Hors programme lycée / Exponentielles et logarithmes de base a

1. Puissances rationnelles

E.1 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}_+^*$:

(a) $x^3 = 5$ (b) $x^6 = 100$ (c) $(x+2)^4 = 5$

(d) $x^{\frac{1}{3}} = 2$ (e) $x^{\frac{5}{2}} = 6$ (f) $(x+1)^{\frac{2}{3}} = 2$

E.2 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^{\frac{1}{2}} > 5$ (b) $x^{\frac{3}{4}} \leqslant 3$ (c) $(x+2)^{\frac{2}{3}} \geqslant 1$

E.3 Écrire chaque des expressions ci-dessous sous la forme d'une puissance rationnelle :

(a) $x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}$ (b) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x$ (c) $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}}$

(e) $\dfrac{x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}}}{x^5} \cdot x^{\frac{1}{4}}$ (f) $\sqrt[3]{x^5 \cdot x^{\frac{1}{3}}}$

E.4 Déterminer les expressions des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} - 1$ (b) $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}$

(c) $h(x) = \mathrm{e}^x \cdot x^{\frac{1}{4}}$ (d) $j(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot (x+1)^3$

E.5

(1) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n non-nul :
$x^n - 1 = (x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$

(2) On considère le nombre A défini par : $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5} - 1}$

Déterminer une expression du nombre A définie par un quotient dont le dénominateur est un nombre entier.

2. Exponentielles et logarithmes de base a

E.6

(1) (a) Établir l'égalité suivante : $2^{\ln 15} = \mathrm{e}^{\ln 2 \cdot \ln 15}$

(b) Comparer sans l'aide de la calculatrice, les deux nombres suivants : $2^{\ln 15}$; $4^{\ln 5}$

(2) (a) Établir l'égalité suivante :
$9^{\frac{3}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2} \cdot \ln 3}$

(b) En déduire la comparaison des deux entiers suivants :
$9^{\frac{3}{4}}$; $3^{\frac{4}{3}}$

3. Manipulations algébriques : exponentielle

E.7 Donner le résultat des calculs suivants :

(a) $\ln \mathrm{e}^5$ (b) $\ln\left(\mathrm{e}^5 \cdot \mathrm{e}^{-2}\right)$

(d) $\mathrm{e}^{\ln 5}$ (e) $\mathrm{e}^{\ln 2 + \ln \frac{1}{2}}$

(f) $\dfrac{\mathrm{e}^{\ln 2}}{\mathrm{e}^{\ln 3}}$ (g) $\ln 10\,000 + \ln 100$

(h) $\dfrac{\ln 100}{\ln 1\,000}$ (c) $\ln \dfrac{2\mathrm{e}^3}{3} + \ln \dfrac{8\mathrm{e}^2}{3}$

E.8 ⚠ Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant le choix effectué. Chaque question est notée sur un point, avec la règle suivante :

- Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
- Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

(1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2 \cdot x + 1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(2) L'équation $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = \dfrac{4}{3}$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

(3) La suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

(4) Pour tout nombre réel x, on a : $1{,}01^x < 1\,000\,000$.

4. Manipulations algébriques : exponentielle et logarithme

E.9 Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. Penser à utiliser les différentes propriétés algébriques de ces fonctions :

(a) $\mathrm{e}^x + 1 \leqslant 1$ (b) $\mathrm{e}^{2 \cdot x + 1} > 0{,}5$

(c) $\mathrm{e}^{2 \cdot x} < 2 \cdot \mathrm{e}^x$ (d) $\ln(2 \cdot x + 1) > -0{,}5$

(e) $\ln(x^2) < 3$ (f) $\ln(2 \cdot x) > \ln x + 1$

(g) $2^x \geqslant 3$

https://chingmath.fr CC BY-NC

E.10 Résoudre les équations suivantes :

a) $e^x = 2$ b) $e^x = -1$

c) $\ln x = 5$ d) $\ln x = -2$

e) $\ln(2{\cdot}x+1) = 5$ f) $e^{3-2x} = 2$

g) $3^x = 2$ h) $\dfrac{x}{2}{\cdot}(2 - \ln x) = 0$

E.11 Donner les résultats des calculs suivants :

a) $e^{\ln 5}$ b) $e^{2\cdot\ln 2}$

c) $e^{\ln 2+\ln 2}$ d) $\dfrac{e^{\ln 9}}{e^{\ln 2}}$

e) $\ln(e^2 \cdot e^5)$ f) $\ln 5^2 - \ln \dfrac{1}{5^2}$

g) $\ln 10^{-5} + \ln 10^8$ h) $\dfrac{\ln 1\,000\,000}{\ln 1\,000}$

5. *Etude de fonctions : logarithme*

E.12 On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[1\,;12]$ par :

$f(x) = x - 1 - 4{\cdot}\ln x$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique : $1\,cm$.

1) a) Calculer la dérivée f' de la fonction f. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;12]$, $f'(x)$ peut s'écrire :

$f'(x) = \dfrac{x-4}{x}$

b) Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1\,;12]$, et en déduire le tableau de variations de f.

c) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe en son point d'abscisse 1.

2) a) Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs arrondies à 0,1 près.

x	1	2	3	4	6	8	10	11	12
$f(x)$									

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite (Δ) dans le même repère sur la feuille papier millimétré fournie.

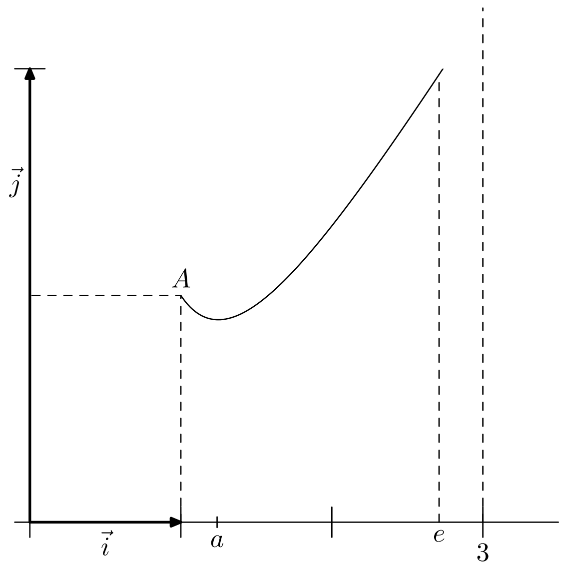
Formulaire : La dérivée de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction qui, à x associe $\dfrac{1}{x}$.

E.13 Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;3]$ par : $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\ln x}{x}$.

On rappelle que e est le nombre tel que : $\ln e=1$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

La courbe $(\mathscr{C})$ est donnée en annexe à rendre avec la copie.



Cette courbe permettra de contrôler l'exactitude de certains résultats, mais ne doit pas être utilisée pour justifier les réponses.

Partie I

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par :

$u(x) = x^2 - 2 + 2{\cdot}\ln x$

1) On note u' la dérivée de la fonction u. Calculer $u'(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle $[1\,;3]$.

3) On admet l'existence d'un nombre unique a, appartenant à l'intervalle $[1\,;3]$ tel que $u(a)=0$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant le signe de $u(x)$.

x	1	a	3
$u(x)$		0	

Partie II

1) a) On note f' la dérivée de la fonction f.

 CC BY-NC

On admet que pour tout x de l'intervalle $[1\,;3]$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{2{\cdot}x^2}$$

où u est définie dans la **partie I**.
Déterminer selon les valeurs de x le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;3]$.

b Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on ne calculera pas $f(a)$).*

2 On note A le point de coordonné $\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.
Montrer que la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse e est parallèle à la droite (OA).

3 Tracer la droite (OA) et la tangente (T) sur l'annexe à rendre avec la copie. Placer le point B de oordonnées $(a\,;f(a))$ et la tangente à la courbe $(\mathscr{C}$ au point B.

E.14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \big(\ln x\big)^2{\cdot}(3-2{\cdot}\ln x)$$

1 Montrer que pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{6{\cdot}\ln x{\cdot}(1-\ln x)}{x}$$

2 a Résoudre les inéquations suivantes :
- $\ln x \geqslant 0$
- $1-\ln x \geqslant 0$

b En déduire le signe de f' sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que son tableau de variations de la fonction f.

3 Calculer les extrémums de la fonction f sur $[0{,}75\,;3]$.

E.15

1 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+\dfrac{9}{2}$

a Calculer $f'(x)$ pour tout réel x

b Donner les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole

2 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x)-\ln x = 2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+\frac{9}{2}-\ln x$$

La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

a Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$g'(x) = \frac{(4{\cdot}x+1)(x-1)}{x}$$

b Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Justifier que le minimum de g est égal à $\dfrac{7}{2}$

c En déduire que sur $]0\,;+\infty[$, on a : $f(x)-\ln x>0$.
Que pouvez-vous dire des courbes représentatives de la fonction f et du logarithme népérien.

E.16 Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = (\ln x)^2{\cdot}(3-2{\cdot}\ln x)$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentée dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ *(unité graphique 2 cm)*

1 a Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b Calculer la limite de f en $+\infty$

2 f' désignant la dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$, on admet que :

$$f'(x) = \frac{6{\cdot}\ln x{\cdot}(1-\ln x)}{x}\,:$$

a Résoudre les inéquations :
- $\ln x \geqslant 0$
- $1-\ln x \geqslant 0$

b En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

c Calculer les extrémums de f sur l'intervalle $[0{,}75\,;3]$.

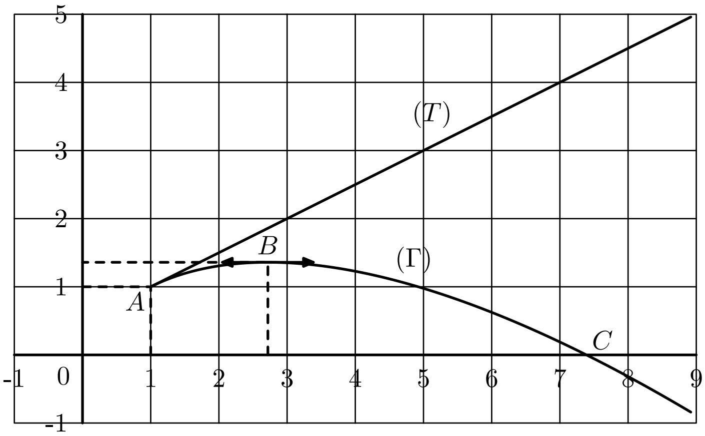
3 Dresser le tableau de variations de f.

4 Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

E.17 La courbe (Γ) ci-dessous représente dans un repère orthonormé une fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

La droite (T) est tangente à la courbe (Γ) au point $A(1\,;1)$.

La tangente à la courbe (Γ) au point B d'abscisse e est parallèle à l'axe des abscisses.



1 Par lecture graphique :

a Donner le coefficient directeur de la droite (T).

b Donner $f(1)$ et $f'(\mathrm{e})$.

c Déterminer les réels x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ qui vérifient $f'(x)\leqslant 0$

d En traçant le plus précisément possible la tangente à la courbe (Γ) au point C, lire le coefficient directeur de cette tangente.

2 On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{2}{\cdot}\big(2-\ln x\big)$.

a Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse e.

b Déterminer l'abscisse du point C, intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses.

3 La dérivée f' de la fonction f est définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $f'(x)=k{\cdot}\ln\dfrac{\mathrm{e}}{x}$
où k est un nombre réel donné.

a Vérifier le résultat donné pour $f'(\mathrm{e})$ à la question 1

b Déterminer le réel k sachant que : $f'(\mathrm{e}^2)=-\dfrac{1}{2}$.

c Donner l'équation de la tangente à la courbe (Γ) au point C.

d Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (T) et de la tangente à la courbe (Γ) au point C.

 CC BY-NC

6. *Exponentielle, logarithme et suite*

E.18 **Partie A**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$f(x) = 55{\cdot}\mathrm{e}^{0,5x}$

1. Donner les valeurs approchées arrondies à l'unité des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. a. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;10]$, l'équation :
   $f(x) = 3\,000$
   On donnera les arrondis à l'unité des solutions éventuelle.

Partie B

Une étude statistique permet de considérer la fonction f de la partie A comme un modèle satisfaisant pour décrire l'évolution, de 2000 à 2010, de la puissance totale des éoliennes installées en France. Plus précisément, on suppose que pour l'année $(2000{+}x)$ où x est un entier naturel, la puissance totale des éoliennes installées en France, exprimée en mégawatts, est donnée par $f(x)$.
En utilisant ce modèle et en exploitant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes en donnant les justifications nécessaires.

1. Quelle était la puissance totale des éoliennes en 2001?
2. En quelle année la puissance totale des éoliennes devrait-elle dépasser 3000 mégawatts?
3. Pourra-t-on atteindre une puissance totale de 10 000 mégawatts en 2010?
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = 55{\cdot}\mathrm{e}^{0,5n}$
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{0,5}$
   b. Dans le modèle étudié la puissance totale des éoliennes augmente donc chaque année d'un même pourcentage.
   Donner ce pourcentage en arrondissant le taux au dixième.

E.19 Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

Partie A

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t=0$

Soit N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après

Soit N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles, k un entier naturel.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Justifier que la suite (N_k) est une suite géométrique de raison 0,9876
2. Exprimer N_k en fonction de N_0 et de l'entier k
3. Quelle est la limite de la suite (N_k)? Justifier.

Partie B

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère reste constant.

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère ; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la partie **A**.

1. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % de carbone 14 initial.
   Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.
2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1% du carbone initial.
   En utilisant des propriétés de la fonction logarithme népérien, déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

7. *Exponentielle de base a*

E.20 On considère les fonctions cinq fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$:

$f : x \longmapsto 0{,}2^x \quad ; \quad g : x \longmapsto 0{,}95^x \quad ; \quad h : x \longmapsto 1^x$

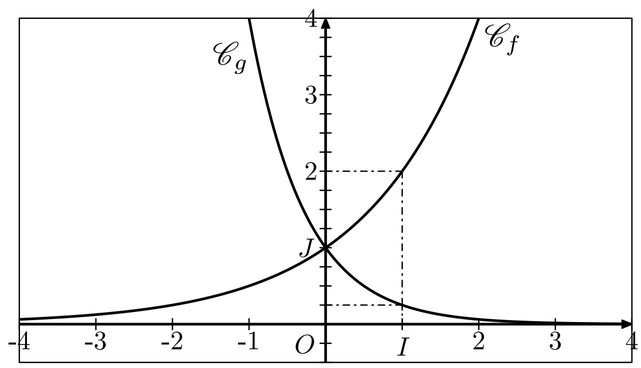
$j : x \longmapsto 1{,}5^x \quad ; \quad k : x \longmapsto 3^x$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le ou les sens de variation de chacune de ces fonctions.
2. Quelles similitudes peut-on trouver entre ces différentes fonctions?

E.21 On considère les deux fonctions f et g admettant chacune une expression de la forme :

$f : x \longmapsto q^x \quad ; \quad g : x \longmapsto q'^x \qquad$ où $q,\ q' \in \left]0\,;+\infty\right[$

Les fonctions f et g sont des fonctions exponentielles respectivement de base q et q'.



BY-NC

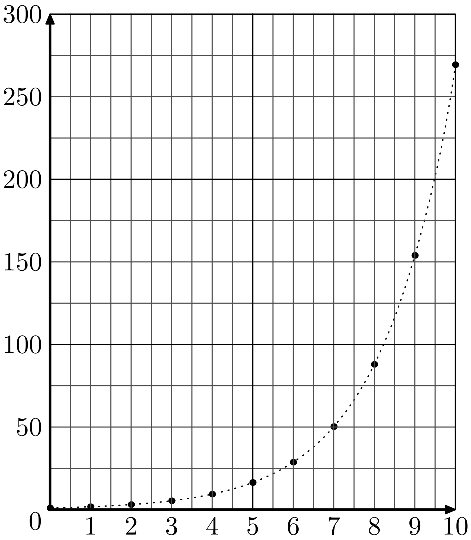
(1) Par observation du sens de variation de chacune des fonctions f et g. Que peut-on dire de la base q de chacune d'elles?

(2) Graphiquement et par l'image du nombre 1, déterminer l'expression des fonctions f et g.

8. *Introductions aux fonctions exponentilles*

E.22 On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 1 et de raison 1,75 définie pour tout entier naturel n positif ou nul.

Ci-dessous est donné, le tableau de valeurs des onze premiers termes de la suite arrondies au millième près et leur repRésentation graphique associée :



	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	3,063
5	3	5,359
6	4	9,379
7	5	16,413
8	6	28,723
9	7	50,265
10	8	87,964
11	9	153,937
12	10	269,389

(1) (a) Donner la valeur du produit $u_2 \times u_5$.
La valeur du résultat pouvait-il être prévu? Justifier.

(b) Sans calcul, donner la valeur du produit $u_6 \times u_3$.

(2) En pointillé, a été tracée la courbe reliant les points $(n\,;u_n)$. Notons $\mathscr{C}$ cette courbe et notons f la fonction ayant pour représentation la courbe $\mathscr{C}$.

(a) Donner la valeur des images : $f(1)$; $f(3)$
Vérifier que : $f(1{+}3) = f(1) \times f(3)$.

(b) Par lecture graphique, déterminer les images des nombres 4,5 et 6,5.
Vérifier l'égalité : $f(2) \times f(4{,}5) = f(6{,}5)$

E.23 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n positif ou nul par :

- $u_n = 2{,}6^n$
- $v_0 = 3$; $v_{n+1} = 1{,}8 \cdot v_n$

(1) Donner les éléments caractéristiques des suites (u_n) et (v_n).

(2) Compléter le tableau de valeurs, en arrondissant au millième près :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
v_n						

E.24

Rappels :

- a étant une constante réelle, la fonction $x \longmapsto \ln(a{\cdot}x)$ a pour fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- x et y étant deux réels strictement positif :
$\ln(x{\cdot}y) = \ln x + \ln y$; $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- x étant un réel strictement positif : $\exp(\ln x) = x$

Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal.
La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels.
On note : $p_0 = 20 \times 10^{-6}$.
Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geqslant p_0$, le niveau sonore perçu est de $f(p)$ décibels où :

$$f(p) = \frac{20}{\ln(20)} \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

C'est-à-dire : $f(p) = \dfrac{20}{\ln(10)} \cdot \ln(50000{\cdot}p)$

(1) Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals? de 0,2 Pascals? de 0,002 Pascals?

(2) On note $k = \dfrac{20}{\ln 20}$ et $I = \big[p_0\,;+\infty\big[$.

Donc, f est la fonction définie sur l'intervalle I par :
$f(x) = k \cdot \ln(50\,000{\cdot}x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

(a) Préciser la valeur de $f(p_0)$

(b) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

(c) Interpréter les résultats du (a) et du (b) en termes de pression s'exerçant sur le tympan et de niveau sonore perçu.

(3) À partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur.
Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.

(4) (a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I :
$f(10{\cdot}x) = k \cdot \ln(10) + f(x)$.
On en déduit que : $f(10{\cdot}x) = 20 + f(x)$ et on dit que : "le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10."

(b) Exprimer, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, $f(100{\cdot}x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété

 CC BY-NC

du niveau sonore correspondante.

E.25 Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = x + e^{-x}$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera une équation. `(Question hors programme 2012)`.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-n} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x)\leqslant x$.
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = x - \ln(1+x)$.
2. En déduire, que pour tout entier naturel n non nul :
$\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :
$f\big[\ln(n)\big] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
$\ln(n) \leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $\quad u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$

6. a. Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\quad \dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,dx$
b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal 2, on a :
$u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$
7. Pour tout entier supérieur ou égal à 2, on a montré que :
$\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$
Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

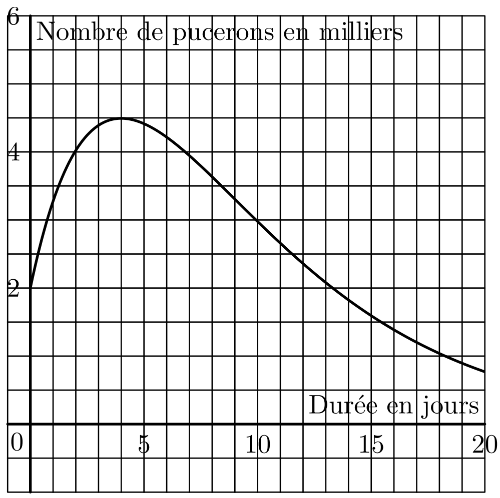
9. *Annales - Term L?*

E.26 Des pucerons envahissent une roseraie. Des coccinelles, prédateurs des pucerons, sont introduites dans cette roseraie. Au bout de vingt jours, on constate que le nombre des pucerons peut être estimé à 770, soit 0,77 milliers.
On s'intéresse à l'évolution du nombre des pucerons *(exprimé en milliers)* présents dans la roseraie en fonction de la durée écoulée depuis l'introduction des coccinelles. On note f cette fonction et t cette durée. L'unité de durée est un jour. Lorsque l'on introduit les coccinelles, on a donc $t=0$.

1. Des études ont montré que le nombre de pucerons *(exprimé en milliers)* en fonction de la durée t écoulée depuis l'introduction des coccinelles, était modélisé par la fonction f définie, pour tout nombre réel t élément de $[0\,;20]$ par :
$f(t) = (2{\cdot}t + 2){\cdot}e^{-kt}$
où k est un nombre réel positif constant.
a. Quel est le nombre de pucerons au moment où les coccinelles sont introduites dans cette roseraie?
b. Déterminer la valeur exacte de k puis l'une de ses valeurs approchées au millième près.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que la fonction f définie pour tout nombre réel t élément de $[0\,;20]$ par $f(t)=(2{\cdot}t+2)e^{-0,2t}$, représente correctement l'évolution du nombre des pucerons en fonction de la durée t. On note f' la fonction dérivée de f et $(\mathscr{C})_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;20]$:
$f'(t) = (-0{,}4{\cdot}t + 1{,}6)e^{-0,2{\cdot}t}$
b. Combien de jours après, l'introduction des prédateurs le nombre de pucerons va-t-il commencer à diminuer?
c. Calculer $f'(0)$. Utiliser ce nombre dérivé pour calculer, sans utiliser de calculatrice, une approximation du nombre des pucerons présents dans la roseraie au bout d'un jour.
3. Le graphique donné en annexe 2 est un dessin de $(\mathscr{C}_f)$. Ce graphique est à compléter et à rendre avec la copie.
a. À l'aide des informations données ou obtenues précédemment, placer les unités du repère.
b. On estime que les pucerons ne posent plus de problème dès que leur nombre est devenu inférieur à 1 000. Lire graphiquement au bout de combien de jours ce seuil sera atteint.
laisser apparents les traits de construction utilisés pour cette lecture.



 CC BY-NC

E.27

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1\,;25]$ par :

$$f(x)=5{\cdot}x-50 \quad ; \quad g(x)=\frac{\exp x}{100}-100$$

1. a. Donner le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;25]$.
   b. Répondre aux questions suivantes :
      i. Déterminer la dérivée $g'(x)$.
      ii. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;25]$.
   c. Tracer les courbes représentatives des fonction f et g dans un repère orthogonal.
   On prendra pour unité graphique :
      - 2 *cm* pour 5 unités en abscisse.
      - 1 *cm* pour 20 unités en ordonnée.

   Pour la courbe représentative de la fonction g, on se limitera à représenter les points dont l'abscisse est comprise entre 1 et 10.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par $h(x)=30{\cdot}\ln x-2{\cdot}x+10$. On note h' la dérivée de h.
   a. Montrer que : $h'(x)=\dfrac{30-2{\cdot}x}{x}$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $[1\,;25]$.
   c. Montrer que la fonction h passe par un maximum. On donnera la valeur par laquelle ce maximum est atteint et la valeur prise alors par la fonction.
   d. Tracer la courbe représentative de la fonction h dans le même repère qu'à la question 1.

Partie B

Les gains exprimés en milliers d'euros de trois chanteurs sont fonction du nombre x de semaines écoulées depuis la sortie simultanée de leurs albums et sont données par $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

1. *Dans cette question, aucune justification n'est demandée. Il s'agit seulement d'interpréter les données.*
   a. Quelle fonction correspond au gain du chanteur A sur lequel les producteurs ont investi près de 100 milliers d'euros et dont le succès est phénoménal après quelques semaines de promotion acharnée?
   b. Quelle fonction correspond au gain du chanteur B, inconnu, qui obtient un succès très rapide malgré l'absence d'investissement promotionnel avant de s'essouffler au bout de quinze semaines?
   c. En vous inspirant des questions du 1 et 2, décrire l'évolution du gain du chanteur C.
2. Par lecture graphique :
   a. Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur C gagne plus que le chanteur B.
   b. Déterminer le nombre de semaines qui s'écoule avant que le chanteur A gagne plus que le chanteur B.

E.28

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\mathrm{e}^x-2{\cdot}x$.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g.
2. En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $g(x)>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
   Pour la limite en $+\infty$ on pourra remarquer que pour x non nul $f(x)$ peut s'écrire :
   $$x^2\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-1\right)$$
2. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de f.
3. On admet que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$
   a. Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.
   b. Montrer que la solution de l'équation $f(x)=0$ est unique et qu'elle appartient à l'intervalle $[-1\,;0]$.
   c. En utilisant une calculatrice pour calculer $f(x)$ pour différentes valeurs de x, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.
   Justifier la valeur retenue.

E.29 On considère la fonction d définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=1000\cdot\mathrm{e}^{x\cdot\ln(0{,}94)}$$

1. Montrer que pour tout entier n : $(0{,}94)^n=\mathrm{e}^{n\cdot\ln(0{,}94)}$
2. Donner une valeur arrondie à l'entier le plus proche de : $f\left(\dfrac{1}{7}\right)$ et $f\left(\dfrac{365}{7}\right)$.
3. a. Pour tout nombre $x\in[0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$.
   b. Donner une valeur de $\ln(0{,}94)$ arrondie au dixième et en déduire le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $f(x)=500$, vérifie $x=\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}94)}$

10. *Exercices non-classés*

E.30 Donner, dans chaque cas, l'ensemble de définition ainsi que la fonction dérivée de chaque fonction proposée :

1. $f(x)=2\cdot\ln x+2{\cdot}x$
2. $f(x)=3\cdot\ln(5-3{\cdot}x)+2$
3. $f(x)=(x+1)\cdot\ln x$

CC BY-NC

E.31 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x+2-\frac{4\cdot e^x}{e^x+3}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ d'unité graphique $2\,cm$.

1. a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. On rappelle que l'unité graphique choisie est $2\,cm$.

CC BY-NC