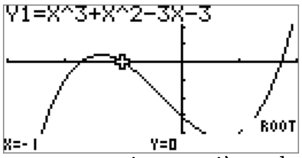
Hors programme lycée / Fonction du second degré : étude avec la forme canonique

1. *Calculatrice et second degré*

E.1

1. On considère le polynôme $x^3 + x^2 - 3x - 3$ dont la représentation est donnée ci-contre :



   a. L'affichage de la calculatrice une racine entière de ce polynôme. En déduire une factorisation de ce polynôme de la forme :
   $$x^3 + x^2 - 3x - 3 = \big(x - \alpha\big)\big(\beta{\cdot}x^2 + \gamma{\cdot}x + \delta\big)$$

   b. Réaliser la factorisation de ce polynôme en produit de facteurs du premier degré.

2. En suivant le raisonnement de la question précédente, réaliser la factorisation des polynômes suivants en produit de facteurs du premier degré :

   a. $2x^3 - 2x^2 - x + 1$ b. $x^3 + 2x^2 - 2x - 4$

   c. $2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ f. $-x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

   g. $-2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ h. $x^3 + 3x^2 - 2$

2. *Second degré : variation*

E.2

Rappels :

Un polynôme du second degré admet pour forme développée réduite $a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$ où $a \neq 0$.

La fonction $x \longmapsto a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$ a son tableau de variations dépendant du signe du *coefficient du terme du second degré* :

•$a>0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	↘		↗

•$a<0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	↗		↘

Sa courbe représentative s'appelle une **parabole** et son sommet a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

Dresser le tableau de variations de chacun des polynômes suivants :

a. $4x^2 + 4x + 5$ b. $-2x^2 - 2x + 3$

c. $2x^2 + 4x + 2$ d. $-4x^2 + 4x + 3$

e. $2x^2 + 3x + 1$ f. $-4x^2 - 4x - 1$

E.3

1. Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

   a. $f(x) = x^2 + x - 2$ b. $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$

   c. $h(x) = -4x^2 + x + 2$ d. $j(x) = 2x^2 + 2x + 2$

2. Pour chaque fonction de la question précédente, donner, sans préciser leurs valeurs, le nombre d'antécédents de 0.

E.4 Pour chacune des fonctions, déterminer les caractéristiques de leur extrémum et dresser le tableau de variations :

a. $f : x \longmapsto 2x^2 + 8x + 1$ b. $g : x \longmapsto -x^2 + 2x + 1$

c. $h : x \longmapsto x^2 + 4x + 4$ d. $j : x \longmapsto -3x^2 + 9x - 2$

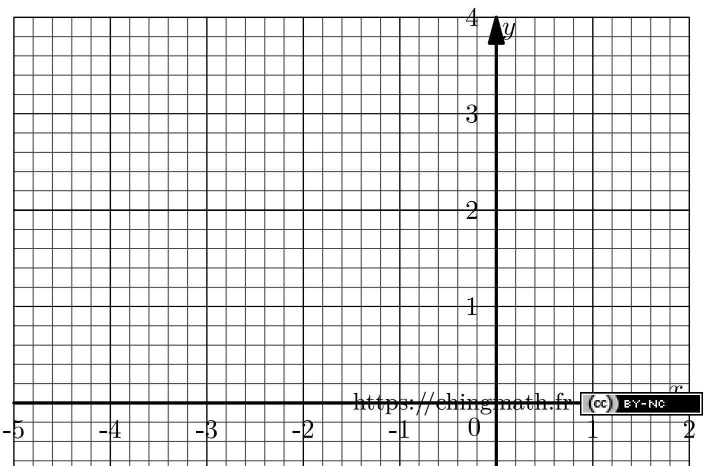
e. $k : x \longmapsto 3x^2 + 2x + 2$ f. $\ell : x \longmapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$

3. *Représentation graphique*

E.5 On considère la fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 0{,}4x^2 + 0{,}8x - 1{,}2$$

On considère le plan muni du repère représenté ci-dessous :



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessus.

1. a. À l'aide la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs ci-dessous en y inscrivant les valeurs des images arrondies au dixième près :

x	$-4{,}5$	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$0{,}5$	1	2
$f(x)$									

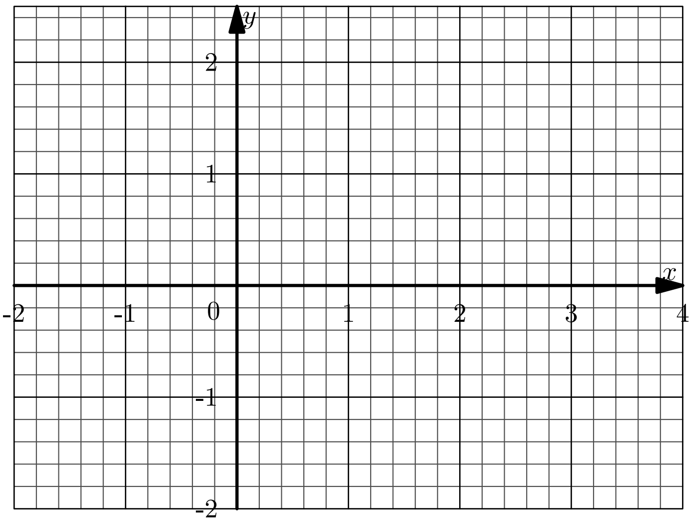
   b. Tracer la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. À l'aide d'une lecture graphique :
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. Donner la nature de l'extremum de la fonction f et ses caractéristiques.

E.6 On considère la fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$

On considère le plan muni du repère représenté ci-dessous :



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessus.

1. a. À l'aide la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs ci-dessous en y inscrivant les valeurs des images arrondies au dixième près :

x	-2	$-1{,}5$	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	3
$f(x)$									

   b. Tracer la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. À l'aide d'une lecture graphique :
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. Donner la nature de l'extremum de la fonction f et ses caractéristiques.

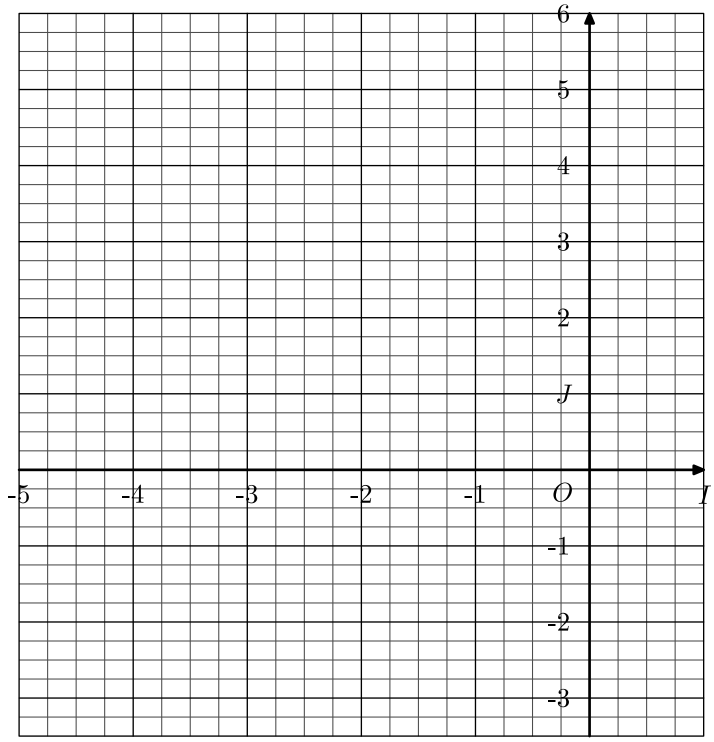
E.7 On considère la fonction : $f : x \longmapsto x^2 + 4x + 1$:

1. Établir l'égalité : $f(x) = (x+2)^2 - 3$
2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$
   b. Dresser, sans justification, son tableau de variation.
   c. Donner les caractéristiques de l'extremum de la fonction f.
3. a. Compléter le tableau ci-dessous de valeurs de la fonction f :

x	-5	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2
$f(x)$						

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1
$f(x)$					

   b. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère ci-dessous :



4. *Extréma*

E.8 On considère la fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

1. Établir l'identité : $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$
2. Justifier que la fonction f admet pour minimum la valeur -3 atteint pour $x = 2$.

E.9 On considère la fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -3x^2 - 12x - 13$

1. Établir l'identité : $f(x) = -3(x+2)^2 - 1$
2. Justifier que la fonction f admet pour maximum la valeur -1 atteint pour $x = -2$.

E.10 Pour chacune des fonctions du second degré ci-dessous, donner la nature de son extremum et ses caractéristiques :

1. $f(x) = x^2 + 4x + 1$
2. $g(x) = -3x^2 + 6x - 3$
3. $h(x) = x^2 + 5x - 4$
4. $j(x) = -5x^2 + 4x + 1$

5. *Sens de variations*

E.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = -9x^2 - 12x + 1$$

1. Établir l'égalité : $f(x) = -9\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+5$.
2. Démontrer que, sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right]$, la fonction f est croissante.

E.12 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation :

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$$

1. Établir l'égalité : $f(x)=2(x+1)^2-3$
2. Montrer que :
   a. f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-1\right]$.
   b. f est strictement croissante sur $\left[-1;+\infty\right[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. En déduire que -3 est le minimum de la fonction f.

6. *Etudes algébriques*

E.13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto -2x^2 + 2x + 12$$

1. Établir les égalités suivantes :
   $-2x^2 + 2x + 12 = (3-x)(2x+4) = -2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{2}$
2. a. Justifier que la fonction f s'annule pour deux nombres qu'on précisera.
   b. Justifier que la fonction f admet $\dfrac{25}{2}$ pour maximum.
3. a. Établir que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$.
   b. Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

7. *Tableau de variations et image d'intervalles*

E.14

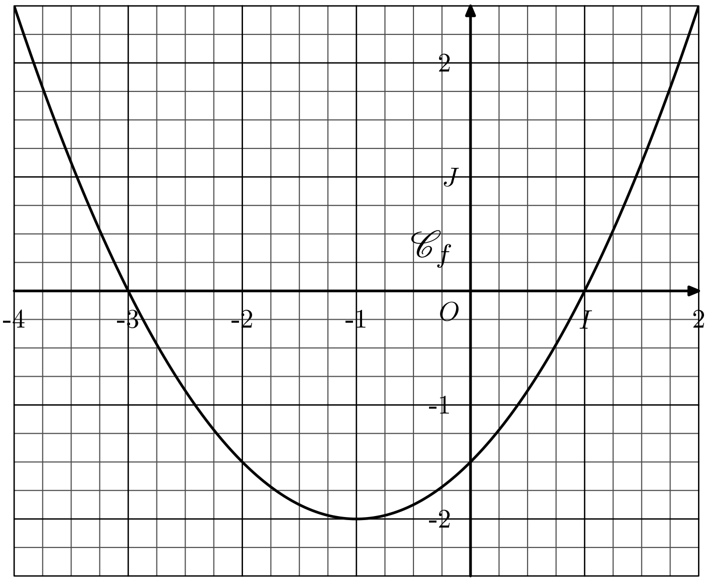
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = 2x^2 - x + 1$
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. En déduire les images des intervalles suivants par la fonction f :
   $A=\left]-3\,;\dfrac{1}{4}\right]$; $B=\left[1\,;2\right]$; $C=\left[-3\,;1\right]$
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = -x^2 + 2x - 4$
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   b. En déduire les images des intervalles suivants par la fonction g :
   $D=\left[-3\,;0\right]$; $E=\left[1\,;3\right]$; $G=\left[0\,;3\right]$

8. *Etude graphique et algébrique*

E.15 On considère la fonction f, qui à tout nombre x, associe son image $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

Le graphique ci-dessous donne la représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé :



Partie A : étude graphique

Graphiquement, répondre aux questions suivantes :

1. Donner les antécédents du nombre 0 par f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;2]$.
3. Donner les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.

Partie B : étude algébrique

1. a. Établir l'égalité suivante : $f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+3)(x-1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x)=0$.
2. a. Établir l'égalité suivante : $f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2-2$
   b. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

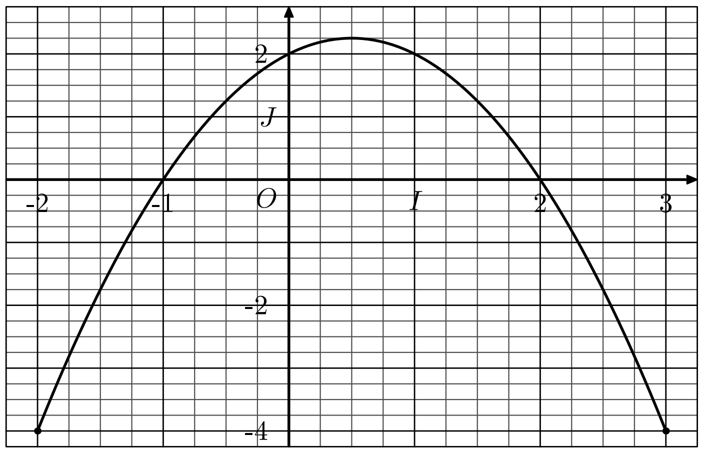
E.16 On considère la fonction f définie par l'expression :

$f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ où a, b, c sont des nombres réels.

La parabole $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet pour sommet le point de coordonnées $(-1\,;2)$ et elle passe par le point de coordonnées $(-3\,;0)$.

Déterminer, sans justification, les valeurs des nombres réels a, b et c.

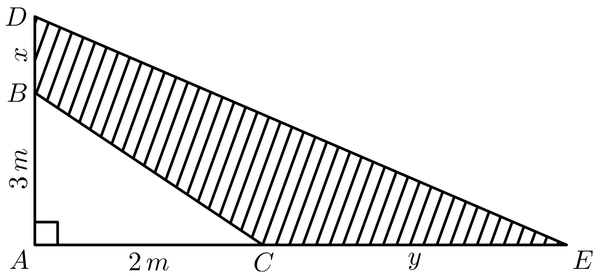
E.17 La courbe ci-contre est la représentation d'une fonction f définie sur $[-2\,;3]$.



1. Graphiquement, répondre aux questions suivantes :
   a. Quelles sont les images de 0 et 2 par f ?
   b. Donner, si possible :
      - les antécédents éventuels de -4 par f ;
      - les antécédents éventuels de 4 par f ;
   c. Quelles sont les solutions de l'équation : $f(x)=-\frac{7}{4}$?
   d. Quelles sont les solutions de l'inéquation : $f(x)<0$?
2. On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour expression :
   $f(x) = -x^2 + x + 2$.
   a. Justifier que : $f(x)=(-x+2)(x+1)$
   b. Résoudre l'équation : $f(x)=0$
   c. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.
   d. Justifier que : $f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.
   En déduire la croissance de f sur l'intervalle $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$.

9. *Problèmes*

E.18 On considère la figure ci-dessous :



Elle vérifie les conditions suivantes :

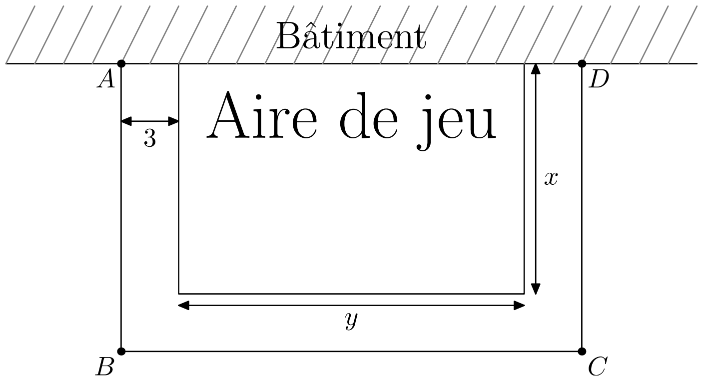
- Le triangle ABC est rectangle en A tel que : $AB = 3\,m$; $AC = 2\,cm$
- Le point D est défini par : $D\in[AB)$; $D\notin[AB]$
- Le point E est défini par : $E\in[AC)$; $E\notin[AC]$
- On a la relation : $BD+CE=10\,m$.

On note x et y les longueurs respectives des segments $[BD]$ et $[CE]$.

1. a. Établir l'identité :
   $$2x^2 - 18x + 153 = 2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{225}{2}$$
   b. Déterminer les valeurs de x et de y afin que la longueur du segment $[DE]$ soit minimale.
2. Déterminer les valeurs possibles de x et de y afin que l'aire de la partie hachurée mesure $15\,m^2$

10. Modélisation

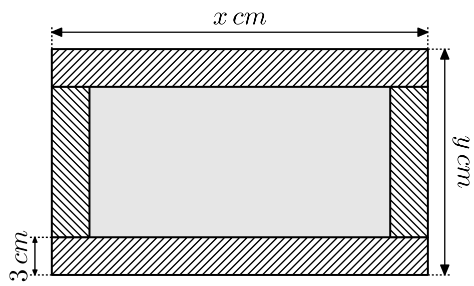
E.19 On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture :
$\mathscr{L} = AB + BC + CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu *(la valeur de x et de y sont nécessairement positifs)*.

1. Exprimer la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture en fonction des valeurs de x et de y.
2. On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :
   a. Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.
   b. Justifier que la valeur de x doit être inférieure à 44.
   c. Justifier que l'aire de jeux a pour aire :
      $\mathscr{A}(x) = 88x - 2x^2$
3. a. Justifier l'égalité ci-dessous :
      $\mathscr{A}(x) = 968 - 2(x - 22)^2$
   b. En déduire la croissance de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $\left]0\,;22\right]$.
   c. Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\left]0\,;44\right[$.
4. En déduire les dimensions afin que les 100 mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

E.20 Un menuisier dispose d'une baguette de bois de 100 centimètres de longueur et de 3 centimètres de largeur. Il souhaite utiliser toute la longueur de cette baguette pour la confection d'un cadre en bois à l'image du dessin ci-dessous :



1. a. Déterminer la valeur de y en fonction de x.
   b. En déduire les valeurs possibles de x.
2. Donner l'expression de l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'intérieur du cadre en fonction de x.
3. a. Établir l'égalité suivante :
      $\mathcal{A}(x) = -(x-28)^2 + 484$
   b. Établir la croissance de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\left]6\,;28\right]$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$, puis en donner l'aire maximale atteinte par le cadre.

E.21 Dans une fête foraine, le gérant de l'attraction "*la chenille en folie*" fait le constat suivant :

- Son manège peut accueillir 70 personnes par tour ;
- S'il fixe le prix à 1 €, son manège est plein à chaque tour ;
- Chaque fois qu'il augmente le prix de 0,50 €, il perd 5 clients.

On note x le prix d'une place : le nombre x appartient à l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

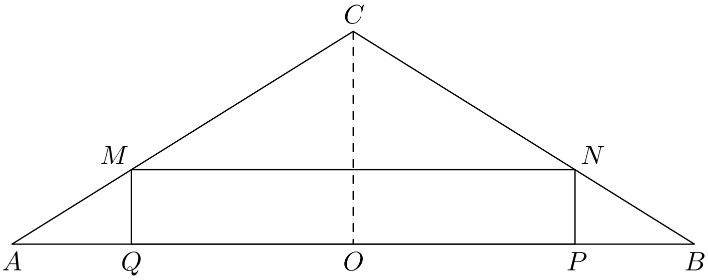
On s'intéresse à la valeur de la recette faîte par cette attraction à chaque tour en fonction du prix x des places ; on note $\mathcal{R}(x)$ la valeur de cette recette.

1. Justifier que le la recette admet l'expression :
   $\mathcal{R}(x) = 80x - 10x^2$
2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{R}$.
   b. En déduire la recette maximale que peut réaliser cette attraction. Quel doit-être le prix d'un tour pour réaliser ce maximum?
3. Le gérant souhaite réaliser une recette supérieure à 150 € à chaque tour de manège. Déterminons les prix possibles d'une place réalisant cette condition :
   a. Développer l'expression : $(x-4)^2-1$.
      En déduire l'expression de la forme canonique de l'expression $\mathcal{R}(x)-150$.
   b. Factoriser l'expression : $(x-4)^2-1^2$.
      Puis, factoriser l'expression $\mathcal{R}(x)-150$.
   c. Déterminer les solutions de l'équation : $\mathcal{R}(x)=150$.
   d. En utilisant la question précédente et le tableau de variations de la fonction $\mathcal{R}$, donner sans justification l'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathcal{R}(x)\geqslant 150$.

E.22 On considère le triangle isocèle ABC de dimensions :

$OA = 8\,cm \quad ; \quad OC = 5\,cm$

$[CO]$ représente la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.



On souhaite inscrire un rectangle $MNPQ$ à l'intérieur du triangle et centré autour de l'axe (OC) comme représenté ci-dessus.

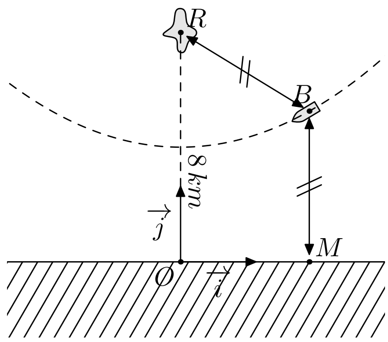
On note x la longueur du segment $[OP]$.

1. Justifier brièvement les valeurs possibles prises par la variable x.
2. Déterminer la mesure du segment $[NP]$ en fonction de la longueur x.
3. Démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle $MNPQ$ a pour expression en fonction de x :
   $\mathcal{A}(x) = -\dfrac{5}{4}\cdot x^2 + 10\cdot x$
4. Pour quelle valeur l'aire du rectangle $MNPQ$ est maximale?

E.23 Un bateau doit naviguer entre le rivage et un rocher. Ce rocher se situe à $8\,km$ du bord.

Par mesure de sécurité, le capitaine souhaite rester à égale distance du rocher et du rivage.

Pour modéliser ce problème, on utilisera le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ dont le point O est le projeté orthogonal du point R sur le rivage.



On note $(x\,;y)$ les coordonnées du bateau dans ce repère.

1. Exprimer en fonction de x et de y de la distance séparant le bateau :
   a. du rocher b. du rivage
2. a. En utilisant l'égalité $BR = BM$, exprimer la valeur de y en fonction de x.
   b. Quel est le nom de la trajectoire du bateau?

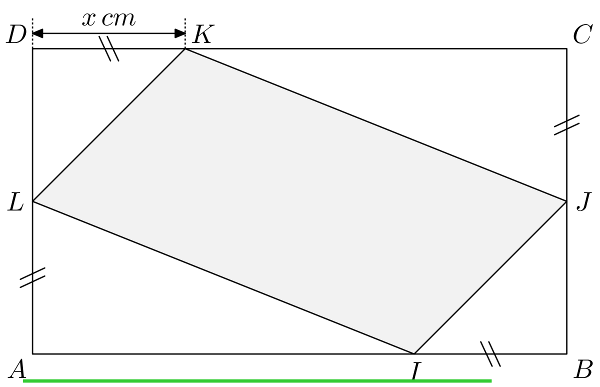
11. *Problèmes et tableau de signes*

E.24 Dans le plan, on considère un rectangle $ABCD$ tel que :

$DC = 7\,cm \quad ; \quad DA = 5\,cm$

Les points I, J, K, L sont des points appartenant respectivement aux côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ vérifiant les relations :

$DK = CJ = BI = LA = x\,cm$

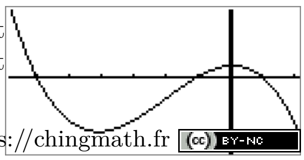


1. Justifier, brièvement, que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.
2. a. Déterminer les valeurs possibles pour x.
   b. Justifier que l'aire du parallélogramme $IJKL$ a pour expression en fonction de x :
   $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 12x + 35$
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
   d. Donner le minimum de la valeur de l'aire de $IJKL$ et la valeur de x pour lequel il est atteint.
3. On souhaite déterminer les valeurs de x pour lesquels, $\mathcal{A}$ est supérieure à $25\,cm^2$.
   a. Déterminer les valeurs de a et b de nombres réels vérifiant l'égalité :
   $2x^2 - 12x + 10 = (a\cdot x + b)(x - 5)$.
   b. En déduire les solutions de l'inéquation :
   $\mathcal{A}(x) \geqslant 25\,cm^2$.

12. *Calculatrice et polynome*

E.25

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x réel est définie par la relation :
$f(x) = -2x^3 - 12x^2 + 2x + 12$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme factorisée de ce polynôme. Laquelle?

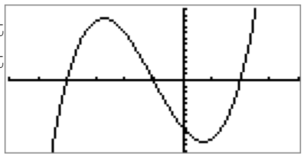
a) $2(x-1)(x+1)(x-6)$ b) $2(x-1)(x+1)(x+6)$

c) $2(1-x)(x+1)(x+6)$ d) $2(1-x)(x+1)(x-6)$

Vérifier votre réponse.

E.26

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x réel est définie par la relation :
$f(x) = x^3+3x^2-6x-8$



La représentation de cette fonction est donnée dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

Parmi les expressions suivantes, une seule représente la forme factorisée de ce polynôme. Laquelle?

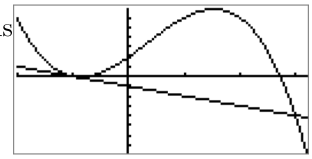
a) $(x+2)(x-1)(x-4)$ b) $(x-2)(x+1)(x+4)$

c) $(x-1)(x-2)(x+4)$ d) $(x+4)(x-1)(x+2)$

Vérifier votre réponse.

E.27

1) On considère les deux fonctions f et g définies par :
$f(x) = -x^3+x^2+4x+2$
$g(x) = -x-1$



Les représentations de ces deux fonctions sont données dans la capture d'écran ci-contre d'une calculatrice.

a) Utiliser votre calculatrice pour décrire l'ensemble des solutions de l'équation :
$f(x) = g(x)$

b) Pour chacune des deux égalités ci-dessous, déterminer les valeurs des réels α, β et γ réalisant ces égalités :
- $-x^3+x^2+5x+3 = (x+1)\big(\alpha{\cdot}x^2+\beta{\cdot}x+\gamma\big)$
- $-x^3+x^2+5x+3 = (x-3)\big(\alpha{\cdot}x^2+\beta{\cdot}x+\gamma\big)$

c) À l'aide de la question précédente, affirmer la conjecture de la question a).

2) On considère les deux fonctions f et g définies par :
$f(x) = 2x^3-5x+6 \quad ; \quad g(x) = x+2$

Suivre la démarche de la question précédente pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
$f(x) = g(x)$

E.28

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la forme factorisée des polynômes suivants :

a) x^3+3x^2-6x-8 b) x^3-3x^2-x+3

c) $-x^3-x^2+4x+4$ d) $3x^2-6x^2-3x+6$

e) $4x^3+8x^2-4x-8$ f) $-2x^3+4x^2+6x$

2) Vérifier algébriquement vos conjectures de la question précédente.

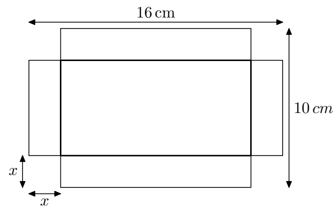
E.29 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^3-4x^2+x+6<0$ b) $2x^3+4x^2-6x \geqslant 0$

c) $-2x^3-4x^2+2x+4>0$ d) $2x^3+2x^2-2x-2 \leqslant 0$

E.30

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.

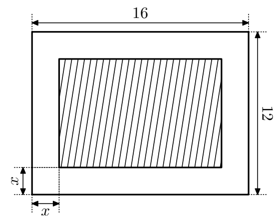


Déduire la ou les valeurs de x pour lesquelles cette boîte possède une aire de $144\,cm^2$.

E.31

Sur un ancien terrain vague de forme rectangulaire de longueur $16\,m$ et $12\,m$, la municipalité souhaite construire un jardin d'enfants avec une allée faisant le tour l'aire de jeu :

L'aire de jeu est représentée ci-dessous par la partie hachurée :



Quelle*(s)* dimension*(s)* peut avoir la largeur de l'allée afin que l'aire de jeu soit la même que celle de l'allée?