Hors programme lycée / Fonctions associées et composée de fonctions

1. *Introduction de composée*

E.1 Soit f la fonction définie dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

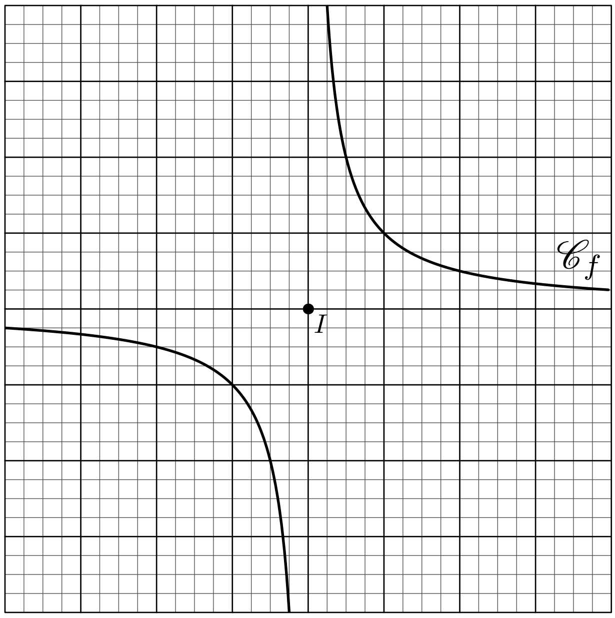
1. Établir l'égalité suivante : $\dfrac{x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

On note g la fonction inverse. À la question précédente, nous venons d'établir que :
$f(x) = g(x-2) + 1$

2. Par quelle transformation du plan, obtient-on la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f à partir de l'hyperbole $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction inverse?

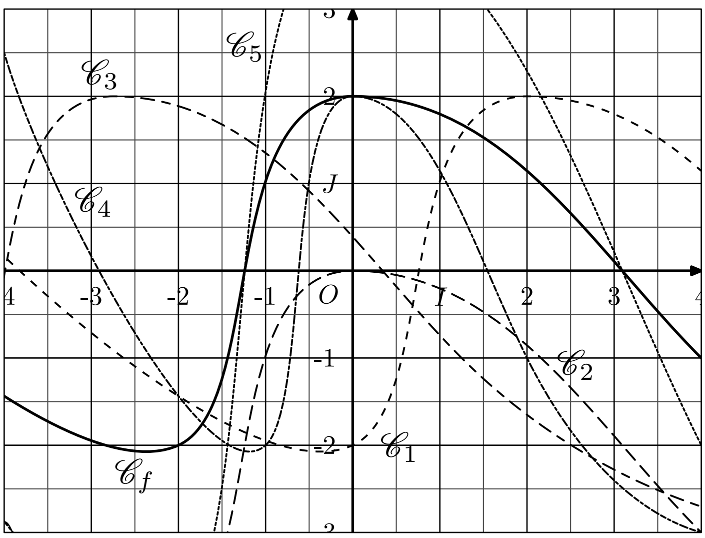
La figure ci-dessous représente l'hyperbole obtenue par la fonction inverse et I son centre de symétrie.

3. Placer correctement le repère pour que cette courbe soit la représentation de la fonction f.



2. *Composée de fonctions*

E.2 On considère la fonction f dont la courbe représentative est donné dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



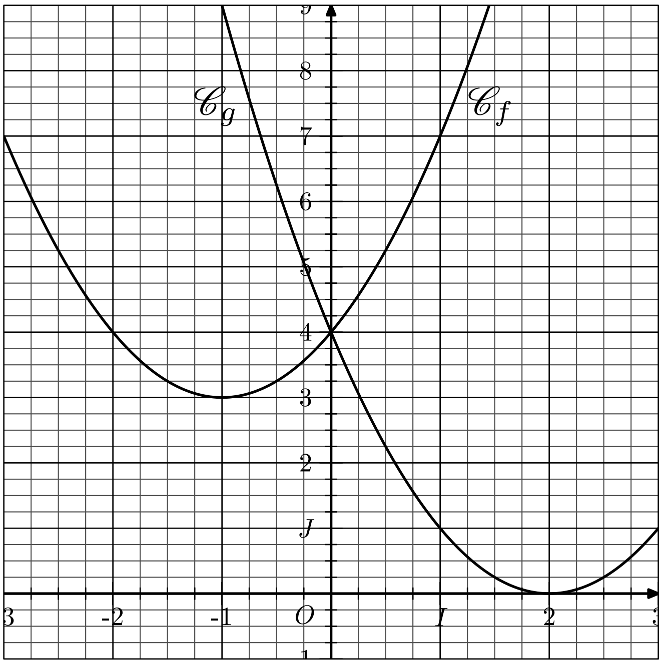
Dans ce repère est également donnée les courbes représentatives associées à la fonction f dont voici les expressions algébriques :

$g : x \mapsto f(x+2)$; $h : x \mapsto f(2{\cdot}x)$; $j : x \mapsto f(x-2)$

$k : x \mapsto 2{\cdot}f(x)$; $\ell : x \mapsto f(x) - 2$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative.

E.3 On considère les deux repères $(O\,;I\,;J)$ dans lesquels ont été tracées des courbes représentatives de polynômes de second degré :



1. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par :

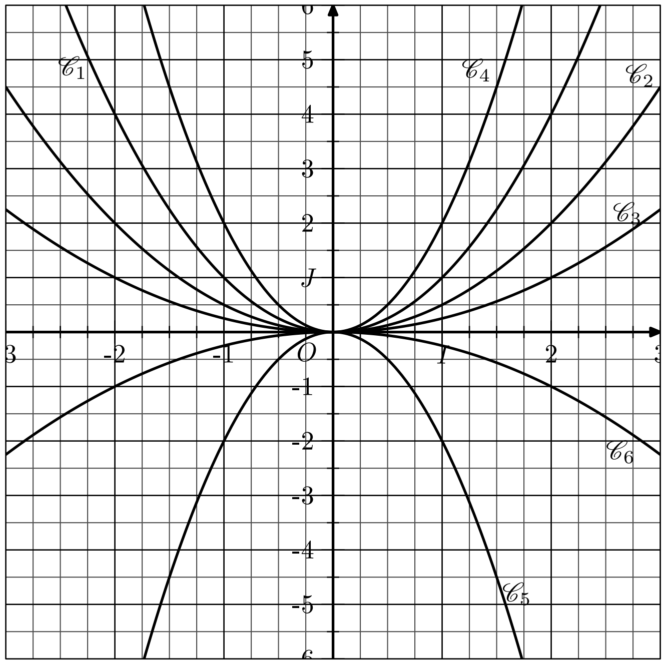
$$f : x \longmapsto x^2 + 2x + 4$$

La fonction g est définie, explicitement par la fonction f, par la relation suivante :

$$g(x) = f(x+\alpha) + \beta \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

a. Déterminer, à l'aide des représentations de ces deux fonctions, les valeurs des nombres réels α et β.

b. Déduire la forme développée réduite de l'expression de $f(x)$.



2. Les courbes $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_6$ sont les représentations de fonctions définies par la relation :

$$x \longmapsto \alpha \cdot x^2 \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

Déterminer pour chaque fonction la valeur de α.

3. *Composé et expressions*

E.4 Dans chacune des questions suivantes, donner l'expression algébrique de $(f \circ g)(x)$ en fonction de x :

a. $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = 2-x$

b. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x-4$

c. $f(x) = x-4$ et $g(x) = x^2$

d. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x+2$

e. $f(x) = 3x+2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

f. $f(x) = -2x+1$ et $g(x) = 2x+1$

E.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$$

1. Pour $x \in [0\,;1]$, établir l'égalité suivante :

$$(f \circ f)(x) = x$$

2. Pour $x \in [1\,;+\infty[$, déterminer une expression simplifiée de la fonction $f \circ f$.

4. *Composé et tableau de variation*

E.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

1. a. Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. *(On indiquera également les deux racines de la fonction f)*

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
Variation de g	-1 ↗	1 ↘	-3 ↗	$+\infty$

(a) Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}(g\circ f)(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty}(f\circ g)(x)$$

(b) Justifier que la fonction $f\circ g$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right[$.

(c) Justifier et préciser la monotonie de la composée $g\circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants :

$$\left]-\infty\,;-3\right] \quad ; \quad \left[-3\,;1\right]$$

E.7 On considère une fonction f définie sur $\left[-5\,;4\right]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	-5		-2		1		4
Variation de f	-2	↗	1	↘	-3	↗	3

Déterminer le tableau de variations des fonctions associées à f présentées ci-dessous :

(a) $g : x\longmapsto f(x+2)$ (b) $h : x\longmapsto -2\cdot f(x)$

(c) $j : x\longmapsto f(x-2)+1$

E.8 On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = -3\big(2x-1\big)^2+1$$

On note g, la fonction affine définie par :

$$g : x\longmapsto 2x-1.$$

(1) Déterminer l'intervalle I tel que : $g(I)=\mathbb{R}_+$

(2) Justifier que la fonction f est monotone sur I.

(3) Préciser le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles I et $\mathbb{R}\backslash I$.

E.9 Donner le sens de variation des fonctions ci-dessous sur l'intervalle précisé. Aucune justification n'est demandée :

(a) $f :\ x\longmapsto\sqrt{2-3x}$ sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$

(b) $g :\ x\longmapsto 2(3-x)^2+1$ sur $[3\,;+\infty[$

(c) $h :\ x\longmapsto \dfrac{2}{(x+1)^2}+1$ sur $]-\infty\,;-1[$

(d) $j :\ x\longmapsto x^2-3x+2$ sur $\mathbb{R}_-$

(e) $k :\ x\longmapsto -3\sqrt{x}-1$ sur $\mathbb{R}_+$

(f) $\ell :\ x\longmapsto -2\sqrt{3-x}+1$ sur $]-\infty\,;3]$

5. *Composée de fonctions*

E.10 La plupart des fonctions utilisées sont des fonctions composées à partir des fonctions de référence.
La fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+1}$ peut être vue comme la composée de fonctions de référence de la manière suivante :

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} x^2+1 \xrightarrow{h} \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{où}\ \begin{cases} f : x\longmapsto x^2 \\ g : x\longmapsto x+1 \\ h : x\longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

(1) Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions de références :

(a) $x\longmapsto 3x^2-1$ (b) $x\longmapsto \dfrac{2}{3+x^2}$

(c) $x\longmapsto \sqrt{\dfrac{2}{-2x+3}}$

(2) On définit a et b deux éléments de l'intervalle $\left[1\,;5\right]$ tel que $a<b$. Pour chacune des fonctions de la question (1), comparer les images des nombres a et b.

(3) En analysant vos résultats de la question (1), compléter les deux phrases suivantes :

- La composée de deux fonctions croissantes est ....
- La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est ....

(4) Que peut-on dire du sens de variation de la somme de deux fonctions croissantes ? de deux fonctions décroissantes ? d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?

Justifier par une démonstration ou un contre-exemple chacune de vos affirmations.

E.11 Soit f une fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f : x\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

(1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Décomposer cette fonction à l'aide de trois fonctions de référence.

(3) Prouver la décroissance de la fonction f sur D_f.

E.12

1. Après avoir observé le sens de variation sur votre calculatrice de chacune des fonctions suivantes, appuyez votre observation au travers d'une preuve algébrique.
   - a. Soit f la fonction définie par la formule :
     $f(x) = x+3$ sur $\mathbb{R}$.
   - b. Soit g la fonction définie par la formule :
     $g(x) = -\dfrac{1}{4}x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
   - c. Soit j la fonction définie par la formule :
     $j(x) = 3(1-x)^2+2$ sur $\mathbb{R}$.
   - d. Soit k la fonction définie par la formule :
     $k(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
   - e. Soit l la fonction définie par la formule :
     $l(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
2. a. Établir l'identité : $x^2+2x+1=(x+1)^2$
   - b. On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
     $m(x)=x^2+2x+1$.
     Établir la stricte décroissance de la fonction m sur $]-\infty\,;-1]$.

E.13

1. Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=2x-1$
   - g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $g(x)=-2x-1$
   - h définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $h(x)=x^2$
   - k définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $k(x)=(x-1)^2-2$
   - l définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation : $l(x)=\dfrac{1}{x}$
   - m définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par la relation : $m(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$
2. a. Établir la relation : $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$
   - b. Établir le sens de variation de la fonction n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $n(x) = x^2-2x-1$

6. Opérations sur les fonctions

E.14 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$:

$f : x \longmapsto x+2 \quad ; \quad g : x \longmapsto (3x-2)(2x+4)$

1. Déterminer la forme simplifiée des expressions suivantes :
   a. $(f+g)(x)$ b. $(f\times g)(x)$ c. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$.

E.15 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;4]$ dont le tableau de variations est données ci-dessous :

x	-∞		-2		1		4
Variation de f	-5	↗	-2	↗	2	↘	-1

On considère les fonctions g, h et j définies par :

$g(x) = f(x)+2 \quad ; \quad h(x) = 2\cdot f(x) \quad ; \quad j(x) = -f(x)$

Dresser les tableaux de variation des fonctions g, h et j.

E.16 On considère la fonction f définie sur $[1\,;7]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	1		3		7
Variation de f	4	↗	5	↘	1

1. Sans justification, dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies par :
   $g(x) = 2\cdot f(x) \quad ; \quad h(x) = f(x)+2$
2. On considère la fonction j définie par la relation :
   $j(x) = f(x-2)$
   - a. Donner l'ensemble de définition de la fonction j.
   - b. Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction j.

7. Composition : racines

E.17 On considère la fonction f polynomiale du second degré définie par la relation :
$f(x) = -x^2-2\cdot x+3$

On construit la fonction g par la relation :
$g\colon x \longmapsto \sqrt{f(x)}$

1. Conjecture sur la fonction g :
   Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :
   - a. Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g.
   - b. Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[-1\,;1]$.
2. Étude de la fonction g :
   - a. Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\cdots$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(b) Justifier que la fonction g est définie sur $\big[-3\,;1\big]$.

(c) Justifier que la fonction g est décroissante sur $\big[-1\,;1\big]$.

E.18

(1) On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :

$$f(x)=\sqrt{2{\cdot}x-x^2}$$

(a) Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :

$$x\longmapsto 2x-x^2$$

(b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) On considère la fonction g définie par :

$$g\colon x\longmapsto\sqrt{x^3-3x-2}$$

(a) Développer l'expression : $(x{+}1)^2{\cdot}(x{-}2)$

(b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

E.19 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x)=\sqrt{\frac{3-2{\cdot}x}{2{\cdot}x+3}}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de la fonction f.

(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\Big\{-\dfrac{3}{2}\Big\}$ par la relation :

$$g(x)=\frac{3-2{\cdot}x}{2{\cdot}x+3}$$

(a) Déterminer les réels a et b réalisant l'identité suivante :

$$g(x)=a+\frac{b}{2{\cdot}x+3}$$

(b) Établir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\Big]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\Big[$.

(3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

E.20

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=6{\cdot}x^2-11{\cdot}x-10$$

(a) Déterminer les zéros de la fonction f.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f. *(On y indiquera ses zéros)*

(2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\sqrt{6{\cdot}x^2-11{\cdot}x-10}$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

E.21 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

(1) (a) Factoriser l'expression : $\Big(x{-}\dfrac{1}{2}\Big)^2{-}\dfrac{25}{4}$

(b) Justifier l'égalité suivante : $f(x){=}\dfrac{-2}{\sqrt{(x{-}3)(x{+}2)}}$

(2) (a) Établir le tableau de signes de l'expression : $(x-3)(x+2)$.

(b) Déterminer l'ensemble définition de la fonction f.

(3) En déduire, sur l'intervalle $\big]3\,;+\infty\big[$, la monotonie de la fonction f.

8. *Composition : inverses*

E.22 On considère la fonction f définie par l'expression :

$$f(x)=2{\cdot}x^2-6{\cdot}x+4$$

On construit une fonction g définie par l'expression :

$$g(x)=\frac{1}{2{\cdot}x^2-6{\cdot}x+4}$$

(1) Conjecture sur la fonction g :

Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

(a) Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g

(b) Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big[$.

(2) Étude de la fonction g :

(a) Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\cdots$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Justifier que la fonction g n'est pas définie pour $x{=}1$ et $x{=}2$.

(c) Justifier que la fonction g est croissante sur $\big]-\infty\,;1\big[$.

E.23 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\big\{2\big\}$ par les relations : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $g(x)=\dfrac{1}{\big(x-2\big)^2}$

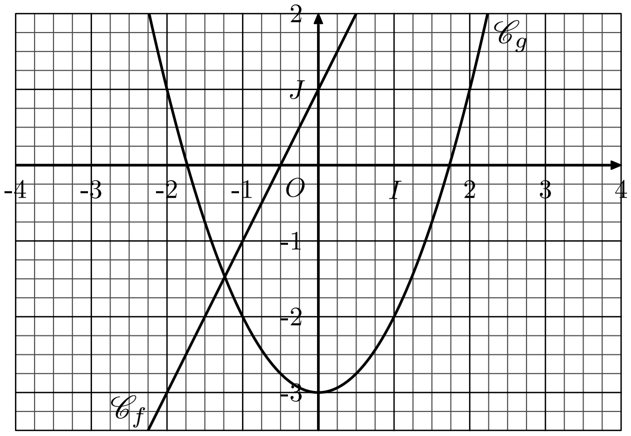
Sans justification, donner le sens de variations des fonctions f et g sur l'intervalle $\big]-\infty\,;2\big[$.

9. *Un peu plus loin - composée de fonctions*

E.24 On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4\,;4]$ par les relations :

$f(x) = 2x+1 \quad ; \quad g(x) = x^2-3$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g\big(f(x)\big)$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :
$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g\big(f(x)\big)$

a. Déterminer les valeurs des expressions suivantes :
$g\big(f(-1)\big) \quad ; \quad g\Big(f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big)$

b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

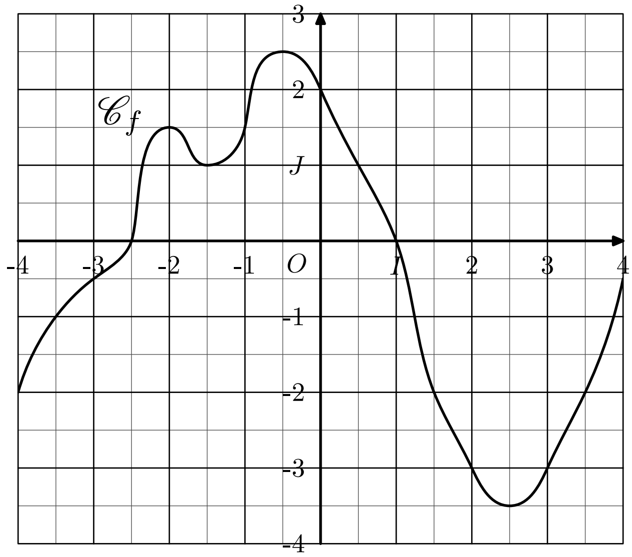
x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g\big(f(x)\big)$					

On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g\big(f(x)\big)$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g\circ f$.

3. Tracer dans le repère ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g\circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g\circ f$.

E.25 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



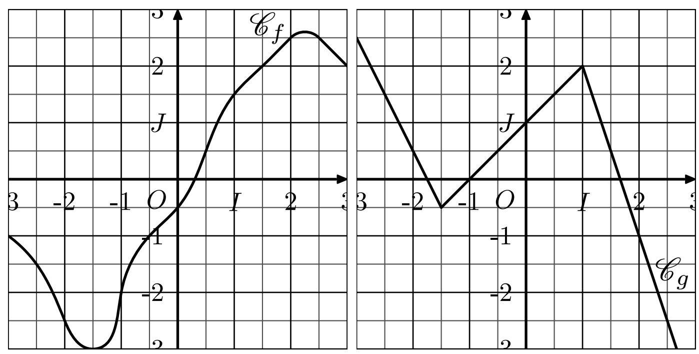
1. Calculer les images suivantes :

a. $(f\circ f)(1)$ b. $(f\circ f)(-2)$ c. $(f\circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

E.26 On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(f\circ g)(-2)$ b. $(f\circ g)(1{,}5)$ c. $(f\circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(g\circ f)(-3)$ b. $(g\circ f)(0)$ c. $(g\circ f)(1)$

E.27 On considère les deux fonctions suivantes :

$f\colon x\longmapsto x^2-2 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto \sqrt{x}$

1. a. Donner les ensembles de définition des fonctions f et g.

b. Peut-on parler de l'image de 1 par la fonction $g\circ f$? Justifier votre réponse.

2. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

b. Donner l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$.

E.28 Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$:

(1) $f\colon x \longmapsto 3x - 5 \quad ; \quad g\colon x \longmapsto x^2$

(2) $f\colon x \longmapsto x^2 - 1 \quad ; \quad g\colon x \longmapsto -2x + 4$

(3) $f\colon x \longmapsto x^2 + 1 \quad ; \quad g\colon x \longmapsto x^2 + 1$

10. *Exercices non-classés*

E.29 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	5 ↘	2 ↗	$+\infty$

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{2}{f(x) - 1} + 3$$

(1) Déterminer l'image des nombres -1 et 3 par la fonction g.

(2) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$.

E.30 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$.

E.31 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ définie par la relation :

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 5$$

(1) Dresser le tableau de signes et le tableau de variations du polynôme du second degré :

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

(2) En remarquant que la fonction f est la composée de la fonction inverse avec ce polynôme du second degré, établir que la fonction est décroissante $\left]0\,;\frac{4}{3}\right]$

(3) Dresser le tableau de variations de la fonction f *(ne pas chercher à compléter le tableau avec les valeurs des images.)*

E.32 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.