Hors programme lycée / Dérivées

1. Nombres dérivés

E.1 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=4{\cdot}x^2-4{\cdot}x-3$

1. Calculer le nombre dérivé de la fonction f en 2.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

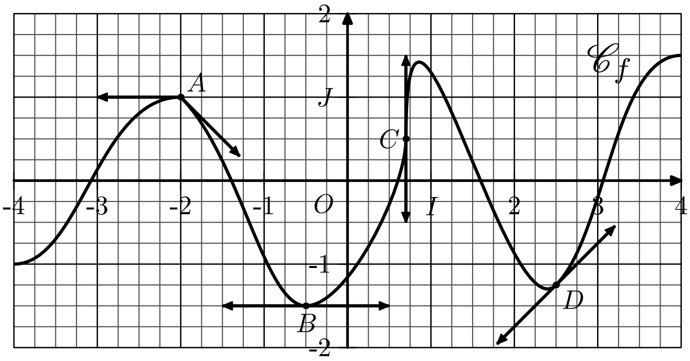
2. Nombres dérivés à gauche et à droite

E.2 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x)=\Big(\frac{1}{2}{\cdot}x+2\Big)\cdot\sqrt{x^2+2x+1}+1$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Établir l'égalité suivante pour tout nombre réel h :
$$\frac{f(-1{+}h)-f(-1)}{h}=\frac{(h+3)\cdot\sqrt{h^2}}{2\cdot h}$$
   b. En déduire la valeur des deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^-}\frac{f(-1{+}h)-f(-1)}{h}$$
$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{f(-1{+}h)-f(-1)}{h}$$
3. Que pouvez-vous dire sur l'aspect de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 ? *(tracer la courbe à l'aide d'une calculatrice)*

E.3 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f. Voici sa représentation :



1. Justifier que la fonction f n'est pas dérivable pour l'abscisse du point C.
2. a. Graphiquement, déterminer les deux limites suivantes :
$$\lim_{h\mapsto 0^-}\frac{f(-2{+}h)-f(-2)}{h}\quad;\quad\lim_{h\mapsto 0^+}\frac{f(-2{+}h)-f(-2)}{h}$$
   b. La fonction f est-elle dérivable en -2 ?
3. Déterminer, graphiquement, la valeur des nombres dérivés de la fonction f aux abscisses des points B et D.

E.4 On note f la fonction racine carrée ; cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Considérons $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $h\in\mathbb{R}$ tel que $\big[x{-}h\,;x{+}h\big]\subset\mathbb{R}_+$
   a. Établir la limite suivante :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
   b. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en $x\in\mathbb{R}_+^*$.
2. a. Déterminer la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}$$
   b. Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction f en 0?

E.5

1. Justifier la non-dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :
   a. $f(x)=\sqrt{x}$ b. $g(x)=|x|$
   c. $h(x)=\sqrt{x^2+x}$
2. Considérons la fonction j définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $j(x)=x{\cdot}|x|$

   Justifier que la fonction j est dérivable en 0.

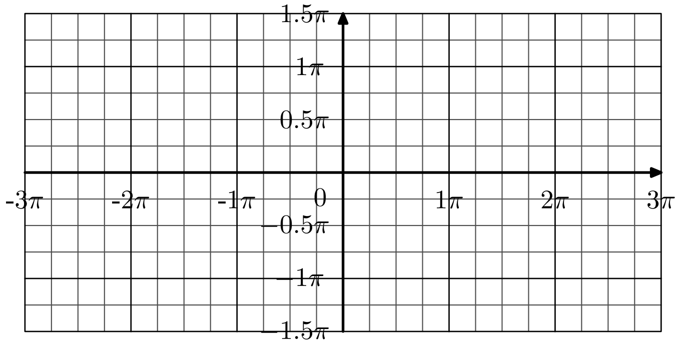
E.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x)$$

1. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b. Justifier que (T) est également la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse π.
   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (T)
2. On considère la droite (d) d'équation :
   $$y = -\frac{1}{2} \cdot x.$$
   a. Justifier que la droite (d) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en plusieurs points.
   b. Étudier la position relative de (d) et $\mathscr{C}_f$.
3. a. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	π	2π	3π	4π
$f(x)$				

   b. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}_+$



4. a. Étudier la parité de la fonction f.
   b. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}_-$

3. *Développement limité*

E.7

1. Soit f une fonction définie en 0 telle que :
   $$f(x) = a \cdot x + b + x \cdot \varepsilon(x) \quad \text{où } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \mapsto 0} \varepsilon(x) = 0$$
   Montrer que la fonction f est dérivable en 0.
2. Soit g une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :
   $$g(x) = 3 - 2x + x^2$$
   a. Justifier, sans effectuer aucun calcul, que la fonction g est dérivable en 0.
   b. Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 0.
3. Soit h une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :
   $$h(x) = \frac{-3x^3 + 3x^2 + x - 2}{x + 1}$$
   a. Établir l'égalité suivante : $h(x) = 3x - 2 - \dfrac{3 \cdot x^3}{x+1}$
   b. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0.

4. *Polynômes du second degré : fonctions dérivées*

E.8

Soit f une fonction du second degré définie par l'expression :
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$
où a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

On appelle la **fonction dérivée de la fonction** f, la fonction f' définie par :
$$f'(x) = 2a \cdot x + b$$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous afin d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	a	b	c	$f'(x) = 2a \cdot x + b$
$-2 \cdot x^2 - x + 1$				
$0{,}25 \cdot x^2 + x - 1$				
$x^2 - x$				
$-4 \cdot x^2 - 2$				

E.9 Donner les dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \longmapsto -3x + 2$
2. $g : x \longmapsto 4x^2 - 4$
3. $h : x \longmapsto 2x^2 + 3x$
4. $j : x \longmapsto 5x - 2x^2$
5. $k : x \longmapsto -2x^2 + 2x$
6. $\ell : x \longmapsto (3x + 11)(4 - x)$

E.10 Donner les dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \longmapsto 3x + 2$
2. $g : x \longmapsto x^2 + 4$
3. $h : x \longmapsto x^2 + x$
4. $j : x \longmapsto x + 2x^2$
5. $k : x \longmapsto 3x^2 - 2x$
6. $\ell : x \longmapsto (x + 1)(2x - 4)$

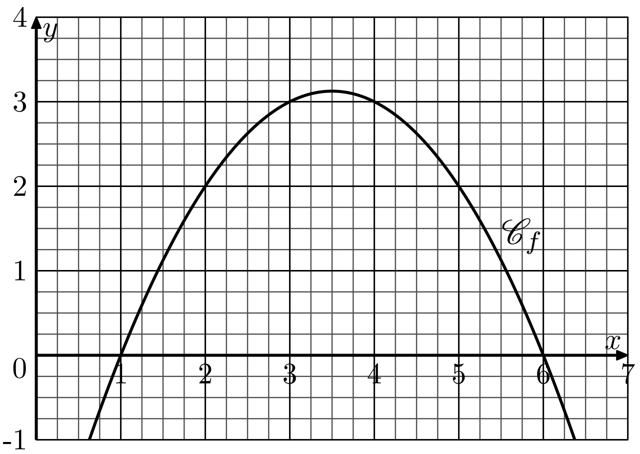
5. *Polynômes second degré : tangentes*

E.11

Soit f une fonction f dérivable en a et notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation réduite :
$$y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$$

On considère la fonction f définie pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $\big[0\,;7\big]$ par :
$$f(x) = -0{,}5\cdot x^2 + 3{,}5\cdot x - 3$$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et A le point d'abscisse 2 appartenant à $\mathscr{C}_f$.

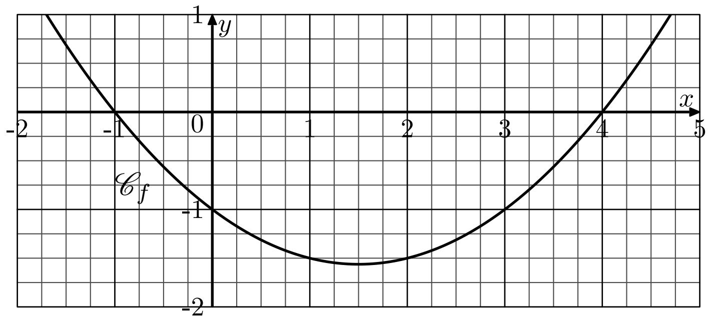
1. Donner les coordonnées du point A.
2. Déterminer la valeur du nombre dérivée de la fonction f en $x = 2$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessous :



E.12 On considère la fonction f définie pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $\big[-2\,;5\big]$ par :
$$f(x) = 0{,}25\cdot x^2 - 0{,}75\cdot x - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et A le point d'abscisse 2 appartenant à $\mathscr{C}_f$.

1. Donner les coordonnées du point A.
2. Déterminer la valeur du nombre dérivée de la fonction f en $x = 2$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessous :



E.13 On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = 2\cdot x^2 - 5\cdot x + 4$$
On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

1. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
2. Vérifier le résultat précédent s à l'aide de la calculatrice

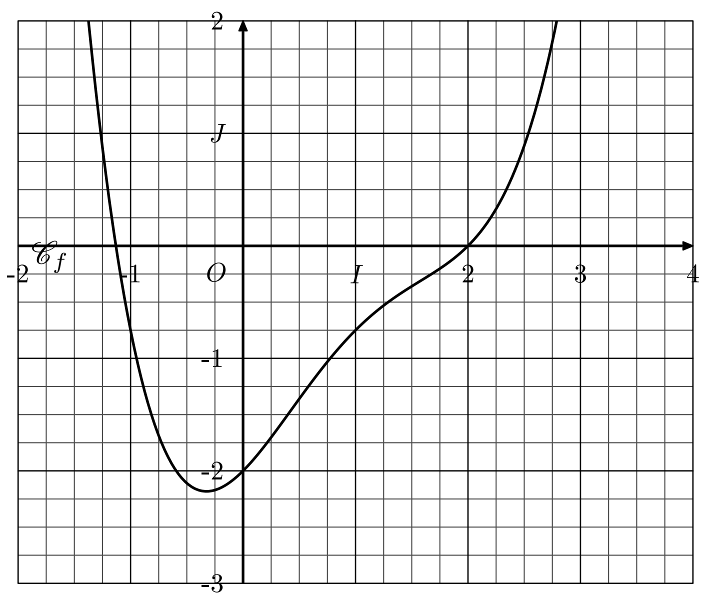
E.14 On considère la fonction f polynomiale de degré 2 qui vérifie les deux conditions ci-dessous :

- L'ensemble des zéros de la fonction f est : $\Big\{-1\,;\dfrac{1}{2}\Big\}$
- $f'(1) = 5$

Déterminer l'expression développée et réduite de la fonction f.

6. *Polynômes : tangentes*

E.15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f : x \longmapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x - 2$$
Voici la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$:



Nous allons montrer qu'il existe une droite (d) de coefficient directeur 1 qui est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en deux points distincts.

1. Résoudre l'équation : $f'(x) = 1$
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (d).

E.16 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est donnée par :

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x - 3$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et (d) la droite d'équation :

$$y = -x + 1$$

Démontrer que la droite (d) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ dont on précisera en deux points dont on précisera les coordonnées *(on pourra conjecturer l'abscisse de ces points à l'aide de la calculatrice)*.

7. *Polynômes : problèmes autour des variations*

E.17 Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = -x^3 + 2$

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 10$
2. Établir que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

E.18 On considère un jeu de boules comme le jeu de pétanque par exemple. Un joueur lance une boule et on s'intéresse ici à la trajectoire de la boule.

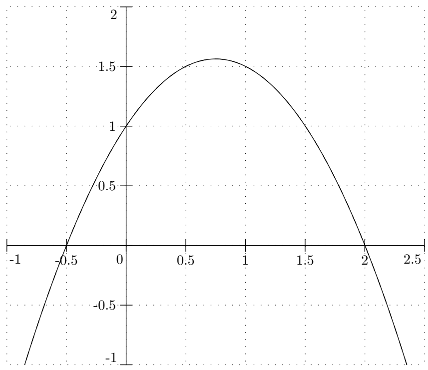
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$g(x) = -x^2 + 1{,}5 \cdot x + 1$$

Où :

- x est le temps écoulé, en seconde, à partir de l'instant où la boule quitte la main du lanceur ;
- $g(x)$ représente, en mètres, la distance *(verticale)* séparant le sol de la boule après x secondes écoulées

1. La fonction g est représentée par une partie de la courbe donnée en annexe.
   Repasser en couleur la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g sur la feuille d'annexe.
2. a. Calculer $g(0)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 0.
   b. Calculer $g(1)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 1.
3. Calculer $g'(x)$, g' désignant la dérivée de la fonction g.
4. a. Rechercher le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x, $x \in [0\,;2]$.
   b. En déduire le tableau complet des variations de la fonction g.
   c. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule atteint sa hauteur maximale.
   d. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule touche le sol.



E.19 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 54 \cdot \left(x^3 - 2 \cdot x^2 + x\right) \text{ sur l'intervalle } [0\,;1].$$

1. a. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   b. Vérifier que : $f'(x) = 54 \cdot (3 \cdot x - 1)(x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$.
   c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
2. Donner le maximum de f sur l'intervalle $[0\,;1]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint?
3. Recopier et compléter le tableau suivant par les valeurs de $f(x)$ arrondies à 0,1 près.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$		6,9								

4. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur la feuille de papier millimétré jointe, en prenant pour unités graphiques 10 *cm* en abscisse et 1 *cm* en ordonnée.

E.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b, c \in \mathbb{R}.$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite reliant les points de la courbe A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 3.
2. a. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f pour $x = 2$.
   b. Quelle conclusion apporter?

8. *Fonctions dérivées : racine carrée*

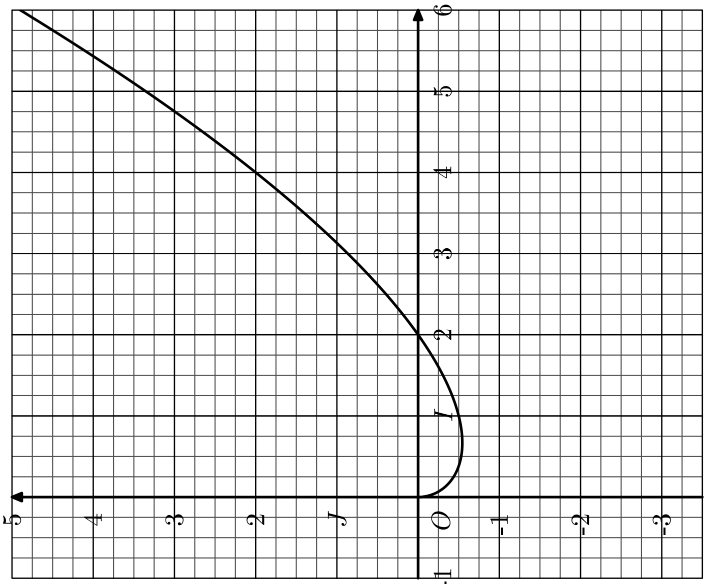
E.21 Le tableau ci-dessous vous présente, pour chaque ligne, l'expression de l'image de x par une fonction et l'expression du nombre dérivé en x de cette fonction. Vérifier l'exactitude de l'expression du nombre dérivée en x :

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$x^3-5{\cdot}x^2+x-3$	$3{\cdot}x^2-10{\cdot}x+1$
g	$\dfrac{2{\cdot}x-1}{x^2+x}$	$-\dfrac{2{\cdot}x^2-2{\cdot}x-1}{x^2{\cdot}(x+1)^2}$
h	$(x^2-3){\cdot}\sqrt{x}$	$\dfrac{5{\cdot}x^2-3}{2{\cdot}\sqrt{x}}$
j	$\dfrac{3{\cdot}x-2}{2-x}$	$\dfrac{4}{(x-2)^2}$

E.22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x)=\sqrt{x}{\cdot}\Big(\frac{1}{2}{\cdot}x-1\Big)$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Établir l'égalité suivante :
$$f'(x)=\frac{3{\cdot}x-2}{4{\cdot}\sqrt{x}}$$
2. a. Donner les coordonnées du point de $\mathscr{C}_f$ ayant 4 pour abscisse.
   b. Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 4.
   c. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.
   d. Tracer la tangente (T).

E.23 On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et on considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{x}{\cdot}(x-1)$
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le plan.

1. Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.
2. Vérifier vos résultats à l'aide de la calculatrice

E.24 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

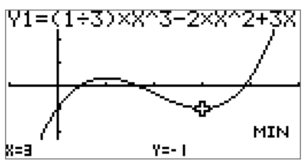
$$f(x)=\sqrt{x}-x$$

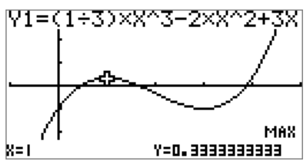
1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
2. a. Déterminer l'image et le nombre dérivé du nombre 2 par la fonction f.
   b. Déterminer l'expression de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
3. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (T) à l'aide de votre calculatrice.
   b. Conjecturer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente (T).

9. *Calculatrice et dérivée*

E.25

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x réel est définie par la relation :
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$$
Voici deux captures d'écran de la représentation graphique de cette fonction sur l'écran d'une calculatrice présentant le minimum et le maximum local de cette fonction :





Dresser, sans justification, le tableau de signes de la fonction dérivée f' de la fonction f.

2. À l'aide de la calculatrice et sans justification, dresser le tableau de signes associé aux dérivées des fonctions suivantes :

(a) $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2$

(b) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2$

(c) $j(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x - 1$

(d) $k(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$

E.26 À l'aide de la calculatrice et sans justification, pour chacune des fonctions ci-dessous, dresser le tableau de signes de la fonction dérivée associée :

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ (b) $g(x) = \dfrac{4}{x^2+2x+3}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ (d) $j(x) = \dfrac{x-5}{-x^2+4x+4}$

E.27 Répondre aux questions suivantes à l'aide de la calculatrice :

(1) Soit f la fonction définie par :
$f(x) = x^3 - 4{\cdot}x^2 + x + 2$

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\big[-1\,;4\big]$.

(2) On considère la fonction affine g définie par :
$g(x) = -3{\cdot}x + 2$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

10. Produits

E.28 On considère les deux fonctions f et g définies ci-dessous par :

(1) $f(x) = (x^2-3)(2-x^3)$

(2) $g(x) = \big(x^7 - 4{\cdot}x - 1\big)\big(x^3 + 2{\cdot}x\big)$

Déterminer les expressions de leur fonction dérivée.

E.29

(1) $f\colon x \mapsto (2{\cdot}x^2-1)(4{\cdot}x-1)$ (2) $g\colon x \mapsto (5{\cdot}x^4-x+1)(3-2{\cdot}x^2)$

11. Quotient

E.30 On considère les deux fonctions f et g par :

$$f(x) = (2{\cdot}x+1)(3{\cdot}x^2-x+1) \quad ; \quad g(x) = \dfrac{2{\cdot}x+5}{1-4{\cdot}x}$$

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune de ces deux fonctions.

E.31 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

(a) $f\colon x \longmapsto \dfrac{2-2x}{5x+1}$ (b) $g\colon x \longmapsto (3x-2)(2x^2+1)$

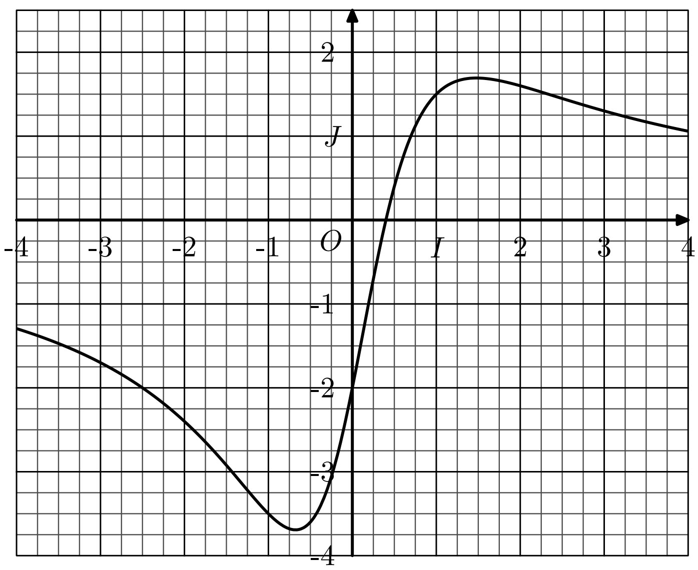
(c) $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{3x+1}$ (d) $j\colon x \longmapsto (2x^2+3x)\cdot\sqrt{x}$

12. Quotient et tangentes

E.32 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \dfrac{5{\cdot}x-2}{x^2+1}$$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



(1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Établir

l'égalité suivante :

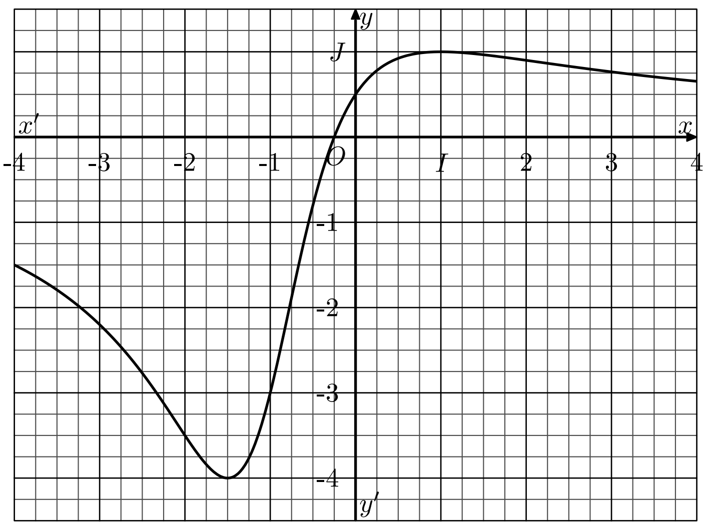
$$f'(x) = \frac{-5{\cdot}x^2+4{\cdot}x+5}{\left(x^2+1\right)^2}$$

2. a. Donner les coordonnées du point de $\mathscr{C}_f$ ayant 1 pour abscisse.
   b. Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1.
   c. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   d. Tracer la tangente (T).

E.33 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4{\cdot}x+1}{x^2+2{\cdot}x+2}$$

On donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous :



1. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{2{\cdot}\big(1-x\big){\cdot}\big(2x+3\big)}{\left(x^2+2{\cdot}x+2\right)^2}$$
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.
   b. Tracer la droite (Δ) dans le repère ci-dessus.
3. Quelle particularité possède les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$ et 1 ? Justifier votre réponse.

13. *Quotient et variations*

E.34 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3{\cdot}x+3}{x^2+3}$$

1. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-3{\cdot}x^2-6{\cdot}x+9}{\left(x^2+3\right)^2}$$
3. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. *(on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux)*

E.35 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{2-x}{x^2+5}$$

1. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{x^2-4{\cdot}x-5}{\left(x^2+5\right)^2}$$
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f'
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on notera la valeur exacte des extrémums locaux).*

E.36 On considère la fonction f définie par la relation :

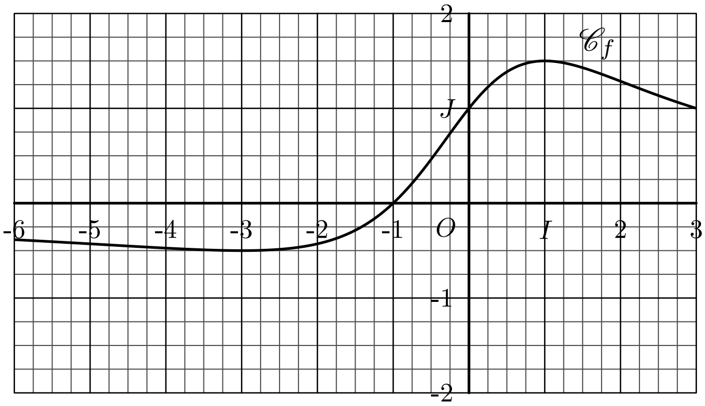
$$f(x) = \frac{x^2 + 2{\cdot}x + 1}{x - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Établir l'égalité suivante :
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2{\cdot}x - 3}{(x-1)^2}$$
3. a. Établir le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On indiquera la valeur exacte des deux extremums locaux de cette fonction.
4. Déduire de l'ensemble des questions précédentes le tableau de signes de la fonction f.

E.37 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x + 3}{x^2 + 3}$$

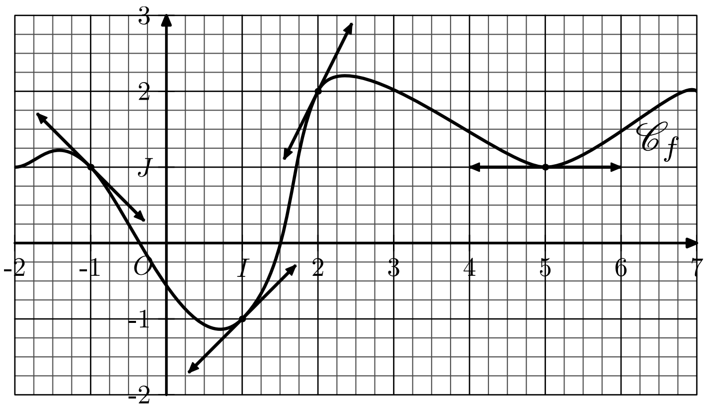
Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide de sa représentation graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-6\,;3]$ *(par lecture graphique, on utilisera des valeurs approchées).*
3. a. Établir l'expression suivante de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = \frac{-3{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 9}{(x^2+3)^2}$$
   b. Étudier le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
4. Quelle conjecture peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée f' et du sens de variation de la fonction f ?

14. *Révisions sur les dérivés*

E.38 On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;7]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$, aux points d'abscisses -1, 1, 2, 5 ont été tracées sur la représentation ci-dessus.

1. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -1 et en 1.
2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 2 et 5.

E.39 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = -5x^3 + 2x - 2$ b. $g(x) = \sqrt{x}\cdot(5x+1)$

c. $h(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$ d. $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{5-2x}$

E.40 ⚠ Il est possible que certains des résultats, à démontrer, ne soient pas lisibles sur l'écran de votre calculatrice graphique.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10\cdot(x-8)}{x\cdot(x-1)}$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative relative à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Déterminer les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

   c. En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $\alpha=8+2\sqrt{14}$ et pour $\beta=8-2\sqrt{14}$.

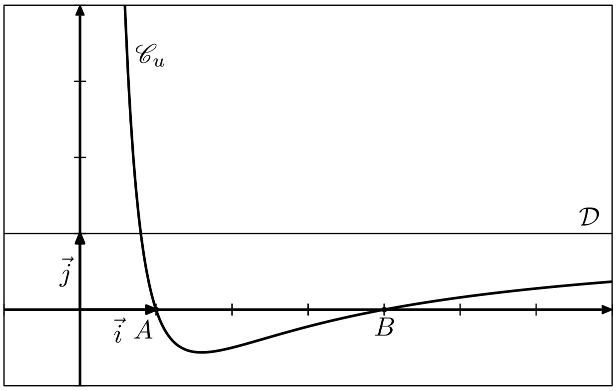
   c. Dresser le tableau de variations de f *(on indiquera les valeurs approchées au dixième près des extrémums locaux à l'aide de la calculatrice).*

E.41 ⚠ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$:



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1\,;0)$ et $B(4\,;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. a. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

   b. Donner $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

   c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif :
   $$u(x) = \frac{x^2-5\cdot x+4}{x^2}$$

2. On suppose l'existence d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant admettant pour dérivée la fonction u : $f'=u$

   Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (aucune valeur ne sera indiquée dans le tableau)

E.42 ⚠

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

Barème : A chaque question est attribué 1 point.
Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit f la fonction définie sur $]4\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x+1-\frac{8}{x-4}$$

et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Une autre expression de $f(x)$ est :

   a. $f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-1}$

   b. $f(x) = \dfrac{2x^2-9x+12}{4-x}$

   c. $f(x) = \dfrac{2x^2+9x-2}{x-4}$

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]4\,;+\infty[$. Une expression de $f'(x)$ est :

   a. $f'(x) = -2-\dfrac{8}{(x-4)^2}$

   b. $f'(x) = \dfrac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$

   c. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+16x-24}{(x-4)^2}$

3. La courbe Γ admet pour asymptote :

   a. la droite d'équation $y=4$

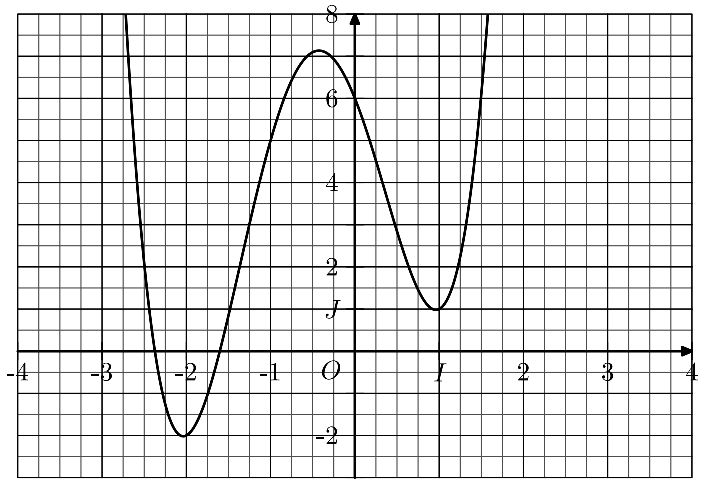
   b. la droite d'équation $x=4$

   c. la droite d'équation $y=4x$

E.43 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{3}{2}\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - \frac{9}{2}\cdot x^2 - 5\cdot x + 6$$

On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:



La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'équation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

15. *Dérivabilité en un point*

E.44 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 3 & \text{pour tout } x \in \left]-\infty\,;-1\right] \\ f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} & \text{pour tout } x \in \left]-1\,;+\infty\right[\end{cases}$$

1. a. Effectuer le tracé de la fonction f à l'aide de votre calculatrice.
   b. Faire une conjecture sur la continuité et sur la dérivabilité de la fonction f.
2. Justifier que la fonction f est continue en -1.
3. Justifier que la fonction f est dérivable en -1.

E.45 **A - Etude d'une fonction :**

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x) = (x-1)\cdot\sqrt{x^2-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. a. Étudier les deux limites suivantes :
   $$\lim_{h \mapsto 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad ; \quad \lim_{h \mapsto 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$
   b. Étudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1.
3. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

B - Prolongement par continuité :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[\\ g(x) = -x^3 + x^2 + x - 1 & \text{pour } x \in \left[-1\,;1\right] \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction g. Justifier vos affirmations.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
4. Justifier l'existence d'un unique nombre α appartenant à $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
   $g(\alpha) = 2 \quad ; \quad 2 < \alpha < 2{,}1$

16. *Exercices non-classés*

E.46 Un rectangle $ABCD$ a pour périmètre $10\,cm$.

Partie A

Dans cette partie, on pose $AB = x$ *(en cm)*.s

1. Dans quel intervalle fermé le réel x peut-il varier?
2. Exprimer l'aire $S(x)$ du rectangle $ABCD$ en fonction de x.

Partie B

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = -x^2 + 5\cdot x$.

1. En faisant appel à sa fonction dérivée f', dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $ABCD$ est maximale.
3. a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé *(unité : $2\,cm$ sur chaque axe)*, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représenta-

tive de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

b Sur la même figure qu'au 3 a, tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

E.47 On veut résoudre, dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation : $x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5=0$.

A - Méthode graphique

1 a Vérifier que le nombre 2 n'est pas solution de l'équation.

b Montrer que, pour $x\neq 2$, l'équation $x^2=\dfrac{4{\cdot}x-5}{x-2}$ est équivalent à l'équation $x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5=0$

2 Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 2 par $f(x)=\dfrac{4{\cdot}x-5}{x-2}$. Sa courbe représentative H dans un repère orthonormé est donnée en annexe à rendre avec la copie.

a Par lecture graphique, indiquer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

b Déterminer la dérivée f' de f puis justifier le résultat lu dans la question précédente.

3 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$. Tracer sa courbe représentative P dans le repère utilisé pour H.

4 Par lecture graphique, déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3-2x^2-4x+5=0$.
Donner la valeur exacte ou une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune de ces solutions.

B - Méthode algébrique

1 Vérifier que, pour tout réel :

$$(x-1)(x^2-x-5)=x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5.$$

2 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x^2-x-5$.

a Étudier le sens de variation de h.

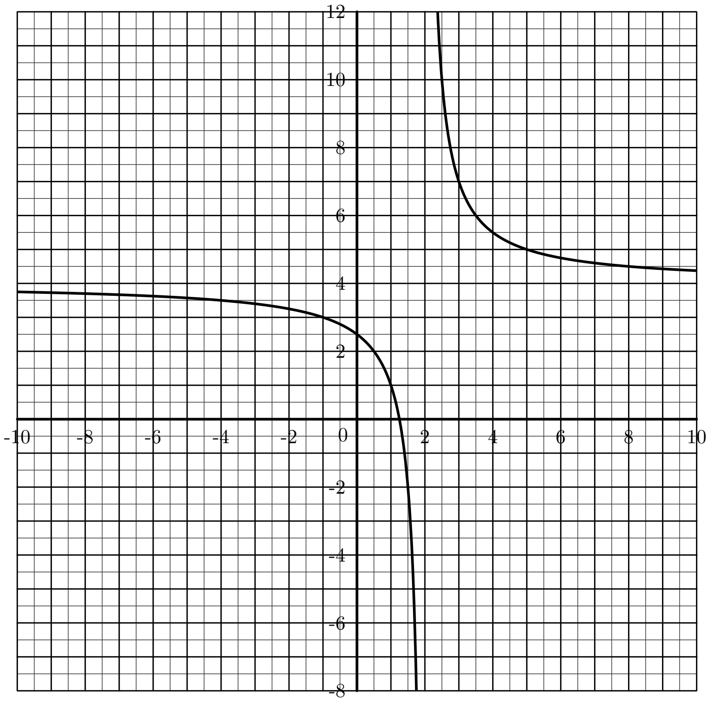
b Montrer que $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est la valeur minimum prise par h.

c On pose : $x=\dfrac{1}{2}+u$. Exprimer $h\left(\dfrac{1}{2}+u\right)$ en fonction de u ; factoriser l'expression obtenue.

d En déduire les valeurs du réel x pour lesquelles $h(x)=0$.

3 Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5=0.$$



E.48 Dans un repère, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=x^3-2x^2+2x+1$$

On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

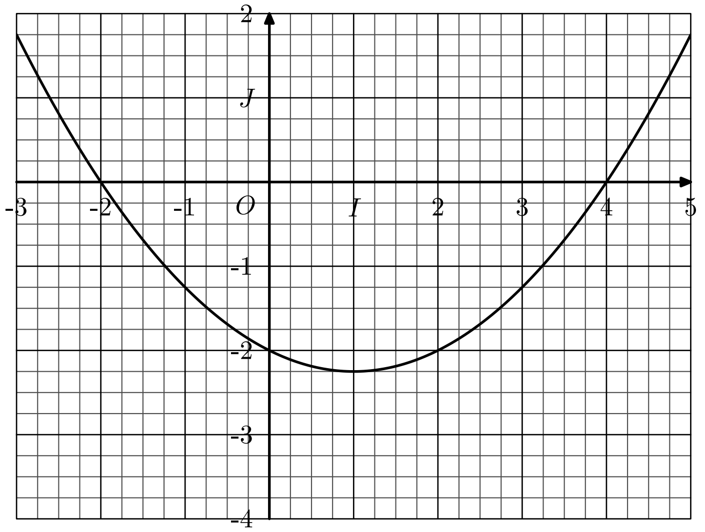
1 Déterminer l'équation réduite de la droite (T).

2 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite (T).

E.49 On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x - 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$$y = \frac{1}{2}\cdot x - 3$$
   b. Comment s'appelle la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. a. Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$$y = -\frac{3}{2}\cdot x - 3$$
   b. Comment s'appelle la droite (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?