

Hors programme lycée / Fonction paire et impaire

1. Etude de la parité

E.1   Étudier la parité des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = (x-1) \cdot (x+1)$ b) $g(x) = 3x^3 - 2x$

c) $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ d) $j(x) = \cos(3 \cdot x^3)$

E.2  

1 Justifier que la fonction suivante est paire :
 $f : x \mapsto e^x + e^{-x}$

2 Justifier que la fonction suivante est impaire :
 $g : x \mapsto e^x - e^{-x}$

2. Axe de symétrie des courbes

E.3  

1 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

a) Soit h un nombre réel. Déterminer les expressions simplifiées en fonction de h de :

$$f(-1-h) \quad ; \quad f(-1+h)$$



b) En déduire une propriété géométrique de la courbe \mathcal{C}_f .

2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par :

$$g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$



Justifier que la courbe \mathcal{C}_g , représentative de la fonction g , admet le point de coordonnées $(1; 1)$ pour centre de symétrie.

3. Centre de symétrie des courbes

E.4   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par la relation :




$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{2x - 4}$$

Montrer que le point $I(2; 0)$ est le centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f

E.5   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ dont l'image de x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 20}{2x + 6}$$




Montrer que la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet pour centre de symétrie le point $K(-3; 2)$

E.6    Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note I le point de \mathcal{C} d'abscisse $\ln 3$. Montrer que le point I est le centre de symétrie de la courbe \mathcal{C} .

E.7    On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 7}$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Vérifier que pour tout réel x , on a : $f(x) = \frac{4}{1 + 7 \cdot e^{-x}}$

2 Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C} .

3 Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point I .

4. Axe et centre de symétries de courbes

E.8  

1 Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{6}{\frac{1}{2}x^2 + x + 2}$$

admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de

symétrie.

2 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 1}$$

admet le point $I(-1; 2)$ comme centre de symétrie.

5. Symétrie et asymptotes obliques

E.9   On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 4}{4(x^2 + 1)}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

1 a) Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant la relation :

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{c \cdot x}{x^2 + 1}$$

b) Montrer que la courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera l'équation.

c) Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite (Δ) .

2 Établir que la courbe \mathcal{C}_f admet le point de coordonnées $(0; 1)$ comme centre de symétrie.

3 a) Établir que la dérivée f' de la fonction f admet pour dérivée :

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5)(3x^2 - 1)}{4(x^2 + 1)^2}$$

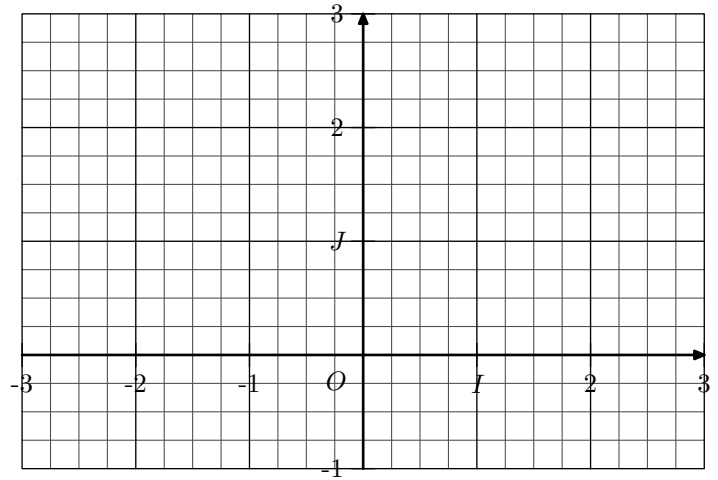
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

On admettra les deux résultats suivants :



$$\bullet f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,57$$

$$\bullet f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1,43$$

4 Effectuer le tracé de la courbe \mathcal{C}_f .



6. Symétries et dérivées

E.10   Soit f une fonction f définie sur \mathbb{R} vérifiant la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{2}$$

1 Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction f en 2.

2 Supposons que la fonction f est paire :

a) Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -2 .



b) À main levée, représenter une courbe \mathcal{C}_f et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.

3 Supposons que la fonction f est impaire :

a) Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -2 .

b) À main levée, représenter une courbe \mathcal{C}_f et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.

7. Symétries et intégrales



E.11   On considère la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot (|x| - 1)^2$$

1 Étudier la parité de la fonction f .



2 Montrer que cette fonction est la densité d'une loi de probabilité sur $[-1; 1]$.

8. Symétries de courbes

E.12   Pour chacune des fonctions suivantes, donner leurs ensembles de définition puis étudier leurs parités :



a) $f: x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ b) $g: x \mapsto \frac{|x|}{x(x^2 - 1)}$

c) $h: x \mapsto 3x^2 - x + 1$ d) $j: x \mapsto \frac{3}{x} \times |x|$

E.13   Donner l'ensemble de définition et la parité des fonctions suivantes :

a) $f: x \mapsto x(x + 2)^2$ b) $g: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$

c) $h: x \mapsto \frac{1}{(x - 4)(x + 4)}$ d) $j: x \mapsto \frac{1}{2}x \cdot |x|$

E.14   On se place dans un repère orthogonal $(O; I; J)$

- 1 a) Soit M un point du plan de coordonnée $(x; y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie orthogonal d'axe (OJ) .
- b) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , vérifiant pour tout nombre réel x :

$$f(x) = f(-x)$$

9. Symétrie de courbes

E.15    On considère la fonction f définie par :

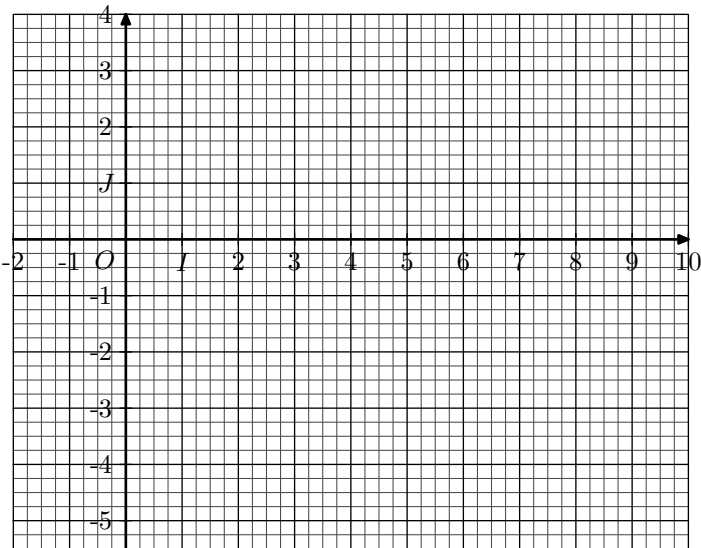
$$f : x \mapsto \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1$$

- 1 À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

x	-2	-0,5	1	2	3	3,5	4
$f(x)$							

x	4,5	5	6	7	8,5	10
$f(x)$						

- 2 Effectuer le tracé de la courbe \mathcal{C}_f dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :






Montrer que la fonction f est paire.

- 2 a) Soit M un point du plan de coordonnée $(x; y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie centrale de centre O .
- b) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , vérifiant pour tout nombre réel x :

$$f(x) = -f(-x)$$
 Montrer que la fonction f est impaire.




- 3 Cette courbe possède un axe de symétrie, tracer cet axe sur votre représentation.

E.16    Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f définie par un polynôme du second degré.

Pour seule connaissance de la fonction f , on a le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	-3	-2	0	2	4
$f(x)$	36	0	-9	-9	15	63

- 1 Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f .
- 2 Donner les deux antécédents du nombre 0 par la fonction f .
- 3 Donner l'expression de la fonction f .

E.17    On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$$

- 1 a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- b) Préciser les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f .
- 2 Soit h un nombre quelconque positif :
 - a) Déterminer la forme développée et réduite des deux expressions suivantes :

$$f(1-h) \quad ; \quad f(1+h)$$
 - b) Que peut-on dire sur les deux points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives $(1-h)$ et $(1+h)$.