la fonction

f.

5) a) Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 100$

b) Le résultat de la question précédente correspond-il à ceux de la question 3) ? Justifier votre réponse.

6) a) Résoudre l'inéquation : $f(x)+2 \leqslant 6\times10^2$

b) Résoudre l'inéquation : $-6\times10^{-2} \leqslant f(x)+2$

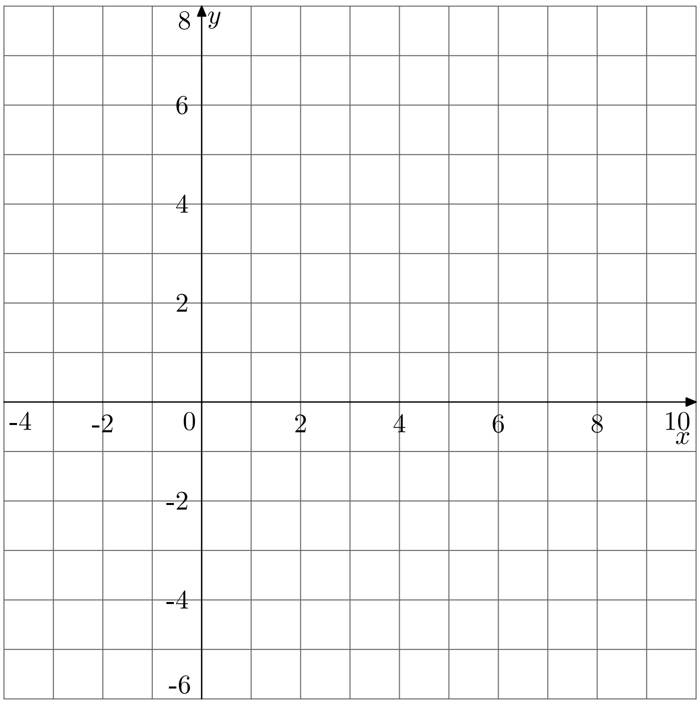
c) En déduire les solutions de l'encadrement suivant :
$|f(x)+2| \leqslant 6\times10^{-2}$

7) Les résultats trouvés à la question précédente sont-ils concordants avec les résultats obtenus à la question 2).

10. *Limites et fonctions homographiques*

E.36

1) Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2+x}{x-3}$.



Voici un des paradoxes de Zénon d'Élée *(500 - 430 Avant Jésus-Christ)* :

> "Il n'y a point de mouvement, car il faut que le mobile arrive au milieu de son parcours avant d'atteindre la fin"

2) a) Ainsi, nous allons nous déplacer sur une droite graduée du point $A(4)$ vers le point $B(3)$: on dira que c'est un déplacement vers la gauche, mais également que l'on se dirige vers 3, mais en restant avec des valeurs supérieures à 3, on notera $x \longmapsto 3^+$. En se déplaçant à la manière de Zénon d'Élée, on notera :

- u_0 l'abscisse de position initiale : c'est-à-dire 4 ;
- u_1 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,5 ;
- u_2 l'abscisse de la moitié du parcours restant : 3,25 ;

...

Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	4	3,5	3,25					

b) Vérifier, en vous servant des fonctions et du tableau de valeurs de votre calculatrice, que la valeur de u_n peut s'exprimer **en fonction** de la valeur de n par la relation *(fonctionnelle)* suivante :
$$u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) Donner, pour les trois premières précisions demandées dans le tableau ci-dessous, à partir de quelle valeur de n, u_n est une valeur approchée de 3 :

Précision	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-10}
Valeur de n				

d) Pour utiliser cette formule dans le tableau, nous allons la transformer :
$$\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-3 < 0{,}5\times10^{-10}$$
$$\left[\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-3\right]\times10^{10} < 0{,}5$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times10^{10} < 0{,}5$$
Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant cette inégalité.

e) Existe-t-il un n vérifiant $u_n = 3$?
Peut-on dire qu'il existe un rang N à partir duquel u_n devienne une valeur approchée de 3 à 10^{-100} près.
On notera que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 3$. Cela signifie que la position u_n sera aussi proche que l'on souhaite de 3, pour autant qu'on augmente la valeur n.

3) a) Montrer que : $f(x) = 1+\dfrac{5}{x-3}$

b) Soit n un nombre entier, on pose $x = 3+\dfrac{1}{2^n}$. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de n. Simplifier cette écriture.

c) Compléter le tableau suivant à l'aide des valeurs exactes :

x	4	3,5	3,25	3,125	3,0625	3,03125
$f(x)$						

d) Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x s'approche de plus en plus vers 3 par la gauche. On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$.

e) Que peut-on dire de la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $x = 3$. On dira que la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

4) Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x)$; c'est-à-dire de la valeur limite de l'image de x lorsque x vers 3 par la droite *(en gardant des valeurs inférieures à 3)*.

Nous allons maintenant étudier le comportement de la fonction f lorsque x va tendre vers $+\infty$.

5 a On considère la suite de nombre défini par $v_n = 3+2^n$. Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5
v_n					

b Compléter le tableau suivant avec les valeurs exactes :

x	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$f(x)$					

c Que peut-on de la valeur de f lorsque x tend vers $+\infty$. On notera cette valeur $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ *(la valeur limite de l'image de x par la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).*

d Que peut-on dire de la position relative de la courbe relativement à la droite d'équation $y=1$? On dira que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

e Imaginer rapidement quelle sera la valeur de $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$.

E.37 On appelle fonction homographique toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ avec a, b, c et d des nombres réels fixés.

1 a Pour quelle valeur de x cette fonction n'est pas définie.

b Que pouvez-vous dire dans le cas où $c=0$ et $d=0$.

On admet la proposition suivante :

Toute fonction homographique $x\longmapsto\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ peut s'écrire sous la forme $x\longmapsto\alpha+\dfrac{\beta}{c\cdot x+d}$

2 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition, ainsi que leurs valeurs de α et β :

$$g : x\longmapsto\frac{3x+2}{x+1} \quad ; \quad h : \longmapsto\frac{x}{1-2x}$$

$$k : x\longmapsto\frac{2x-4}{5+2x}$$

3 En déduire pour chacune d'elles l'équation de leurs asymptotes horizontales et verticales.

11. *Exercices non-classés*

E.38 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "*à gauche*" et "*à droite*".

$$f\ :\ x\longmapsto\frac{3x+1}{x-2} \quad ; \quad g\ :\ x\longmapsto\frac{1}{(2x-1)(3x+5)}$$

$$h\ :\ x\longmapsto\frac{x+2}{4x^2+4x+1} \quad ; \quad j\ :\ x\longmapsto\frac{2x-4}{x^2-1}$$

$$k\ :\ x\longmapsto\frac{x+2}{2x^2+5x+2}$$

E.39 faire exercice de la forme limite en 0

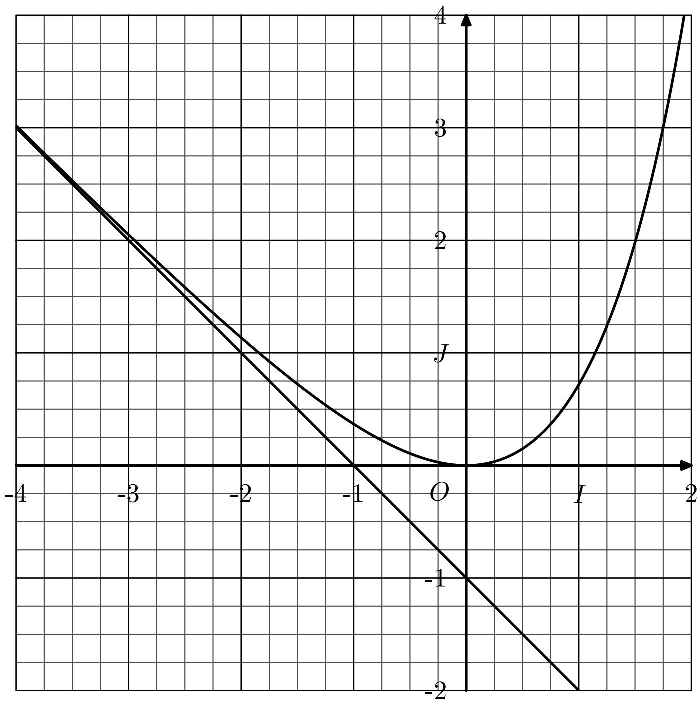
$$\Big(2x^2+x\Big)\Big(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\Big)$$

et

$$\frac{2x^2+x}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}$$

E.40 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x-x-1$ et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

La droite (D) d'équation $y=-x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté ci-dessous la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).



1 Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse a.

2 Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que : $b-a=-1$.

3 En déduire une construction, à effectuer sur la feuille an-

nexe, de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

E.41 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x}{2{\cdot}x^3 - 2{\cdot}x^2 + x}$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{3{\cdot}x^2 + 2}{2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x + 1}$$
Montrer que f est la restriction sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction g.

2. En déduire la limite de la fonction f en 0. C'est-à-dire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x \neq 0}} f(x)$.