



Hors programme lycée / Fonctions associées et composée de fonctions

1. Introduction de composée

E.1   Soit f la fonction définie dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

① Établir l'égalité suivante : $\frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$

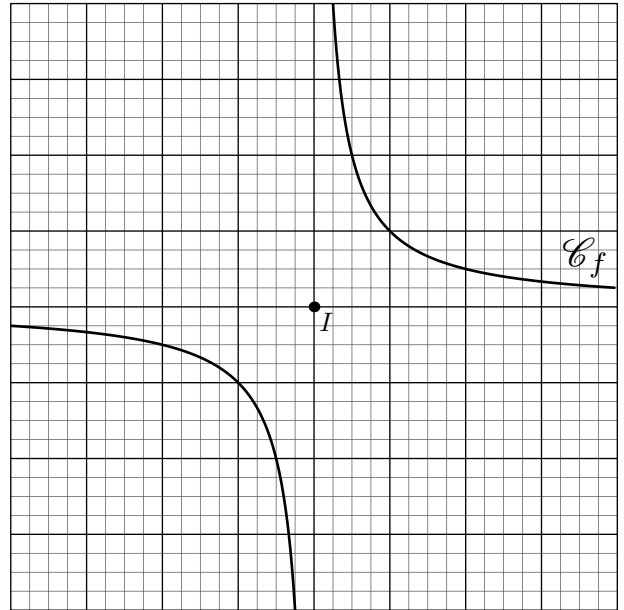
On note g la fonction inverse. À la question précédente, nous venons d'établir que :

$$f(x) = g(x-2) + 1$$



② Par quelle transformation du plan, obtient-on la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f à partir de l'hyperbole \mathcal{C}_g représentative de la fonction inverse?

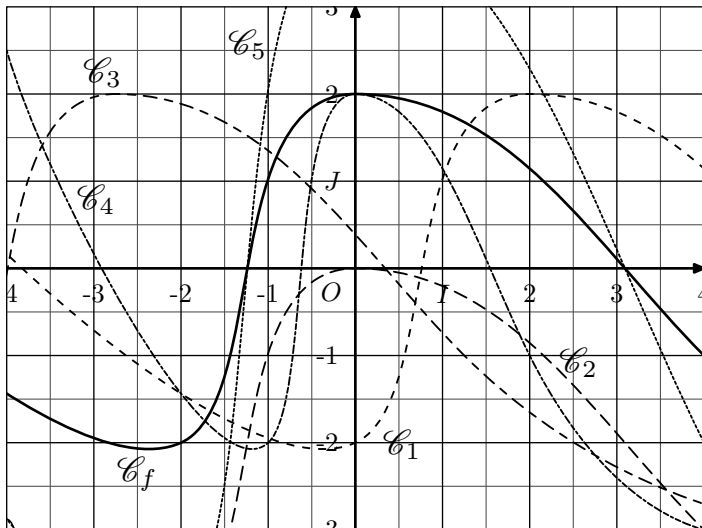
La figure ci-dessous représente l'hyperbole obtenue par la fonction inverse et I son centre de symétrie.

③ Placer correctement le repère pour que cette courbe soit la représentation de la fonction f .



2. Composée de fonctions

E.2   On considère la fonction f dont la courbe représentative est donné dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :





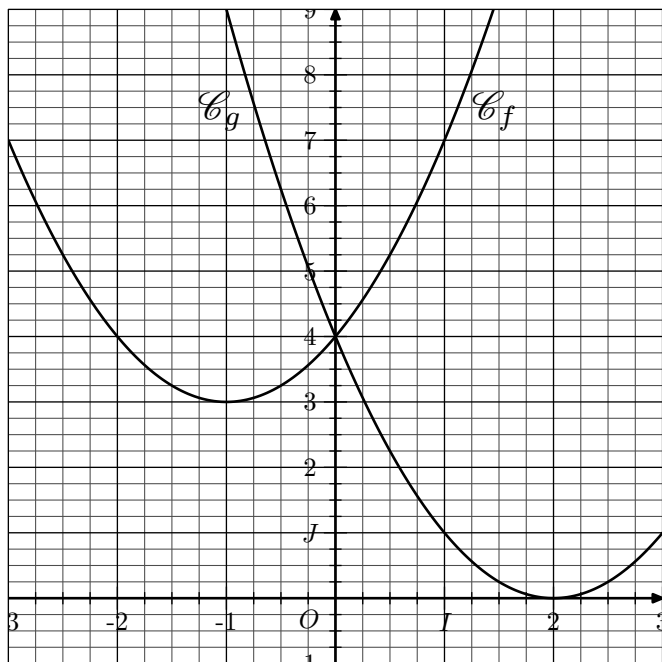
Dans ce repère est également donnée les courbes représentatives associées à la fonction f dont voici les expressions algébriques :

$$g : x \mapsto f(x+2) \quad ; \quad h : x \mapsto f(2 \cdot x) \quad ; \quad j : x \mapsto f(x-2)$$

$$k : x \mapsto 2 \cdot f(x) \quad ; \quad l : x \mapsto f(x) - 2$$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative.

E.3   On considère les deux repères $(O; I; J)$ dans lesquels ont été tracées des courbes représentatives de polynômes de second degré :





1 La courbe \mathcal{C}_f est la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto x^2 + 2x + 4$$



La fonction g est définie, explicitement par la fonction f , par la relation suivante :

3. Composé et expressions

E.4   Dans chacune des questions suivantes, donner l'expression algébrique de $(f \circ g)(x)$ en fonction de x :

- a $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = 2 - x$
- b $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 4$
- c $f(x) = x - 4$ et $g(x) = x^2$
- d $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x + 2$
- e $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$
- f $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = 2x + 1$

4. Composé et tableau de variation

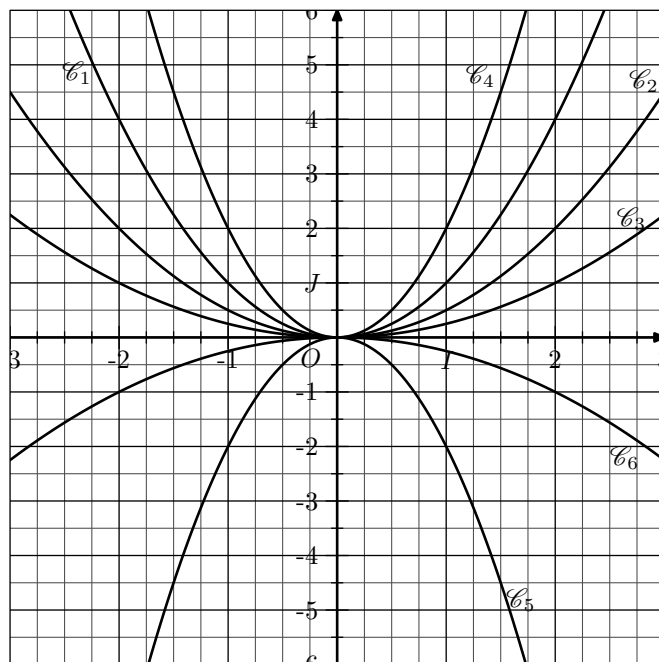
E.6   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation suivante :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

- 1 a Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.
- b Dresser le tableau de variations de la fonction f .
(On indiquera également les deux racines de la fonction f)

$$g(x) = f(x + \alpha) + \beta \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$



- a Déterminer, à l'aide des représentations de ces deux fonctions, les valeurs des nombres réels α et β .
- b Dédire la forme développée réduite de l'expression de $f(x)$.



2 Les courbes \mathcal{C}_1 à \mathcal{C}_6 sont les représentations de fonctions définies par la relation :

$$x \mapsto \alpha \cdot x^2 \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

Déterminer pour chaque fonction la valeur de α .

E.5   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par la relation :

$$f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$$

- 1 Pour $x \in [0; 1]$, établir l'égalité suivante :
 $(f \circ f)(x) = x$
- 2 Pour $x \in [1; +\infty[$, déterminer une expression simplifiée de la fonction $f \circ f$.

2 On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} admettant le tableau de variations suivant :



x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
Variation de g		1		$+\infty$
	-1		-3	

a) Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x)$$

b) Justifier que la fonction $f \circ g$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

c) Justifier et préciser la monotonie de la composée $g \circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants :
 $]-\infty; -3]$; $[-3; 1]$

E.7   On considère une fonction f définie sur $[-5; 4]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	-5	-2	1	4
Variation de f		↗ 1	↘ -3	↗ 3

Déterminer le tableau de variations des fonctions associées à f présentées ci-dessous :

a) $g : x \mapsto f(x+2)$

b) $h : x \mapsto -2 \cdot f(x)$

c) $j : x \mapsto f(x-2) + 1$

E.8   On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} ,

dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = -3(2x - 1)^2 + 1$$



On note g , la fonction affine définie par :

$$g : x \mapsto 2x - 1.$$

1) Déterminer l'intervalle I tel que : $g(I) = \mathbb{R}_+$

2) Justifier que la fonction f est monotone sur I .

3) Préciser le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles I et $\mathbb{R} \setminus I$.

E.9   Donner le sens de variation des fonctions ci-dessous sur l'intervalle précisé. Aucune justification n'est demandée :

a) $f : x \longmapsto \sqrt{2-3x}$ sur $]-\infty; \frac{2}{3}]$

b) $g : x \longmapsto 2(3-x)^2 + 1$ sur $[3; +\infty[$



c) $h : x \longmapsto \frac{2}{(x+1)^2} + 1$ sur $]-\infty; -1[$

d) $j : x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ sur \mathbb{R}_-

e) $k : x \longmapsto -3\sqrt{x} - 1$ sur \mathbb{R}_+

f) $\ell : x \longmapsto -2\sqrt{3-x} + 1$ sur $]-\infty; 3]$

5. Composée de fonctions

E.10   La plupart des fonctions utilisées sont des fonctions composées à partir des fonctions de référence.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ peut être vue comme la composée de fonctions de référence de la manière suivante :

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} x^2 + 1 \xrightarrow{h} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{où } \begin{cases} f : x \mapsto x^2 \\ g : x \mapsto x + 1 \\ h : x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

1) Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions de références :

a) $x \longmapsto 3x^2 - 1$

b) $x \longmapsto \frac{2}{3+x^2}$

c) $x \longmapsto \sqrt{\frac{2}{-2x+3}}$

2) On définit a et b deux éléments de l'intervalle $[1; 5]$ tel que $a < b$. Pour chacune des fonctions de la question 1), comparer les images des nombres a et b .



3) En analysant vos résultats de la question 1), compléter les deux phrases suivantes :

⇒ La composée de deux fonctions croissantes est

⇒ La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est

4) Que peut-on dire du sens de variation de la somme de deux fonctions croissantes? de deux fonctions décroissantes? d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante?

Justifier par une démonstration ou un contre-exemple chacune de vos affirmations.

E.11   Soit f une fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

2) Décomposer cette fonction à l'aide de trois fonctions de référence.

3) Prouver la décroissance de la fonction f sur D_f .

E.12  

- 1 Après avoir observé le sens de variation sur votre calculatrice de chacune des fonctions suivantes, appuyez votre observation au travers d'une preuve algébrique.
 - a Soit f la fonction définie par la formule : $f(x) = x + 3$ sur \mathbb{R} .
 - b Soit g la fonction définie par la formule : $g(x) = -\frac{1}{4}x - 1$ sur \mathbb{R} .
 - c Soit j la fonction définie par la formule : $j(x) = 3(1 - x)^2 + 2$ sur \mathbb{R} .
 - d Soit k la fonction définie par la formule : $k(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle \mathbb{R}_+ .
 - e Soit l la fonction définie par la formule : $l(x) = \frac{1}{x^2}$ sur \mathbb{R}^* .
- 2
 - a Établir l'identité : $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
 - b On considère la fonction m définie sur \mathbb{R} par la rela-

tion :

$$m(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Établir la stricte décroissance de la fonction m sur $]-\infty; -1]$.

E.13  



- 1 Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :
 - f définie sur \mathbb{R} par la relation : $f(x) = 2x - 1$
 - g définie sur \mathbb{R} par la relation : $g(x) = -2x - 1$
 - h définie sur \mathbb{R} par la relation : $h(x) = x^2$
 - k définie sur \mathbb{R} par la relation : $k(x) = (x - 1)^2 - 2$
 - l définie sur \mathbb{R}^* par la relation : $l(x) = \frac{1}{x}$
 - m définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par la relation : $m(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}$
- 2
 - a Établir la relation : $x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$
 - b Établir le sens de variation de la fonction n définie sur \mathbb{R} par la relation : $n(x) = x^2 - 2x - 1$

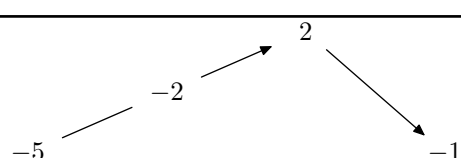
6. Opérations sur les fonctions

E.14   On considère les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} :

$$f : x \mapsto x + 2 \quad ; \quad g : x \mapsto (3x - 2)(2x + 4)$$

- 1 Déterminer la forme simplifiée des expressions suivantes :
 - a $(f + g)(x)$
 - b $(f \times g)(x)$
 - c $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
- 2 Donner l'ensemble de définition de la fonction $\frac{f}{g}$.



E.15   On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 4]$ dont le tableau de variations est données ci-dessous :

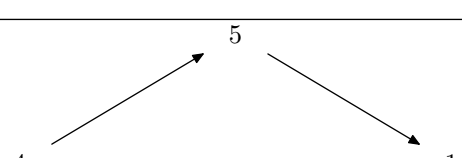
x	$-\infty$	-2	1	4
Variation de f				

On considère les fonctions g , h et j définies par :

$$g(x) = f(x) + 2 \quad ; \quad h(x) = 2 \cdot f(x) \quad ; \quad j(x) = -f(x)$$

Dresser les tableaux de variation des fonctions g , h et j .

E.16   On considère la fonction f définie sur $[1; 7]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :



x	1	3	7
Variation de f			

- 1 Sans justification, dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = 2 \cdot f(x) \quad ; \quad h(x) = f(x) + 2$$
- 2 On considère la fonction j définie par la relation :

$$j(x) = f(x - 2)$$
 - a Donner l'ensemble de définition de la fonction j .
 - b Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction j .

7. Composition : racines

E.17   On considère la fonction f polynomiale du second degré définie par la relation :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

On construit la fonction g par la relation :

$$g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$$

- 1 Conjecture sur la fonction g :
Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

- a Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g .
 - b Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur les intervalles $[-3; -1]$ et $[-1; 1]$.
- 2 Étude de la fonction g :
 - a Déterminer les zéros de la fonction f , puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	\dots	\dots	\dots	$+\infty$
Variation de f		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow

- (b) Justifier que la fonction g est définie sur $[-3; 1]$.
(c) Justifier que la fonction g est décroissante sur $[-1; 1]$.

E.18  

- (1) On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2 \cdot x - x^2}$$

- (a) Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :
 $x \mapsto 2x - x^2$
(b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f .
(2) On considère la fonction g définie par :

$$g: x \mapsto \sqrt{x^3 - 3x - 2}$$

- (a) Développer l'expression : $(x+1)^2 \cdot (x-2)$
(b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

- E.19**   On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{\frac{3 - 2 \cdot x}{2 \cdot x + 3}}$$

- (1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de la fonction f .
(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$ par la relation :

$$g(x) = \frac{3 - 2 \cdot x}{2 \cdot x + 3}$$

8. Composition : inverses

- E.22**   On considère la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4$$

On construit une fonction g définie par l'expression :

$$g(x) = \frac{1}{2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4}$$

- (1) Conjecture sur la fonction g :
Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :
(a) Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g
(b) Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.
(2) Étude de la fonction g :
(a) Déterminer les zéros de la fonction f , puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

- (a) Déterminer les réels a et b réalisant l'identité suivante :

$$g(x) = a + \frac{b}{2 \cdot x + 3}$$

(b) Établir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\frac{3}{2}; +\infty[$.
(3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

E.20  

- (1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 6 \cdot x^2 - 11 \cdot x - 10$$

- (a) Déterminer les zéros de la fonction f .
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
(On y indiquera ses zéros)
(2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{6 \cdot x^2 - 11 \cdot x - 10}$$



- (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g .

- E.21**   On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$

- (1) (a) Factoriser l'expression : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
(b) Justifier l'égalité suivante : $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$
(2) (a) Établir le tableau de signes de l'expression :
 $(x-3)(x+2)$.
(b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
(3) En déduire, sur l'intervalle $]3; +\infty[$, la monotonie de la fonction f .

x	$-\infty$	\dots	\dots	\dots	$+\infty$
Variation de f	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow	\nearrow

- (b) Justifier que la fonction g n'est pas définie pour $x=1$ et $x=2$.
(c) Justifier que la fonction g est croissante sur $]-\infty; 1[$.
E.23   On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par les relations : $f(x) = \frac{1}{x-2}$;

$$g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

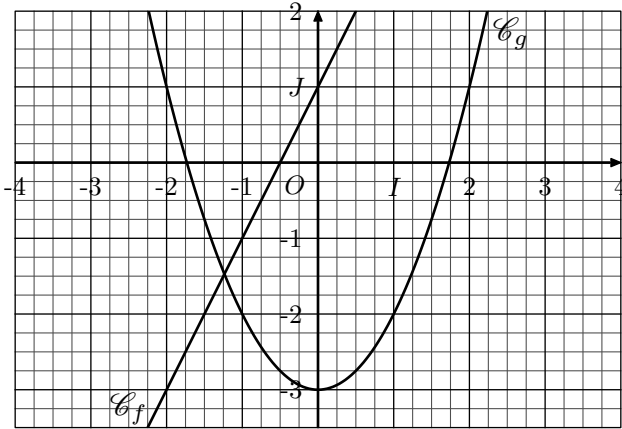
Sans justification, donner le sens de variations des fonctions f et g sur l'intervalle $]-\infty; 2[$.

9. Un peu plus loin - composée de fonctions

E.24 On considère les deux fonctions f et g définies sur $[-4; 4]$ par les relations :

$$f(x) = 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3$$

On donne les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



- 1 Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

- 2 On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g(f(x))$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaîne :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

- a Déterminer les valeurs des expressions suivantes :

$$g(f(-1)) \quad ; \quad g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

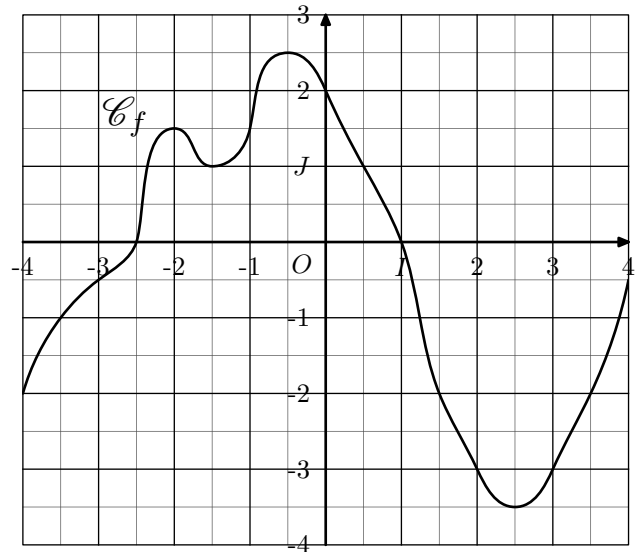
- b Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(f(x))$					

On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g(f(x))$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

- 3 Tracer dans le repère ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_{g \circ f}$ représentative de la fonction $g \circ f$.
- 4 Donner l'expression, en fonction de x , de la fonction $g \circ f$.

E.25 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la courbe \mathcal{C}_f représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



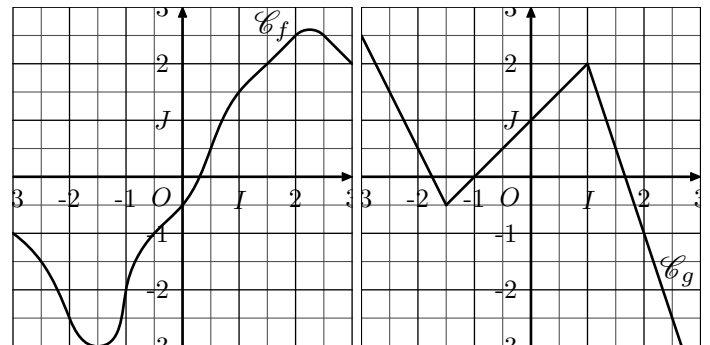
- 1 Calculer les images suivantes :

a $(f \circ f)(1)$ b $(f \circ f)(-2)$ c $(f \circ f)(3)$

- 2 On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a $f^3(1)$ b $f^3(-3)$ c $f^4(-1)$

E.26 On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3; 3]$ dont les courbes, respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , représentatives sont données dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- 1 Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a $(f \circ g)(-2)$ b $(f \circ g)(1,5)$ c $(f \circ g)(2)$

- 2 Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a $(g \circ f)(-3)$ b $(g \circ f)(0)$ c $(g \circ f)(1)$

E.27 On considère les deux fonctions suivantes :
 $f: x \mapsto x^2 - 2$; $g: x \mapsto \sqrt{x}$

- 1 a Donner les ensembles de définition des fonctions f et g .
- b Peut-on parler de l'image de 1 par la fonction $g \circ f$? Justifier votre réponse.
- 2 a Dresser le tableau de signes de la fonction f .
- b Donner l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.

E.28 Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$:

① $f: x \mapsto 3x - 5$; $g: x \mapsto x^2$

② $f: x \mapsto x^2 - 1$; $g: x \mapsto -2x + 4$

③ $f: x \mapsto x^2 + 1$; $g: x \mapsto x^2 + 1$

10. Exercices non-classés

E.29 On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} dont voici le tableau de variations:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
Variation de f	$+\infty$	\searrow	2	\nearrow	$+\infty$

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est définie par la relation:

$$g(x) = \frac{2}{f(x) - 1} + 3$$

① Déterminer l'image des nombres -1 et 3 par la fonction g .

② Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.

E.30 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

E.31 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* définie par la relation:

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 5$$

① Dresser le tableau de signes et le tableau de variations du polynôme du second degré:

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

② En remarquant que la fonction f est la composée de la fonction inverse avec ce polynôme du second degré, établir que la fonction est décroissante $\left]0; \frac{4}{3}\right]$

③ Dresser le tableau de variations de la fonction f (ne pas chercher à compléter le tableau avec les valeurs des images.)

E.32 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$$

① Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

② Dresser le tableau de variations de la fonction f .