Hors programme lycée / Fonctions associées et composée de fonctions

1. Introduction de composée

E.1 Soit f la fonction définie dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

1. Établir l'égalité suivante : $\frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$

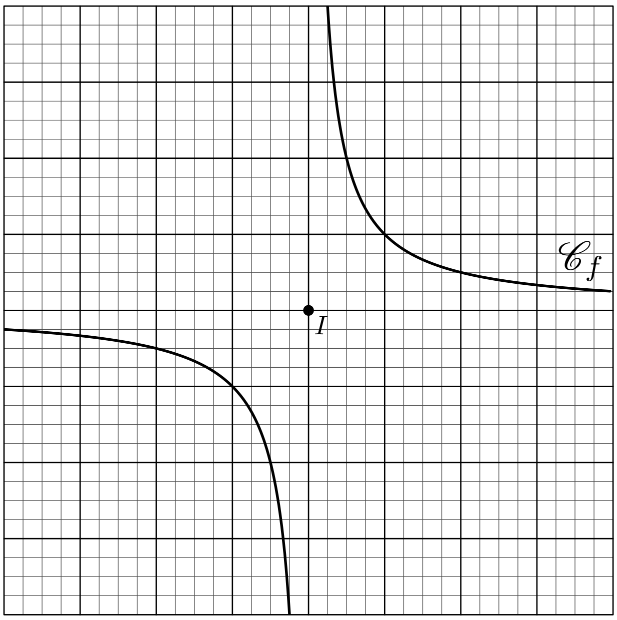
On note g la fonction inverse. À la question précédente, nous venons d'établir que :

$$f(x) = g(x-2) + 1$$

2. Par quelle transformation du plan, obtient-on la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f à partir de l'hyperbole $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction inverse?

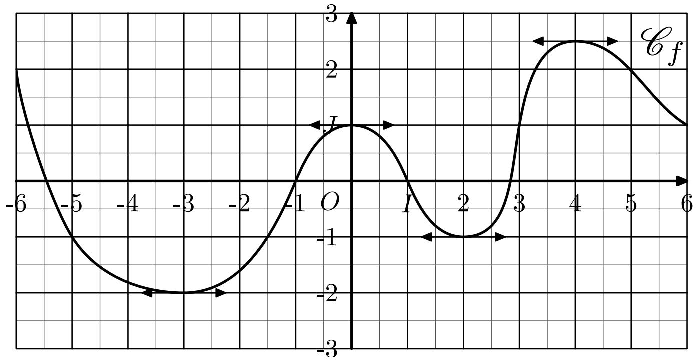
La figure ci-dessous représente l'hyperbole obtenue par la fonction inverse et I son centre de symétrie.

3. Placer correctement le repère pour que cette courbe soit la représentation de la fonction f.



E.2 On considère le plan munit d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

1. Soit f une fonction définie sur $[-6;6]$ dont voici la courbe représentative :



   a. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre -1.

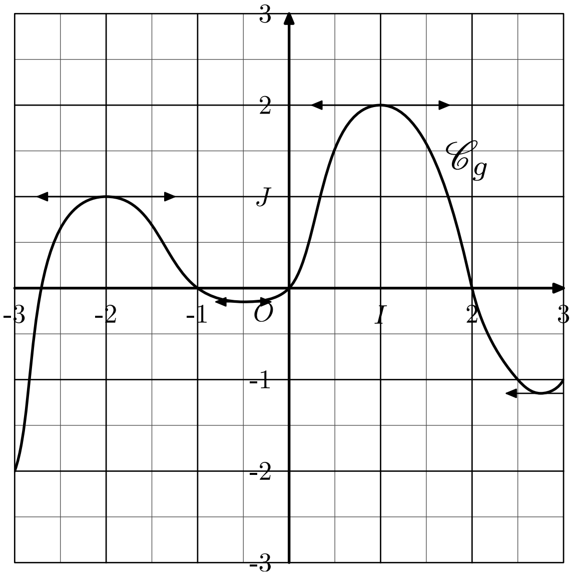
   b. Déterminer les images des intervalles suivants :

   $[-6;-1]$; $]3;6]$; $[-3;2[$

   $]-5;-3[\cup]0;1[$

   c. Déterminer les antécédents de tous les nombres formant l'intervalle $]-2;-1[$

2. On considère également la fonction g définie sur $[-3;3]$ dont voici la représentation graphique :



   a. Déterminer les images des nombres suivant par la fonction $g \circ f$:

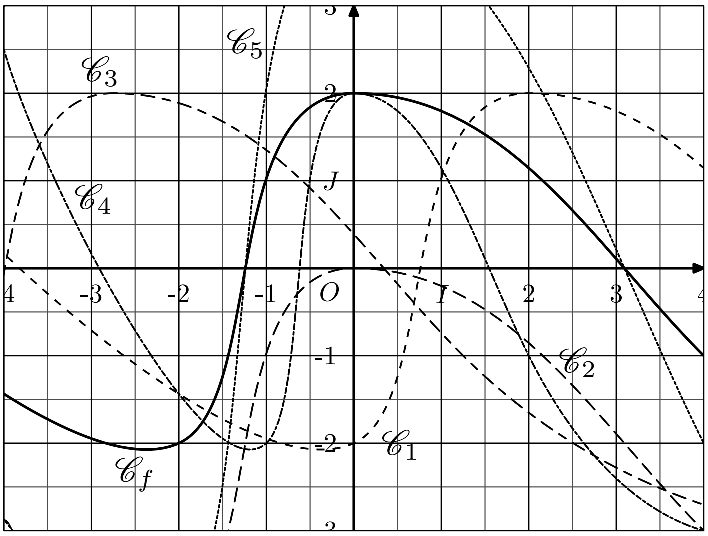
   -3 ; 4

   b. Déterminer l'image de l'intervalle $[0;4[$ par la fonction $g \circ f$.

2. Composée de fonctions

....

E.3 On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée dans le repère $(O;I;J)$ ci-dessous :



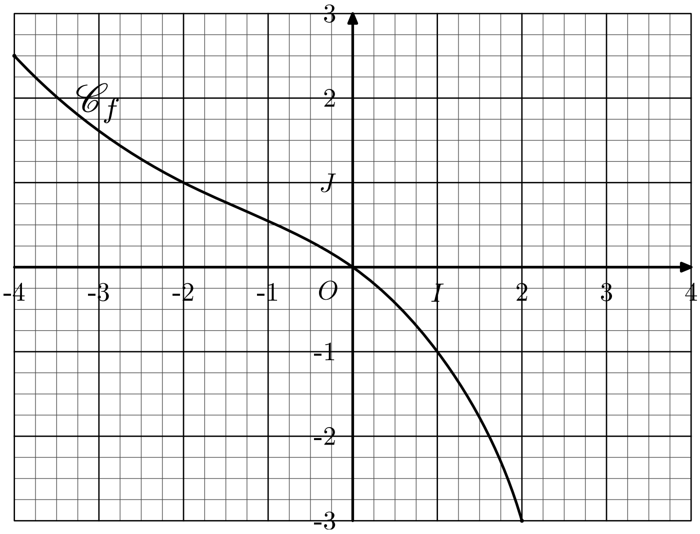
Dans ce repère, sont également données les courbes représentatives associées à la fonction f dont voici les expressions algébriques :

$g : x \mapsto f(x+2)$; $h : x \mapsto f(2{\cdot}x)$; $j : x \mapsto f(x-2)$

$k : x \mapsto 2{\cdot}f(x)$; $\ell : x \mapsto f(x)-2$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative.

E.4 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4;2]$ dont la représentation est donnée dans le repère $(O;I;J)$ ci-dessous :



On définit la fonction g par la relation :

$g : x \longmapsto f(x-2)$

1. Pour quelle valeur de x, êtes-vous capable de donner la valeur de $g(x)$?
Quel est l'ensemble de définition de la fonction g?

2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

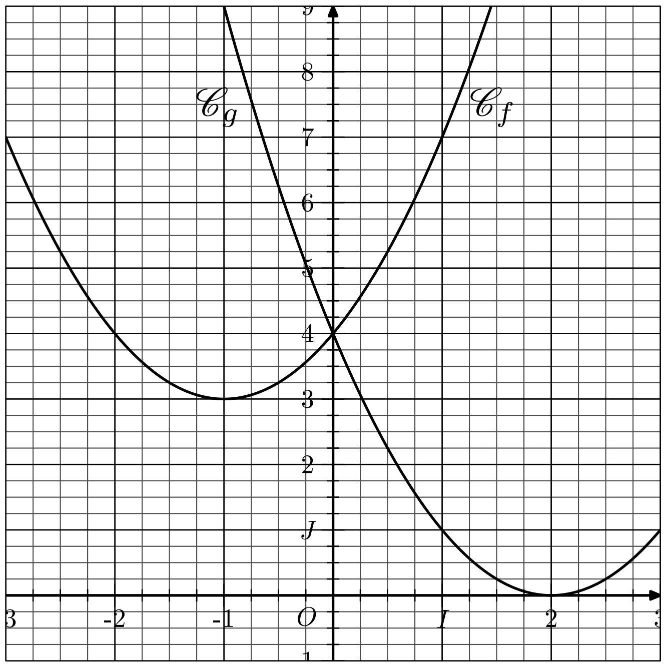
x	-4	-2	0	1	2	3	4
$f(x)$						$\times$	$\times$
$g(x)$	$\times$						

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

4. Que pouvez-vous dire des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

....

E.5 On considère les deux repères $(O;I;J)$ dans lesquels ont été tracées des courbes représentatives de polynômes de second degré :



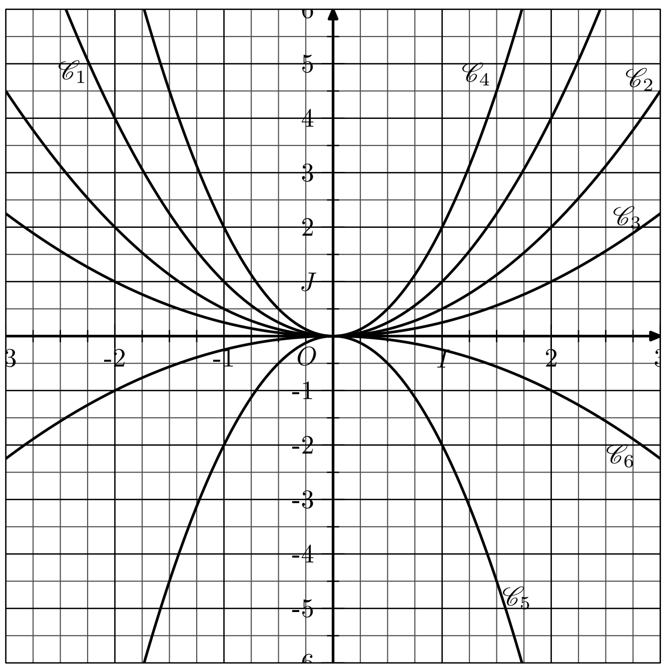
1. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto x^2+2x+4$$

La fonction g est définie, explicitement par la fonction f, par la relation suivante :
$g(x) = f(x+\alpha)+\beta$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$.

a. Déterminer, à l'aide des représentations de ces deux fonctions, les valeurs des nombres réels α et β.

b. Déduire la forme développée réduite de l'expression de $f(x)$.



2. Les courbes $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_6$ sont les représentations de fonctions définies par la relation :
$x \longmapsto \alpha\cdot x^2$ où α est un nombre réel.

Déterminer pour chaque fonction la valeur de α.

3. *Composé et expressions*

E.6 Dans chacune des questions suivantes, donner l'expression algébrique de $\big(f\circ g\big)(x)$ en fonction de x :

(a) $f(x)=3x+1$ et $g(x)=2-x$

(b) $f(x)=x^2$ et $g(x)=x-4$

(c) $f(x)=x-4$ et $g(x)=x^2$

(d) $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+2$

(e) $f(x)=3x+2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

(f) $f(x)=-2x+1$ et $g(x)=2x+1$

E.7 On considère les trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f:x\longmapsto -\frac{1}{2}x+1 \quad ; \quad g:x\longmapsto x^2 \quad ; \quad h:x\longmapsto 2x-1$$

On définit une nouvelle fonction F appelée "*la composée des fonctions f, g et h*" :

L'image de x a pour valeur la valeur des images successives de x par les fonctions f, g et h.

Le diagramme suivant présente cette situation pour le cas particulier $x=6$:

$$F:\ 6 \xmapsto{f} -2 \xmapsto{g} 4 \xmapsto{h} 7$$

(1) (a) Montrer que $F(4)=1$.

(b) Déterminer les images de -4 et de 3 par la fonction F.

(c) Déterminer l'ensemble des antécédents de 97 par la fonction F.

(2) (a) Parmi les trois expressions suivantes, quel est celle qui représente $F(x)$:

$$A=-\frac{1}{2}\cdot\big(2x-1\big)^2+1 \quad ; \quad B=2\cdot\Big(-\frac{1}{2}x+1\Big)^2-1$$

$$C=\Big(-\frac{1}{2}x+1\Big)+x^2+\big(2x-1\big)$$

(b) Donner l'écriture développée et réduite de la fonction F

(3) Pour chaque question, donner une écriture algébrique de la fonction F obtenue par composition des fonctions f, g et h *(aucune factorisation ou développement n'est demandé).*

(a) $f:x\longmapsto x^2$; $g:x\longmapsto 3x+2$; $h:x\longmapsto \dfrac{1}{x}$

(b) $f:x\longmapsto \dfrac{1}{x}$; $g:x\longmapsto \sqrt{x}$; $h:x\longmapsto 3x+1$

(4) On considère la fonction F obtenue par composition des fonctions f, g, h définies ci-dessous :

$$f:x\longmapsto 2x \quad ; \quad g:x\longmapsto 3x+2 \quad ; \quad h:x\longmapsto \sqrt{x}$$

(a) Effectuer le calcul suivant : $h\Big(g\big(f(2)\big)\Big)$

(b) Que représente ce calcul vis-à-vis de la fonction F ?

(c) Donner l'écriture algébrique de la fonction F

La composée de f, g, h se note $h\circ g\circ f$

E.8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$f(x)=\big(1-\sqrt{x}\big)^2$

(1) Pour $x\in\big[0\,;1\big]$, établir l'égalité suivante :

$\big(f\circ f\big)(x)=x$

(2) Pour $x\in\big[1\,;+\infty\big[$, déterminer une expression simplifiée de la fonction $f\circ f$.

4. *Composé et tableau de variation*

E.9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$f(x)=-2x^2-4x+6$

(1) (a) Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f. *(On indiquera également les deux racines de la fonction f)*

(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
Variation de g	-1	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

(a) Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\big(g\circ f\big)(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty}\big(f\circ g\big)(x)$$

(b) Justifier que la fonction $f\circ g$ est décroissante sur l'intervalle $\big]-\infty\,;0\big[$.

(c) Justifier et préciser la monotonie de la composée $g\circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants :

$\big]-\infty\,;-3\big]$; $\big[-3\,;1\big]$

E.10 On considère une fonction f définie sur $[-5\,;4]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	-5		-2		1		4
Variation de f			1				3
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-2				-3		

Déterminer le tableau de variations des fonctions associées à f présentées ci-dessous :

a) $g : x \longmapsto f(x{+}2)$ b) $h : x \longmapsto -2{\cdot}f(x)$

c) $j : x \longmapsto f(x{-}2) + 1$

E.11 On considère les fonctions suivantes :

$g : x \longmapsto 1 - 2x$; $h : x \longmapsto \sqrt{x}$; $j : x \longmapsto x^2$

$k : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $\ell : x \longmapsto 2x^2 - 3x + 1$

1. Pour chaque question, donner l'écriture simplifiée de $f(x)$:

   a) $f = k \circ g \circ k$ b) $f = g \circ j \circ k$

   c) $f = j \circ h$ d) $f = l \circ j$

2. On considère la fonction m définie par la chaîne de composition suivante :

   $$m : x \xrightarrow{\ \ell\ } \ell(x) \xrightarrow{\ h\ } h\big(\ell(x)\big)$$

   a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction m.

   b) En déduire le tableau de variations de la fonction m. Justifier votre démarche.

E.12 On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = -3\big(2x-1\big)^2 + 1$$

On note g, la fonction affine définie par :

$g : x \longmapsto 2x - 1.$

1. Déterminer l'intervalle I tel que : $g\big(I\big) = \mathbb{R}_+$
2. Justifier que la fonction f est monotone sur I.
3. Préciser le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles I et $\mathbb{R}\backslash I$.

E.13 Donner le sens de variation des fonctions ci-dessous sur l'intervalle précisé. Aucune justification n'est demandée :

a) $f :\ x \longmapsto \sqrt{2{-}3x}$ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right]$

b) $g :\ x \longmapsto 2(3{-}x)^2{+}1$ sur $[3\,;+\infty[$

c) $h :\ x \longmapsto \dfrac{2}{(x{+}1)^2}{+}1$ sur $]-\infty\,;-1[$

d) $j :\ x \longmapsto x^2{-}3x{+}2$ sur $\mathbb{R}_-$

e) $k :\ x \longmapsto -3\sqrt{x}-1$ sur $\mathbb{R}_+$

f) $\ell :\ x \longmapsto -2\sqrt{3{-}x}+1$ sur $]-\infty\,;3]$

E.14

1. On considère les deux fonctions suivantes :

   $f :\ x \longmapsto 3x - 2$; $g :\ x \longmapsto 5 - x$

   Déterminer les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

2. Soit h la fonction définie par :

   $h :\ x \longmapsto \dfrac{2}{(x+1)^2} - 1$

   a) Écrire la chaîne de composée de fonctions de référence caractérisant h.

   b) Justifier et préciser la monotonie de la fonction f sur $]-\infty\,;-1[$.

3. Sans aucune justification, donner le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

   a) $j : x \longmapsto -3(x+1)^2$ sur $\left[-1\,;+\infty\right[$

   b) $k : x \longmapsto x + x^2$ sur $\mathbb{R}_+$

   c) $\ell : x \longmapsto -2\sqrt{x^2-1} + 2$ sur $\left]-\infty\,;-1\right]$

   d) $m : x \longmapsto \sqrt{3x-1} - (x-2)^2$ sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;2\right]$

E.15 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = \sqrt{(x+1)(2-x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

   $$f(x) = \sqrt{-\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4}}$$

   b) Déterminer la chaîne de composition de fonction de référence caractérisant la fonction f.

   c) Justifier la monotonie de la fonction f sur les deux intervalles :

   $I = \mathcal{D}_f \cap \left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et $J = \mathcal{D}_f \cap \left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

   d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Composée de fonctions

E.16 La plupart des fonctions utilisées sont des fonctions composées à partir des fonctions de référence.
La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2{+}1}$ peut être vue comme la composée de fonctions de référence de la manière suivante :

$$x \xrightarrow{\ f\ } x^2 \xrightarrow{\ g\ } x^2 + 1 \xrightarrow{\ h\ } \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{où } \begin{cases} f : x \longmapsto x^2 \\ g : x \longmapsto x + 1 \\ h : x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

1. Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions

de références :

(a) $x \longmapsto 3x^2 - 1$ (b) $x \longmapsto \dfrac{2}{3+x^2}$

(c) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{2}{-2x+3}}$

(2) On définit a et b deux éléments de l'intervalle $[1\,;5]$ tel que $a<b$. Pour chacune des fonctions de la question (1), comparer les images des nombres a et b.

(3) En analysant vos résultats de la question (1), compléter les deux phrases suivantes :

- La composée de deux fonctions croissantes est ....
- La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est ....

(4) Que peut-on dire du sens de variation de la somme de deux fonctions croissantes? de deux fonctions décroissantes? d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante?
Justifier par une démonstration ou un contre-exemple chacune de vos affirmations.

E.17 On considère les trois fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto -\frac{1}{2}x+1 \quad ; \quad g : x \longmapsto x^2 \quad ; \quad h : x \longmapsto 2x-1$$

On définit une nouvelle fonction F appelée "*la composée des fonctions f, g et h*" :
L'image de x a pour valeur la valeur des images successives de x par les fonctions f, g et h.

Le diagramme suivant représente cette situation pour le cas particulier $x=6$:

$$F :\quad 6 \overset{f}{\longmapsto} -2 \overset{g}{\longmapsto} 4 \overset{h}{\longmapsto} 7$$

(1) (a) Montrer que $F(4)=1$.

(b) Déterminer les images de -4 et 3 par la fonction F .

(c) Déterminer l'antécédent de 97 par la fonction F.

(2) (a) Parmi les trois expressions suivantes, quel est celle qui représente $F(x)$:

$$A = -\frac{1}{2}(2x-1)^2+1 \quad ; \quad B = 2\Big(-\frac{1}{2}x+1\Big)^2-1$$

$$C = \Big(-\frac{1}{2}x+1\Big)+x^2+\big(2x-1\big)$$

(b) Donner l'écriture développée et réduite de la fonction F

(3) Pour chaque question, donner une écriture algébrique de la fonction F obtenue par composition des fonctions f, g et h *(aucune factorisation ou développement n'est demandé)*.

(a) $f : x \longmapsto x^2 \quad ; \quad g : x \longmapsto 3x+2 \quad ; \quad h : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

(b) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} \quad ; \quad g : x \longmapsto \sqrt{x} \quad ; \quad h : x \longmapsto 3x+1$

(4) On considère la fonction F obtenue par composition des fonctions f, g, h définies ci-dessous :

$$f : x \longmapsto 2x \quad ; \quad g : x \longmapsto 3x+2 \quad ; \quad h : x \longmapsto \sqrt{x}$$

(a) Effectuer le calcul suivant : $h\Big(g\big(f(2)\big)\Big)$

(b) Que représente ce calcul vis-à-vis de la fonction F?

(c) Donner l'écriture algébrique de la fonction F

E.18 On considère la fonction F définie comme la composée des trois fonctions de référence suivante :

$$f : x \longmapsto 2x-2 \quad ; \quad g : x \longmapsto x^2 \quad ; \quad h : x \longmapsto -x+1$$

(1) (a) Déterminer le sens de variation des fonctions f et h sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner les intervalles sur lesquels la fonction g est monotone. Préciser.

On souhaite étudier le sens de variation de la fonction F uniquement sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
Pour cela, on considère dans la suite de l'exercice deux nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;1]$ vérifiant la relation :
$a < b$:

(2) Justifier l'inégalité suivante : $f(a)<f(b)$

(3) (a) Quel est le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}_-$?

(b) Quel est le signe des deux nombres $2a-2$ et $2b-2$?

(c) En déduire la comparaison de : $(2a-2)^2$ et $(2b-2)^2$

(4) (a) En utilisant le sens de variation de la fonction h, déterminer le sens de comparaison des nombres suivants :
$-(2a-2)^2+1$ et $-(2b-2)^2+1$.

(5) En déduire le sens de variation de la fonction F sur $]-\infty\,;1]$

E.19 Soit f une fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

(1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Décomposer cette fonction à l'aide de trois fonctions de référence.

(3) Prouver la décroissance de la fonction f sur D_f.

E.20 On considère la fonction f dont les images sont définies de manière algébrique par :

$$f : x \longmapsto \frac{-2}{x^2-1}$$

(1) Donner l'ensemble D_f de définition de la fonction f.

(2) Décomposer la fonction f à l'aide de quatre fonctions de référence.

(3) (a) Sur $]-\infty\,;0]\cap\mathcal{D}_f$, établir la décroissance de la fonction f

(b) Prouver la croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[\cap\mathcal{D}_f$

(4) Donner le tableau de variations de la fonction f.

E.21 On considère la fonction F obtenue par composée des fonctions f, g, h suivante :

$$f : x \longmapsto 2x+4 \quad ; \quad g : \longmapsto \frac{1}{x}$$
$$h : \longmapsto 1-x$$

1. a. Donner, parmi les expressions algébriques ci-dessous, celle qui représente la fonction F :

$$A=1-\Big(2\cdot\frac{1}{x}+4\Big) \;;\; B=(2x+4)+\frac{1}{x}+(1-x) \;;\; C=1-\frac{1}{2x+4}$$

   b. Justifier que : $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x+1}$

2. a. Donner le sens de variation des fonctions f et h sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

   b. Donner les intervalles sur lesquels la fonction g est monotone. Préciser.

3. Pour étudier le sens de variation de la fonction F sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right[$, nous considérons deux nombres a et b appartenant à $\left]-\infty\,;-2\right[$ et vérifiant :
$a<b$

   a. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

   b. Quel est le signe de $2a+4$ et $2b+4$?

   c. Donner le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}_-$.

   d. En déduire le sens de comparaison de $\dfrac{1}{2a+4}$ et $\dfrac{1}{2b+4}$.

   e. Comparer les deux nombres suivants :
$1-\dfrac{1}{2a+4} \quad ; \quad 1-\dfrac{1}{2b+4}$.

   f. En déduire le sens de comparaison de $F(a)$ et $F(b)$.

   g. Donner le sens de variation de la fonction F sur $\left]-\infty\,;-2\right[$.

E.22

1. Après avoir observé le sens de variation sur votre calculatrice de chacune des fonctions suivantes, appuyez votre observation au travers d'une preuve algébrique.

   a. Soit f la fonction définie par la formule :
$f(x)=x+3$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Soit g la fonction définie par la formule :
$g(x)=-\dfrac{1}{4}x-1$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Soit j la fonction définie par la formule :
$j(x)=3(1-x)^2+2$ sur $\mathbb{R}$.

   d. Soit k la fonction définie par la formule :
$k(x)=\sqrt{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

   e. Soit l la fonction définie par la formule :
$l(x)=\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

2. a. Établir l'identité : $x^2+2x+1=(x+1)^2$

   b. On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$m(x)=x^2+2x+1$.
Établir la stricte décroissance de la fonction m sur $]-\infty\,;-1]$.

E.23

1. Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=2x-1$
   - g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $g(x)=-2x-1$
   - h définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $h(x)=x^2$
   - k définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $k(x)=(x-1)^2-2$
   - l définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation : $l(x)=\dfrac{1}{x}$
   - m définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par la relation : $m(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

2. a. Établir la relation : $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

   b. Établir le sens de variation de la fonction n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $n(x)=x^2-2x-1$

6. *Opérations sur les fonctions*

E.24

1. Pour chacune des questions, donner sans justification le sens de variation des fonctions f, g et $f+g$:

   a. $f\colon x\longmapsto 2x+1 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto 3x+1$

   b. $f\colon x\longmapsto 3x+1 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto 3-2x$

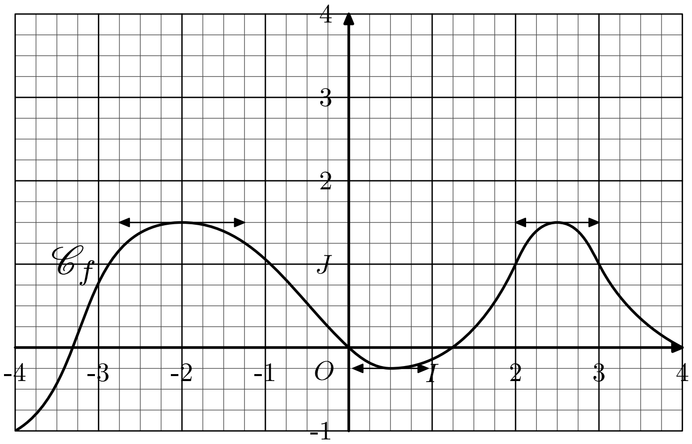
   c. $f\colon x\longmapsto -3x+1 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto x-1$

2. On considère les deux fonctions f et g définies par :
$f\colon x\longmapsto 2x-2 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto 3-x$

   a. Développer l'expression $f(x)\cdot g(x)$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f\cdot g$.

E.25 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la représentation est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :

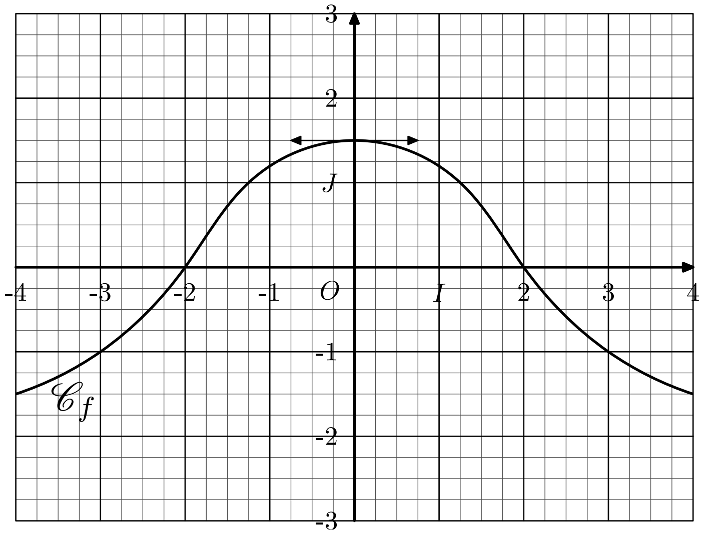


On considère le tableau ci-dessous :

x	-4	-2	0	0,5	2	2,5	3	4
$f(x)$								
$g(x)$								

1. Compléter la ligne des valeurs prises par la fonction f.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont l'image d'un nombre $x\in[-4\,;4]$ est donnée par la relation :
   $g(x)=f(x)+2$
   a. Compléter la troisième ligne du tableau de valeurs ci-dessus.
   b. Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.
3. Quelle relation existe entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

E.26 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la représentation est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



Soit g et h deux fonctions définies sur $[-4\,;4]$ par :

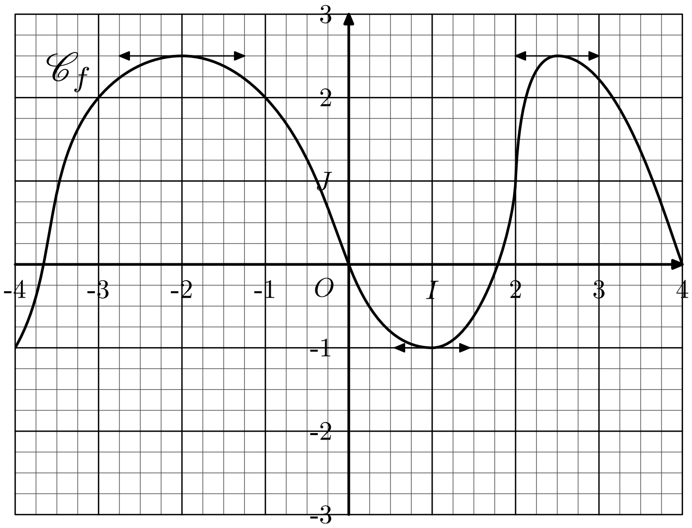
$$g(x)=2\cdot f(x) \quad ; \quad h(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)$$

1. Compléter le tableau suivant de valeurs :

x	-4	-3	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	2	3	4
$f(x)$									
$g(x)$									
$h(x)$									

2. Tracer les courbes représentatives $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ respectives des fonctions g et h dans le repère ci-dessus.

E.27 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la représentation est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



On considère la fonction g définie sur $[-4\,;4]$ par la relation :
$g(x) = -f(x)$

(1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	4
$f(x)$									
$g(x)$									

(2) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

(3) Quelle relation existe-t-il entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

E.28 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$:

$f : x \longmapsto x+2 \quad ; \quad g : x \longmapsto (3x-2)(2x+4)$

(1) Déterminer la forme simplifiée des expressions suivantes :

(a) $(f+g)(x)$ (b) $(f\times g)(x)$ (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

(2) Donner l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$.

E.29 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;4]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	4
Variation de f	-5 ↗	-2 ↗	2 ↘	-1

On considère les fonctions g, h et j définies par :
$g(x) = f(x)+2 \quad ; \quad h(x) = 2{\cdot}f(x) \quad ; \quad j(x) = -f(x)$

Dresser les tableaux de variation des fonctions g, h et j.

E.30 On considère la fonction f admettant le tableau de variations suivant :

x	-2	1	$+\infty$
Variation de f	‖ $-\infty$ ↗	2 ↘	-1

Dresser, sans justification le tableau de variations de la fonction g définie par la relation :
$g(x) = 3{\cdot}f\big(2{\cdot}x\big)$

E.31 On considère la fonction f définie sur $\big[1\,;7\big]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	1	3	7
Variation de f	4 ↗	5 ↘	1

(1) Sans justification, dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies par :
$g(x) = 2{\cdot}f(x) \quad ; \quad h(x) = f(x)+2$

(2) On considère la fonction j définie par la relation :
$j(x) = f(x-2)$

(a) Donner l'ensemble de définition de la fonction j.

(b) Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction j.

7. *Composition : racines*

E.32 On considère la fonction f polynomiale du second degré définie par la relation :
$f(x) = -x^2-2{\cdot}x+3$

On construit la fonction g par la relation :

$g \colon x \longmapsto \sqrt{f(x)}$

(1) Conjecture sur la fonction g :

Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

(a) Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g.

(b) Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur les intervalles $\big[-3\,;-1\big]$ et $\big[-1\,;1\big]$.

(2) Étude de la fonction g :

(a) Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\cdots$ ↘	0 ↘	$-\infty$

(b) Justifier que la fonction g est définie sur $[-3\,;1]$.

(c) Justifier que la fonction g est décroissante sur $[-1\,;1]$.

E.33

(1) On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :
$f(x) = \sqrt{2{\cdot}x - x^2}$

(a) Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :
$x \longmapsto 2x - x^2$

(b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) On considère la fonction g définie par :
$g\colon x \longmapsto \sqrt{x^3 - 3x - 2}$

(a) Développer l'expression : $(x{+}1)^2{\cdot}(x{-}2)$

(b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

E.34 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \sqrt{\frac{3 - 2{\cdot}x}{2{\cdot}x + 3}}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de la fonction f.

(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par la relation :
$$g(x) = \frac{3 - 2{\cdot}x}{2{\cdot}x + 3}$$

(a) Déterminer les réels a et b réalisant l'identité suivante :
$$g(x) = a + \frac{b}{2{\cdot}x + 3}$$

(b) Établir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

(3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

E.35

(1) On considère les deux fonctions suivantes :
$f : x \longmapsto \sqrt{x^2} \quad ; \quad g : x \longmapsto \sqrt{x}^{\,2}$

(a) Comparer les ensembles de définition des deux fonctions f et g.

(b) Que peut-on dire de ces deux fonctions sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$?

(2) On considère les fonctions suivantes :
$h : x \longmapsto \sqrt{x} \quad ; \quad j : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^3}}{x} \quad ; \quad k : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

(b) Établir que ces fonctions sont toutes égales sur un intervalle. Lequel?

E.36

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 6{\cdot}x^2 - 11{\cdot}x - 10$

(a) Déterminer les zéros de la fonction f.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
(On y indiquera ses zéros)

(2) On considère la fonction g définie par :
$g(x) = \sqrt{6{\cdot}x^2 - 11{\cdot}x - 10}$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

E.37 On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$

(1) (a) Factoriser l'expression : $\left(x{-}\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

(b) Justifier l'égalité suivante : $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{(x{-}3)(x{+}2)}}$

(2) (a) Établir le tableau de signes de l'expression :
$(x-3)(x+2)$.

(b) Déterminer l'ensemble définition de la fonction f.

(3) En déduire, sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$, la monotonie de la fonction f.

8. *Composition : inverses*

E.38 On considère la fonction f définie par l'expression :
$f(x) = 2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4$

On construit une fonction g définie par l'expression :
$$g(x) = \frac{1}{2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4}$$

(1) Conjecture sur la fonction g :

Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

(a) Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g

(b) Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

(2) Étude de la fonction g :

(a) Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	0 ↘	$\cdots$ ↗	0 ↗	$+\infty$

(b) Justifier que la fonction g n'est pas définie pour $x{=}1$ et $x{=}2$.

ⓒ Justifier que la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;1[$.

E.39 On considère la fonction f définie par l'expression :
$f(x) = -x^2 - 2{\cdot}x + 3$

① Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On justifiera la construction de ce tableau et on y insérera les zéros de la fonction f.

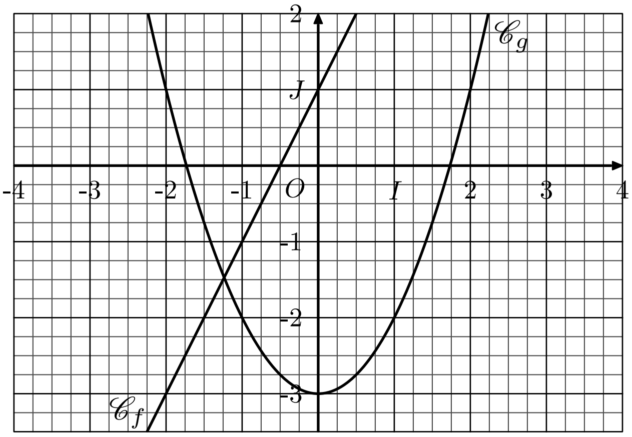
② ⓐ On considère la fonction g définie par l'expression :
$$g(x) = \sqrt{-x^2 - 2{\cdot}x + 3}$$
Sans justification, dresser le tableau de variations de la fonction g.

ⓑ On construit une fonction h définie par l'expression :
$$h(x) = \frac{1}{-x^2 - 2{\cdot}x + 3}$$
Sans justification, dresser le tableau de variations de la fonction h.

E.40 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par les relations :
$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$
Sans justification, donner le sens de variations des fonctions f et g sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

9. *Un peu plus loin - composée de fonctions*

E.41 On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4\,;4]$ par les relations :
$$f(x) = 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3$$
On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



① Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

② On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g(f(x))$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

ⓐ Déterminer les valeurs des expressions suivantes :
$$g(f(-1)) \quad ; \quad g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

ⓑ Compléter le tableau de valeurs suivant :

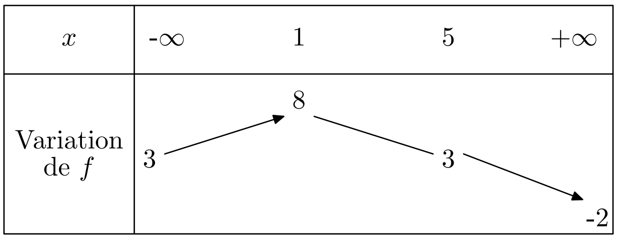
x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(f(x))$					

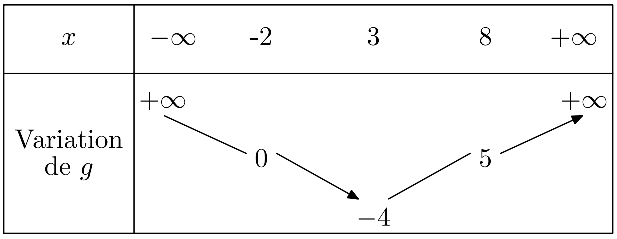
On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g(f(x))$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

③ Tracer dans le repère ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g \circ f$.

④ Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g \circ f$.

E.42 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ dont les tableaux de variation sont donnés ci-dessous :





① Déterminer la valeur des expressions suivantes :

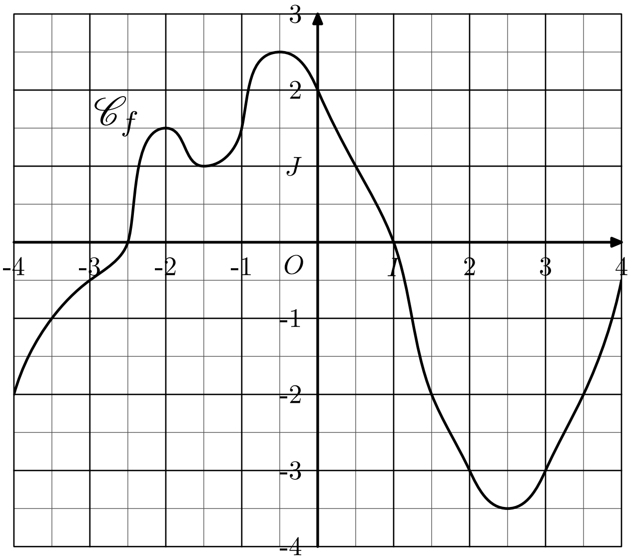
ⓐ $(g \circ f)(1)$ ⓑ $(g \circ f)(5)$ ⓒ $(f \circ g)(8)$

② ⓐ Justifier que la fonction $g \circ f$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$.

ⓑ Déterminer le sens de variation de la fonction $g \circ f$ sur l'intervalle $[1\,;5]$

③ Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction composée $g \circ f$.

E.43 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



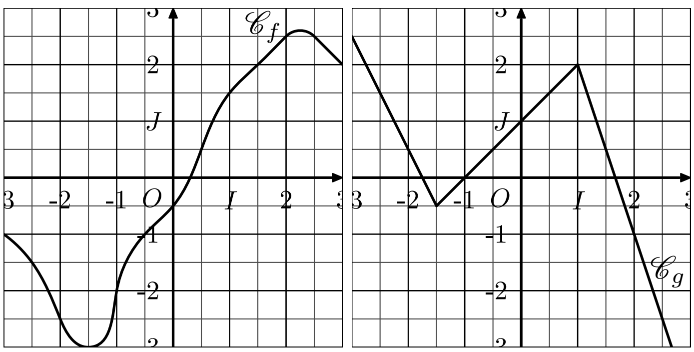
1. Calculer les images suivantes :

   a. $(f\circ f)(1)$ b. $(f\circ f)(-2)$ c. $(f\circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

   a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

E.44 On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

   a. $(f\circ g)(-2)$ b. $(f\circ g)(1{,}5)$ c. $(f\circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

   a. $(g\circ f)(-3)$ b. $(g\circ f)(0)$ c. $(g\circ f)(1)$

E.45 On considère les deux fonctions suivantes :

$f\colon x\longmapsto x^2-2 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto \sqrt{x}$

1. a. Donner les ensembles de définition des fonctions f et g.

   b. Peut-on parler de l'image de 1 par la fonction $g\circ f$? Justifier votre réponse.

2. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

   b. Donner l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$.

E.46 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	-2 ↗	3 ↘	0

Dresser le tableau de variations des fonctions g, h, j définies ci-dessous :

1. $g(x)=f(x+2)$ 2. $h(x)=f(3x)$

3. $j(x)=f(2x+1)$

E.47 Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction $g\circ f$:

1. $f\colon x\longmapsto 3x-5 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto x^2$
2. $f\colon x\longmapsto x^2-1 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto -2x+4$
3. $f\colon x\longmapsto x^2+1 \quad ; \quad g\colon x\longmapsto x^2+1$

10. *Exercices non-classés*

E.48 On considère trois fonctions :

$f : x\longmapsto 3x-1 \quad ; \quad g : x\longmapsto x^2$

$h : x\longmapsto 2x-1$

Chacune de ses fonctions sont des fonctions de référence.

1. On considère la fonction composée f par g puis par h. C'est-à-dire que l'image de 2 se calcule par cette fonction composée de la manière suivante :

   $$2\xmapsto{f}5\xmapsto{g}25\xmapsto{h}49$$

   a. Calculer l'image par cette fonction des nombres -1, 0 et 1.

   b. Calculer les antécédents de 127.

   c. Donner une écriture algébrique de cette fonction composée.

2. Nous allons faire le travail inverse. Voici de nouvelles fonctions, décomposez-les en fonctions de références.

   a. $k(x)=3x^2+1$ b. $\ell(x)=\dfrac{1}{3x+1}$

   c. $m(x)=\sqrt{1-x^2}$ d. $n(x)=\dfrac{3}{\left(\sqrt{x}+5\right)^2}$

E.49

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction :
   $g : x \longmapsto -2{\cdot}f(x)+5$
   - a. Si f est croissante, justifier que la fonction g est décroissante.
   - b. Si f est décroissante, justifier que la fonction g est croissante.
2. On considère la fonction h définie par la relation :
   $h(x) = -2x^2+5$
   Déduire, de la question précédente, que la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}_-$.
3. Justifier chacune des assertions suivantes :
   - a. $j : x \longmapsto 5-\dfrac{2}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - b. $k : x \longmapsto 2{\cdot}(x+2)^2-5$ est croissante sur $\big[-2\,;+\infty\big[$.

E.50 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variations :

x	-∞		-1		3		+∞
Variation de f	$+\infty$	↘	5	↘	2	↗	$+\infty$

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{2}{f(x)-1}+3$$

1. Déterminer l'image des nombres -1 et 3 par la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$.

E.51 Soit g la fonction définie par la relation :

$$g(x) = \frac{1}{-5x^2+3x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Justifier que le polynôme $Q=-5x^2+3x+1$ admet le tableau de variations suivant :

x	-∞		$\frac{3-\sqrt{29}}{10}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{3+\sqrt{29}}{10}$		$+\infty$
Variation de Q	-∞	↗	0	↗	$\frac{29}{20}$	↘	0	↘	$+\infty$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   (On n'indiquera que les sens de variations)

E.52 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+2}$$

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[-1\,;+\infty\big[$.

E.53 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ définie par la relation :

$$f(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\cdot\frac{1}{x}+5$$

1. Dresser le tableau de signes et le tableau de variations du polynôme du second degré :
   $$P(x) = 2x^2-3x+5$$
2. En remarquant que la fonction f est la composée de la fonction inverse avec ce polynôme du second degré, établir que la fonction est décroissante $\Big]0\,;\dfrac{4}{3}\Big]$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(ne pas chercher à compléter le tableau avec les valeurs des images.)*

E.54 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.