Hors programme lycée / Fonctions homographiques

1. Fonctions homographiques

E.1 On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$$

1. a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer l'image de 3 par la fonction f.

   c. Déterminer les antécédents, pour la fonction f, des nombres -1 et 0.

   d. Justifier que 1 n'admet pas d'antécédent par la fonction f.

2. Établir pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$, l'égalité suivante :

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

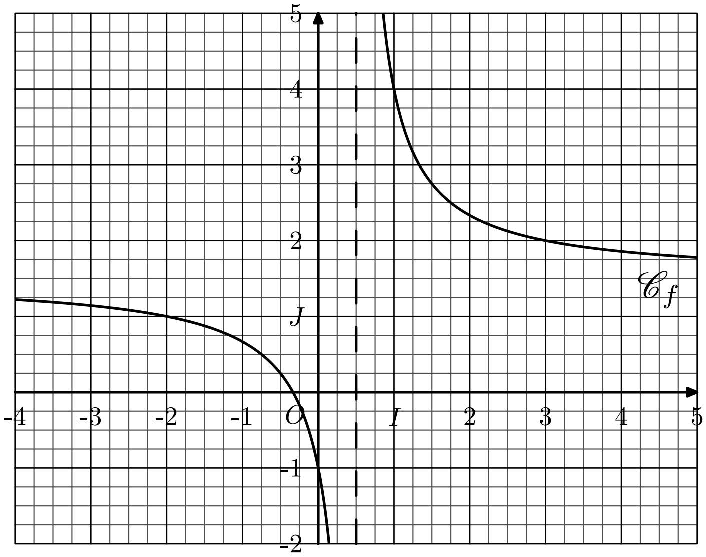
E.2 On considère la fonction : $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{2x-1}$

1. a. Établir l'égalité suivante :

$$\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{5}{4x-2} + \frac{3}{2}$$

   b. Établir la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

2. On représente, dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f :



   a. Graphiquement, déterminer une valeur approchée de l'antécédent du nombre 3 par la fonction f.

   b. Algébriquement, rechercher l'antécédent du nombre 3 par la fonction f.

   c. Graphiquement, déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 3$

E.3 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{2-6x}{1-2x}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant :

$$\frac{2-6x}{1-2x} = \frac{a}{1-2x} + b$$

3. En déduire que la fonction f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

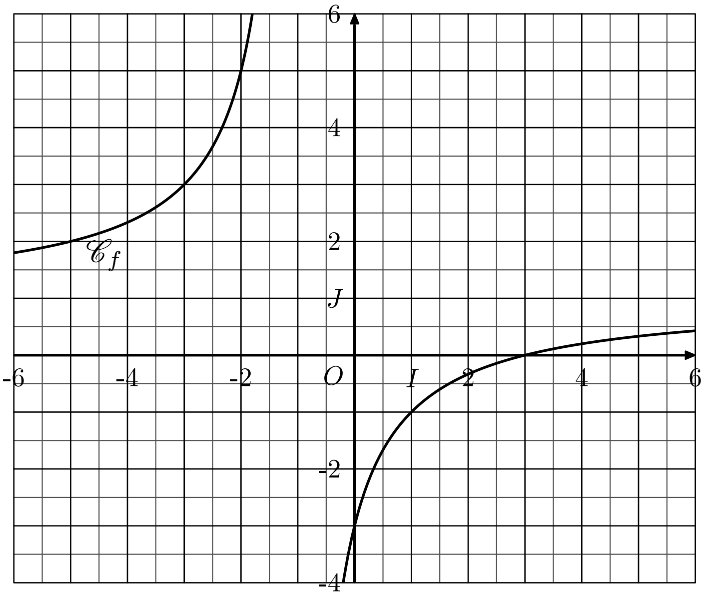
2. Fonctions homographiques et fonctions affines

E.4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

 CC BY-NC

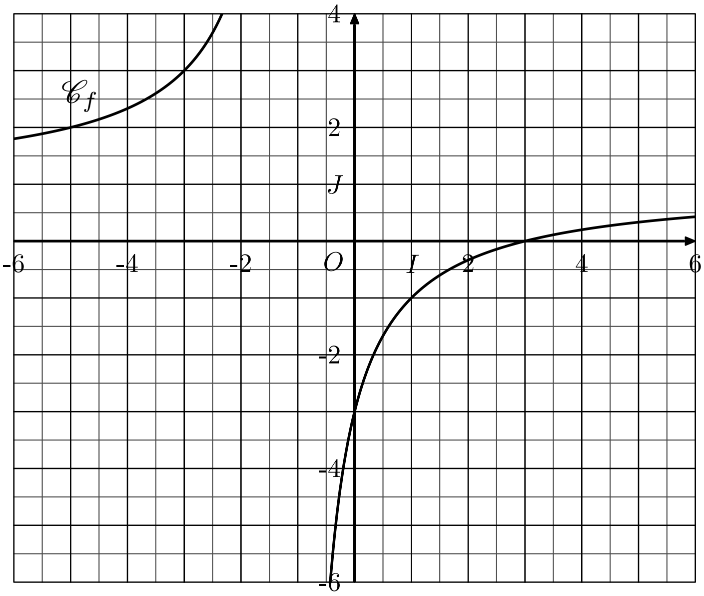


1. a. Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse respective -2 et 3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   c. Tracer, dans le repère, la droite (AB).
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
   (Δ): $y = -2x - 3$
   a. Déterminer algébriquement les solutions de l'équation :
   $f(x) \geqslant -2x - 3$
   b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ).
   c. Tracer la droite (Δ) dans le repère.

E.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

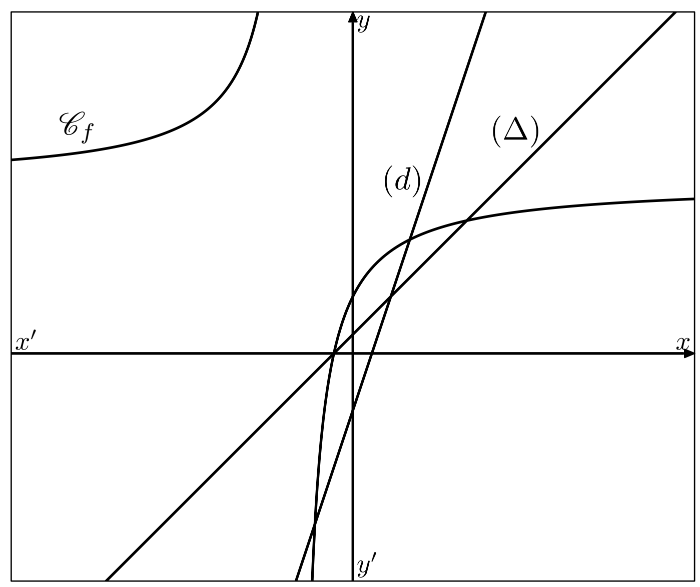


1. a. Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse respective 1 et 3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   c. Tracer, dans le repère, la droite (AB).
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
   (Δ): $y = 3x - 4$
   a. Établir la factorisation suivante :
   $-3x^2 + 2x + 1 = (1-x)(3x+1)$
   b. Résoudre algébriquement l'inéquation :
   $f(x) \leqslant 3x - 4$
   c. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ).
   d. Tracer la droite (Δ) dans le repère.

E.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement pour abscisses $-\dfrac{2}{3}$ et 1.
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
   (Δ): $\quad y = x + \dfrac{1}{3}$
   a. Établir la factorisation suivante :
   $-3x^2 + 5x + 2 = (2-x)(3x+1)$
   b. Résoudre algébriquement l'inéquation :
   $f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{3}$
   c. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$.

CC BY-NC

3. *Fonctions homographiques : problèmes*

E.7 Un automobiliste parcours sur les routes départementales une distance de $48\,km$ à une vitesse moyenne de $64\,{}^{km}\!/_{h}$, puis il parcourt la suite du parcours, de $x\,km$, sur autoroute à une vitesse moyenne de $115\,{}^{km}\!/_{h}$.

1. Déterminer la durée de son trajet sur les routes départementales.
2. a. Justifier que le trajet total a eu pour durée :
   $t = \dfrac{3}{4} + \dfrac{x}{115}$
   b. Justifier que la vitesse v moyenne de l'automobiliste, sur l'ensemble du parcours, s'écrit en fonction de x :
   $v = \dfrac{460x + 22080}{4x + 345}$
3. Le conducteur sait qu'il a parcouru l'intégralité du parcours à une vitesse moyenne de $92\,{}^{km}\!/_{h}$.

   Déterminer la distance parcourue sur l'autoroute par l'automobiliste. Puis, donner la distance totale de son parcours.

4. *Etudes d'autres fonctions*

E.8 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Établir les égalités suivantes :
   $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{4}{(x-1)^2-4}$
3. a. Justifier que, pour x appartenant à $\left]-\infty\,;-1\right[$, l'image de x est positive.
   b. Établir que la fonction f est croissante sur $\left]-\infty\,;-1\right[$.
4. Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :
   a. Pour tout nombre $h\in\mathbb{R}$ tel que les deux nombres $1+h$ et $1-h$ appartiennent à $\mathcal{D}_f$, vérifier l'égalité suivante :
   $f(1-h) = f(1+h)$
   b. En affichant la courbe $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice, quelle propriété géométrique semble posséder la courbe $\mathscr{C}_f$?

E.9

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :
   $f(x) = \dfrac{x+2}{(2x-1)(3-x)}$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
   b. Établir l'égalité suivante :
   $f(x) = \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{3-x}$
   c. Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty\,;-2\right]$, l'image de x par f est un nombre positif.
2. Soit g la fonction définie par :
   $g : x \longmapsto \dfrac{4}{4x-2} - \dfrac{2}{2x+5}$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
   b. Déterminer les valeurs de a et de b vérifiant la relation suivante :
   $g(x) = \dfrac{12}{4{\cdot}(x-a)^2+b}$
   c. Établir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

5. *Exercices non-classés*

E.10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3{\cdot}x+4}{x-1}$$

1. Établir l'identité : $f(x)=3+\dfrac{7}{x-1}$
2. Établir que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

E.11 On considère la fonction f définie sur $\left]-2\,;+\infty\right[$ par la relation : $f(x)=\dfrac{3{\cdot}x+8}{x+2}$

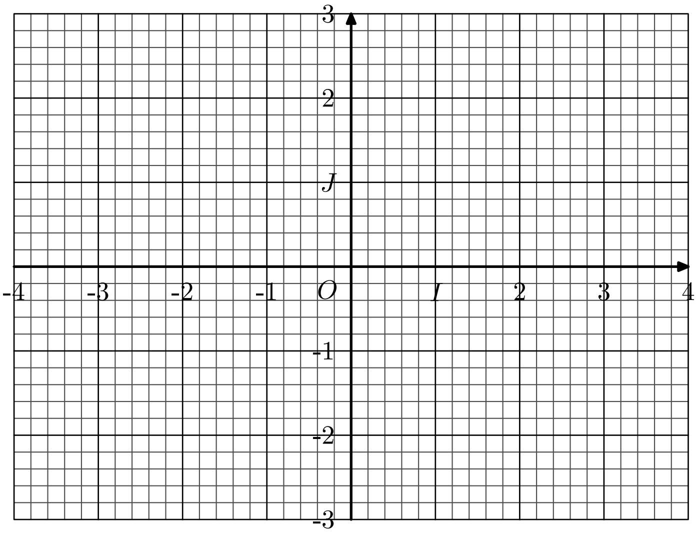
1. Établir l'identité : $f(x)=3+\dfrac{2}{x+2}$
2. Établir que la fonction f est décroissante sur $\left]-2\,;+\infty\right[$.

https://chingmath.fr CC BY-NC

E.12 On considère la fonction homographique f définie par :

$$f(x) = \frac{x-2}{4x+2}$$

On considère le plan muni du repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé représenté ci-dessous :



1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$:

2. À l'aide de la calculatrice :

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Compléter le tableau de valeurs, au dixième près :

x	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}8$
$f(x)$						

x	$-0{,}3$	0	$0{,}5$	1	2	3	4
$f(x)$							

3. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère ci-dessus.

 CC BY-NC