Hors programme lycée / Fonction paire et impaire

1. Etude de la parité

E.1 Étudier la parité des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = (x-1)\cdot(x+1)$

b) $g(x) = 3x^3 - 2x$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

d) $j(x) = \cos\left(3\cdot x^3\right)$

E.2

1) Justifier que la fonction suivante est paire :
$f : \ x \longmapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$

2) Justifier que la fonction suivante est impaire :
$g : \ x \longmapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

2. Axe de symétrie des courbes

E.3

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par :
$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

a) Soit h un nombre réel. Déterminer les expressions simplifiées en fonction de h de :
$f(-1-h) \quad ; \quad f(-1+h)$

b) En déduire une propriété géométrique de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ définie par :
$$g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$$
Justifier que la courbe $\mathscr{C}_g$, représentative de la fonction g, admet le point de coordonnée $(1\,;1)$ pour centre de symétrie.

3. Centre de symétrie des courbes

E.4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{2x - 4}$$
Montrer que le point $I(2\,;0)$ est le centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$

E.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ dont l'image de x est donnée par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 20}{2x + 6}$$
Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet pour centre de symétrie le point $K(-3\,;2)$

E.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x + 2 - \frac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}$$
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

On note I le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\ln 3$. Montrer que le point I est le centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

E.7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 7}$$
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{4}{1+7\cdot\mathrm{e}^{-x}}$

2) Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7\,;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point I.

4. Axe et centre de symétries de courbes

E.8

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{6}{\frac{1}{2}x^2 + x + 2}$$
admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :
$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x+1}$$
admet le point $I(-1\,;2)$ comme centre de symétrie.

https://chingmath.fr (cc) BY-NC

5. Symétrie et asymptotes obliques

E.9 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 4}{4(x^2+1)}$$

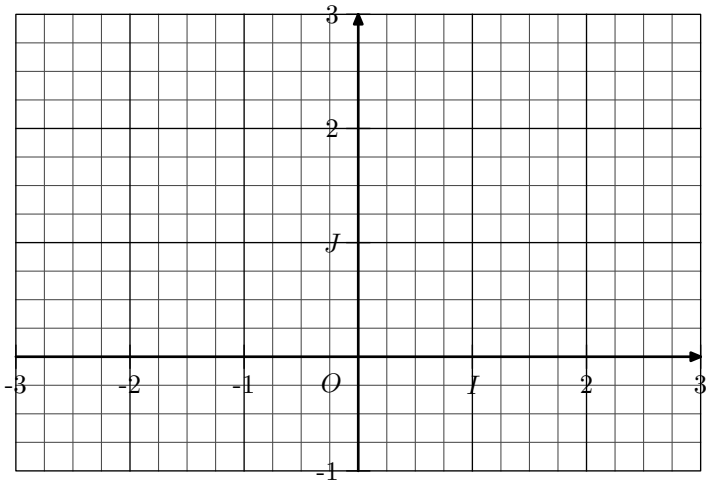
Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant la relation :
$$f(x) = a{\cdot}x + b + \frac{c{\cdot}x}{x^2+1}$$
   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera l'équation.
   c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).
2. Établir que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point de coordonnée $(0\,;1)$ comme centre de symétrie.
3. a. Établir que la dérivée f' de la fonction f admet pour dérivée :
$$f'(x) = \frac{(x^2+5)(3x^2-1)}{4(x^2+1)^2}$$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

On admettra les deux résultats suivants :

- $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}57$
- $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}43$

4. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.



6. Symetries et dérivées

E.10 Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la limite suivante :

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{2}$$

1. Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction f en 2.
2. Supposons que la fonction f est paire :
   a. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -2.
   b. À main levée, représenter une courbe $\mathscr{C}_f$ et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.
3. Supposons que la fonction f est impaire :
   a. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -2.
   b. À main levée, représenter une courbe $\mathscr{C}_f$ et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.

7. Symétries et intégrales

E.11 On considère la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}{\cdot}\left(|x| - 1\right)^2$$

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Montrer que cette fonction est la densité d'une loi de probabilité sur $[-1\,;1]$.

8. Symétries de courbes

E.12 Pour chacune des fonctions suivantes, donner leurs ensembles de définition puis étudier leurs parités :

a. $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$
b. $g : x \longmapsto \dfrac{|x|}{x(x^2-1)}$
c. $h : x \longmapsto 3x^2 - x + 1$
d. $j : x \longmapsto \dfrac{3}{x} \times |x|$

E.13 Donner l'ensemble de définition et la parité des fonctions suivantes :

a. $f\colon x \longmapsto x(x+2)^2$
b. $g\colon x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$
c. $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{(x-4)(x+4)}$
d. $j\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2}x \cdot |x|$

CC BY-NC

E.14 On se place dans un repère orthogonal $(O;I;J)$

1. a. Soit M un point du plan de coordonnée $(x\,;y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie orthogonal d'axe (OJ).

   b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :

   $f(x) = f(-x)$

   Montrer que la fonction f est paire.

2. a. Soit M un point du plan de coordonnée $(x\,;y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie centrale de centre O.

   b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :

   $f(x) = -f(-x)$

   Montrer que la fonction f est impaire.

9. *Symétrie de courbes*

E.15 On considère la fonction f définie par :

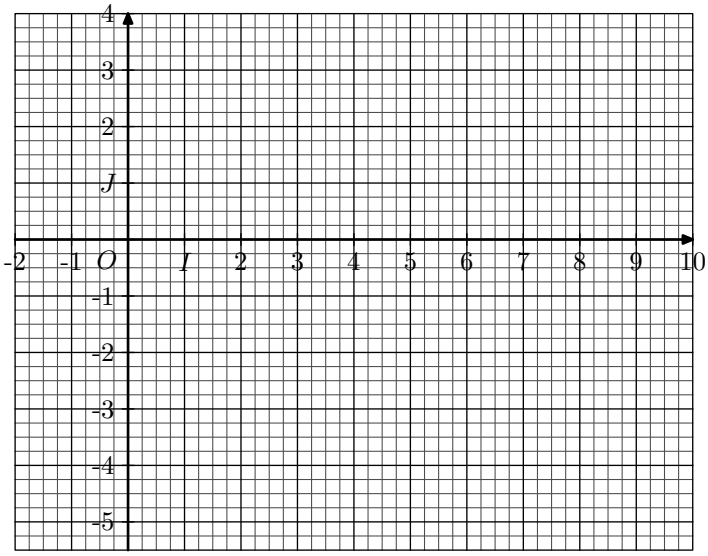
$$f : x \longmapsto \frac{1}{4}\cdot x^2 - 2\cdot x - 1$$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

x	-2	$-0{,}5$	1	2	3	$3{,}5$	4
$f(x)$							

x	$4{,}5$	5	6	7	$8{,}5$	10
$f(x)$						

2. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



3. Cette courbe possède un axe de symétrie, tracer cet axe sur votre représentation.

E.16 Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par un polynôme du second degré.

Pour seule connaissance de la fonction f, on a le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	-3	-2	0	2	4
$f(x)$	36	0	-9	-9	15	63

1. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Donner les deux antécédents du nombre 0 par la fonction f.
3. Donner l'expression de la fonction f.

E.17 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   b. Préciser les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.

2. Soit h un nombre quelconque positif :

   a. Déterminer la forme développée et réduite des deux expressions suivantes :

   $f(1-h)$; $f(1+h)$

   b. Que peut-on dire sur les deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $(1-h)$ et $(1+h)$.

 CC BY-NC