Hors programme lycée / Ensemble, analyse combinatoire et probabilité

ChingEval : 2 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Anciennes annales - adéquations

E.1 **Partie A**

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleu, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer, on note la couleur de la face cachée.

On considère les événements suivants :

- E est l'événement "*à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes*" ;
- F est l'événement "*à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur*".

1. Calculer les probabilités des événements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.
2. On effectue dix parties identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours de ces dix parties *(on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près)*

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance, ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est caché ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(f_i-\frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le $9^{\text{ième}}$ décile de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré?

E.2

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.
   a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact?
   b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon?
   c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon?
   d. Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p_n > 0{,}99$?
2. Ce tireur participe au jeu suivant :

   Dans un premier temps, il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 *(la face obtenue avec un tel dé est la face cachée)* ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon. Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 *(on pourra utiliser un arbre pondéré)*.
3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela, il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

   a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.
   b. On pose $d^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\left(f_k-\frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.
   c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Min.	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Max.
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

   Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé?

E.3 ⚠ Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée .
Les trois questions sont indépendantes.

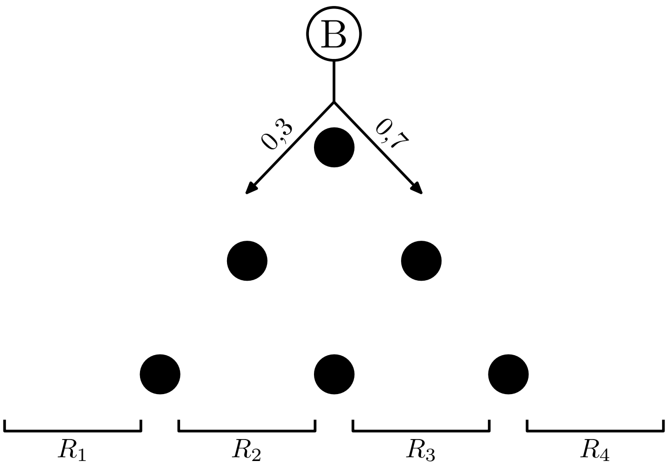
1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que :
   - si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
   - le teste est positif pour 3 % des personnes saines.

   Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif?

   (a) 0,95 (b) 0,9 (c) 0,15 (d) 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type.

   On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4. À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite *(gauche et droite relatives à l'observateur)*.



   On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.
   Que valent p_1 et p_2?

   (a) $p_1 = p_2 = 0{,}5$

   (b) $p_1 = 0{,}216$ et $p_2 = 0{,}784$

   (c) $p_1 = 0{,}468$ et $p_2 = 0{,}532$

   (d) $p_1 = 0{,}468$ et $p_2 = 0{,}432$

3. Les 1000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234
8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964
4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914
5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737
2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367
8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943
3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480
7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129
8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986
0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320
0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721
4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354
2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605
1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599
0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017
1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035
9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781
8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894

   En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4
Occurences	93	116	102	102	94

Valeurs	5	6	7	8	9
Occurences	97	94	95	101	106

   Avec un tableau, on a simulé 1000 expériences de 1000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

   Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} \left(f_k - 0{,}1\right)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.

   On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile *(d_1 et d_9)*, le premier et troisième quartile *(A_1 et Q_3)* et la médiane *(Me))* :

   $d_1 = 000\,422$; $Q_1 = 0{,}000\,582$; $M_e = 0{,}000\,822$

   $Q_3 = 0{,}00\,1136$; $d_9 = 0{,}00145$

   En effectuant le calcul de d_2 sur la série des 1000 premières décimales de π, on obtient :

   (a) 0,000 456 (b) 0,004 56 (c) 0,000 314

4. Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypotèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse?

   (a) Oui (b) Non (c) Il ne peut pas conclure

2. *TD1 L4*

E.4 ⚠ On considère une urne dans laquelle il y a cinq jetons verts, quatre bleus et un rouge.

L'expérience aléatoire suivante consiste à tirer au hasard un jeton dans l'urne et à noter sa couleur.

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience.
2. Les issues de cette expérience aléatoire sont-elles équiprobables?
3. Citer un événement élémentaire et un événement non élémentaire associés à cette expérience.

E.5 Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω. Traduire en termes ensemblistes *(en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et du passage au complémentaire, ainsi que A, B et C)* les événements suivants :

a. Seul B se réalise.
b. A et C se réalisent, mais pas B.
c. Deux événements ou moins, parmi A, B et C se réalisent.

E.6 Soit un univers Ω et soient trois événements A, B et C de Ω. Traduire en termes ensemblistes *(en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que et)* les événements suivants :

1. Seul A se réalise.
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent.
4. au moins l'un des trois événements se réalise.
5. au moins deux des trois événements se réalisent.
6. aucun ne se réalise.
7. au plus l'un des trois se réalise.
8. exactement deux des trois se réalisent.

E.7 On tire deux cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- A : "*les deux cartes sont des carreaux*"
- B : "*il y a un roi et un sept*"
- C : "*les deux cartes sont des nombres*"

Que représentent les événements suivants?

a. $\overline{B}$ b. $A \cap B$ c. $C \cap B$

d. $(A \cup C) \cap B$

E.8 Deux événements A et B sont tels que :

$$\mathcal{P}(A) = 0{,}35 \quad ; \quad \mathcal{P}(\overline{B}) = 0{,}4 \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cap B) = 0{,}1$$

Calculer $\mathcal{P}(A \cup B)$

3. *TD2 L4*

E.9 Un sac contient 6 boules, indiscernables au toucher, numérotées :

1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4

On tire une boule au hasard et on note son numéro.

On nomme X la variable aléatoire qui, à une boule tirée lui associe son numéro.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

E.10 Treize personnes se réunissent à une table pour manger un morceau. De combien de façons différentes peuvent-elles s'asseoir sur les treize fauteuils si :

1. ces fauteuils sont situés du même côté d'une table rectangulaire *(penser à la Cène de De Vinci)*?
2. ces fauteuils sont disposés autour d'une table ayant une place de président de séance et six fauteuils de part et d'autre *(penser à de futures réunions professionnelles)*?
3. ces fauteuils sont disposés régulièrement autour d'une table ronde, en supposant qu'aucun fauteuil ne se distingue des autres *(penser à un festin chez des gaulois irréductibles)*?

E.11 Un tiroir contient 5 paires distinctes de chaussures noires, 3 paires distinctes de chaussures vertes et 2 paires distinctes de chaussures rouges. On choisit 2 chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. Combien de tirages contiennent deux chaussures de même couleur?
3. Combien de tirages contiennent un pied gauche et un pied droit?
4. Combien de tirages permettent de reconstituer un pied gauche et un pied droit de même couleur?

E.12 Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires indistinguables au toucher. On prélève au hasard une boule, on observe sa couleur puis on la remet dans l'urne en y ajoutant aussi une boule de la même couleur que celle qui a été prélevée. On effectue alors un second prélèvement au hasard et on observe la couleur de la deuxième boule prélevée.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge lors du premier prélèvement?
2. Sachant qu'une boule rouge a été tirée lors du premier prélèvement, quelle est la probabilité de tirer une boule noire lors du deuxième prélèvement?
3. Calculer la probabilité de prélever une boule rouge et une boule noire au cours de cette expérience.
4. Vérifier que la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a tiré une boule rouge lors du deuxième tirage est égale à $\frac{2}{3}$.

4. *TD3 L4*

E.13 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,4. Les résultats seront donnés à 0,001 près.

1. Calculer $\mathcal{P}(X=3)$ et $\mathcal{P}(X=11)$.
2. Calculer $\mathcal{P}(X\leqslant 2)$; $\mathcal{P}(X\geqslant 18)$ *(arrondir cette probabilité à 0,000 001 près)*.

E.14 Une urne contient 30 jetons dont 6 rouges. Chaque jour une personne tire au hasard un jeton dans l'urne puis le remet dedans. On considère un entier positif non nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de jetons rouges tirés après n jours consécutifs.

1. Quelle est la loi de X? Justifier.

Les valeurs approchées des questions suivantes seront arrondies au millième près.

2. Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, la personne tire 4 jetons rouges? au moins 1 jetons rouges?
3. Quel doit être le nombre minimal de jours consécutifs pour que la probabilité qu'aucun jeton rouge tiré soit inférieur à 0,001?

E.15 Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter les fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jours pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Un trajet coûte 10 euros et en cas de fraude l'amende est de 100 euros *(on ne paie que l'amende et pas le trajet en plus)*. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1. On suppose que $p=0{,}5$. La probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois est :

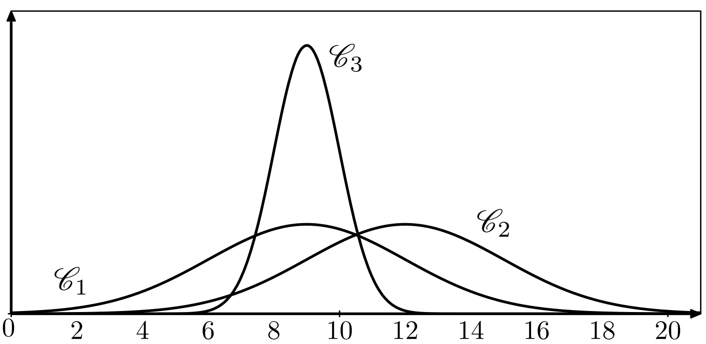
   (a) 0,2 (b) 0,97 (c) 7×10^{-10} (d) 2×10^{-1}

2. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo sur les 40 trajets.
   Justifier que $Z=400-100\cdot X$ puis calculer $E(Z)$.
3. On ne connaît plus la valeur de p. Pour quelles valeurs de p, la fraude systématique est-elle favorable à Théo? Justifier.
   On donnera l'ensemble des valeurs de p réalisant cette condition sous la forme d'un intervalle dont les bornes seront arrondies au centièmes près

5. *TD4 L4*

E.16 Dix panneaux solaires sont installés sur le toit d'une maison située dans une région à ensoleillement régulier et produisent de l'électricité. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque journée, associe la production électrique fournie par ces 10 panneaux? exprimée en kWh.
La variable Y suit la loi binomiale de paramètres $\mu=9$ et $\sigma=3$.

1. Quelle est la probabilité *(à 10^{-2} près)* que la production journalière soit comprise entre 6 et 12 kWh?
2. Parmi les trois fonctions de densités de probabilité représentées ci-dessous, laquelle peut être celle de la loi de Y? Justifier.



3. Les occupants de la maison consomment en moyenne 10 kWh par jour *(hors chauffage et eau chaude)*.

   (a) Quelle est la probabilité *(à 10^{-3} près)* que la production journalière des panneaux soit supérieure à la consommation moyenne quotidienne?

   (b) Quelle devrait être la consommation moyenne quotidienne de cette famille, en kWh, pour que cette probabilité soit environ de 90 %? On arrondira la réponse au dixième.

E.17

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $N(20\,;25)$, c'est-à-dire que son espérance est égale à 20 et son écart-type à 5.

   (a) Donner la valeur des nombres a et b pour que la variable aléatoire Z définie par :
   $$Z=\frac{X-a}{b}$$
   suive la loi normale centrée et réduite.

   (b) Calculer à 10^{-3} près :
   $P(X\leqslant 28)$; $P(X>28)$; $P(X=28)$
   $P(X\geqslant 28)$; $P(12<x<28)$; $P(15<x<25)$

   (c) Déterminer, à l'unité près, le nombre α tel que : $P(X<\alpha)=0{,}99$

   (d) Déterminer, à l'unité près, le nombre β tel que : $P(20-\beta<X<20+\beta)=0{,}95$

2. Soit Y telle que Y suit $N(m;4)$. Calculer m à 0,1 près pour que : $P(Y>25)=0{,}95$
3. Soit T telle que T suit $N(20\,;\sigma^2)$. Calculer σ à l'unité près pour que : $P(0<T<40)=0{,}99$

6. *Formule du binôme de Newton*

E.18 Soit n un entier naturel non-nul :

1. Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$

2. En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)\cdot\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1} - 2^n$

