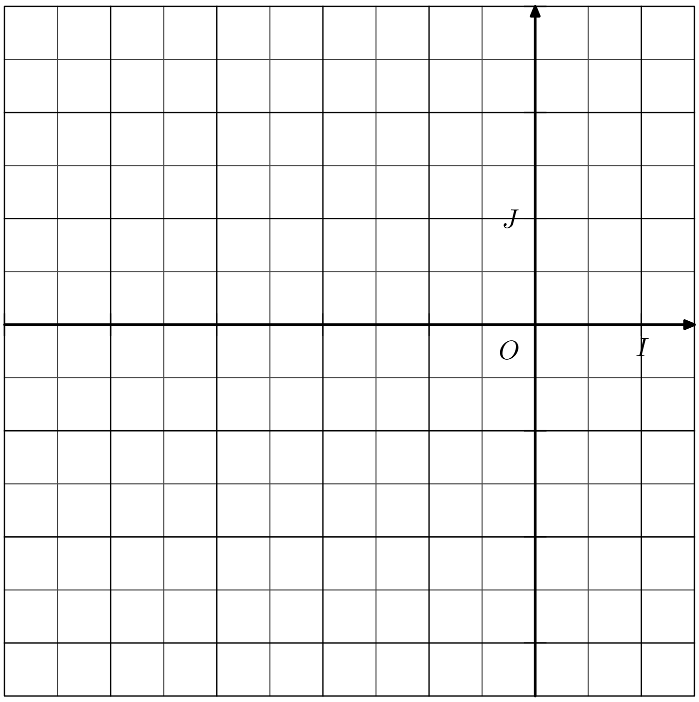
Hors programme lycée / Géométrie cartésienne

1. *Triangle rectangle et médiane*

E.1 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les deux points suivants :

$A(-4\,;-2)$; $B(-1\,;2)$



1. Placer les points A et B.

Le graphique sera complété au fur et à mesure des questions l'exercice.

2. On note K le milieu du segment $[AB]$. Montrer que le point K a pour coordonnées : $K(-2{,}5\,;0)$.
3. On considère le point C de coordonnées $(-2{,}5\,;-2{,}5)$.
   a. Déterminer les longueurs AB et KC.
   b. Que représente le segment $[KC]$ pour le triangle ABC?
   c. En déduire que le triangle ABC est rectangle en C.

E.2 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé. On considère les trois points :

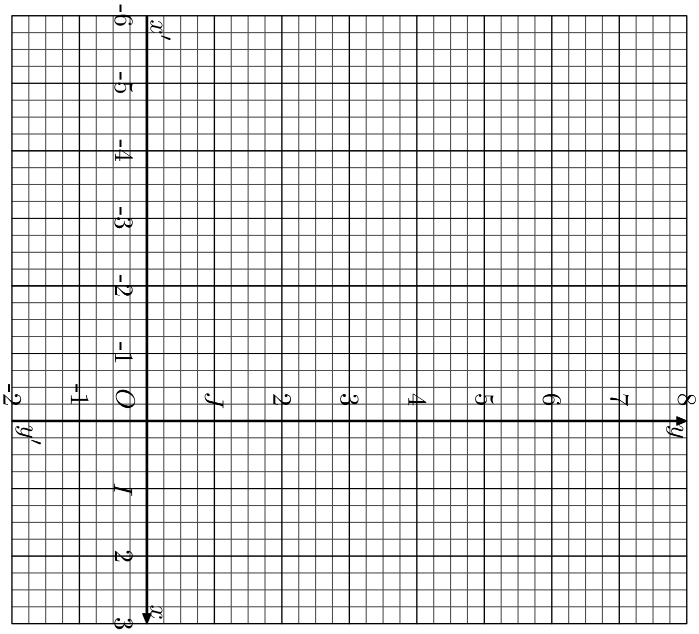
$A(-1\,;-2)$; $B(3\,;4)$; $C\left(2\,;1-2\sqrt{3}\right)$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Déterminer les coordonnées du point D milieu du segment $[AB]$.
3. On considère le point E de coordonnées $(1\,;1-\sqrt{13})$.
   a. Déterminer la mesure du segment $[DE]$.
   b. Démontrer que le triangle ABE est rectangle.
4. a. Déterminer les coordonnées du point F diamétralement opposé à C dans le cercle de diamètre $[AB]$.
   b. Montrer que le quadrilatère $AFBC$ est un rectangle.

E.3 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. Les points A, B et C ont pour coordonnées :

$A(-1\,;-1)$; $B(2\,;1)$; $C(-2\,;7)$

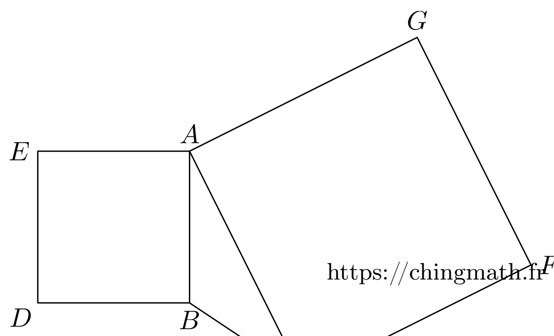
1. Justifier que le point I milieu du segment $[AC]$ a pour coordonées $I\left(-\frac{3}{2}\,;3\right)$.
2. a. Déterminer les coordonnées du point D afin que le point I soit le milieu du segment $[BD]$.
   b. Représenter le quadrilatère $ABCD$ dans le repère ci-dessous.



   c. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. On admet que $AC=\sqrt{65}$. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

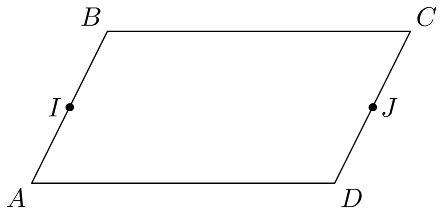
2. *triangles isométriques*

E.4 La figure ci-contre est composée du triangle ABC sur lequel nous avons construit à l'extérieur de ce triangle deux carrées : $EABD$ et $ACFG$.



1. Montrer que les triangles EAC et GAB sont des triangles isométriques.
2. En déduire que : $BG = EC$.

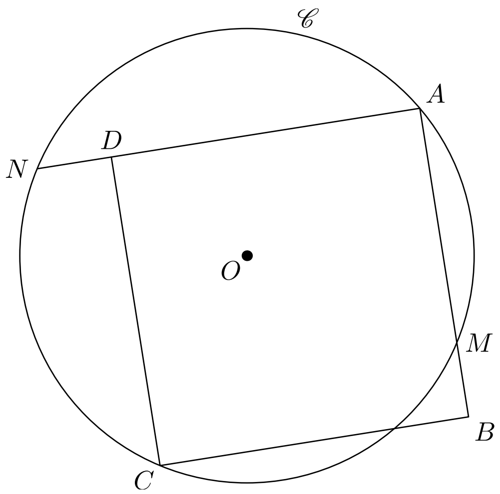
E.5 Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[DC]$.



1. Montrer que les triangles ADJ et CBI sont isométriques.
2. En déduire que : $AJ = CI$.

E.6 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. On considère le carré $ABCD$ ayant ses sommets A et C sur le cercle.

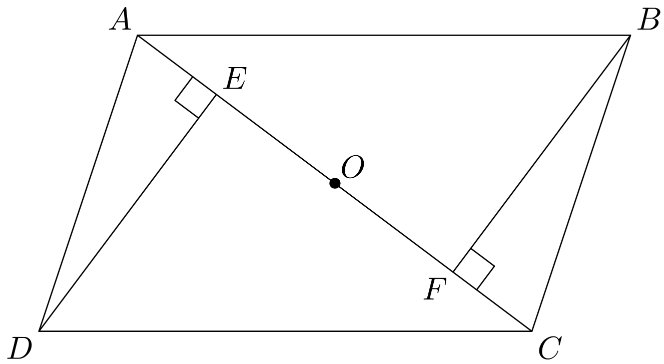
On utilisera les propriétés des angles inscrits et angles au centre.



1. Montrer que $[MN]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$.
2. Montrer que : $\widehat{NOC} = 90^o$
   Que peut-on dire des longueurs CM et CN?
3. En remarquant que $\widehat{NCM} = 90^o$, comparer les deux angles $\widehat{MCB}$ et $\widehat{NCD}$
4. En déduire que les triangles NDC et MCB sont isométriques.

On vient d'établir que l'égalité de longueurs suivante :
$ND = BM$

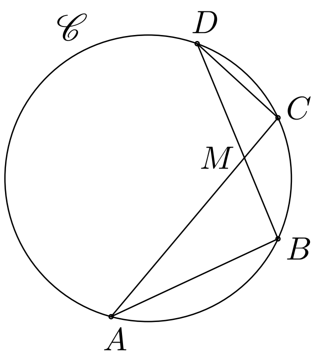
E.7 On considère la configuration suivante :



1. Reproduire sur votre cahier une figure ayant les mêmes propriétés que celle ci-dessus.
   - $ABCD$ est un parallélogramme
   - O est le centre de ce parallélogramme
   - E est la projection orthogonale de D sur la droite (AC)
   - F est la projection orthogonale de B sur la droite (AC)
2. Que peut-on dire des angles $\widehat{EOD}$ et $\widehat{BOF}$?
3. Montrer que les triangles ODE et OBF sont isométriques.
4. En déduire que : $OE = OF$.

3. triangles semblables

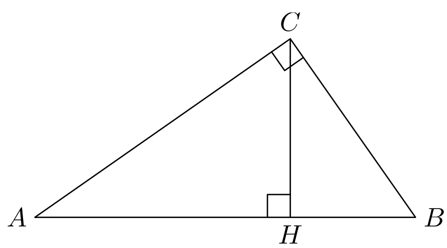
E.8



Dans la figure ci-contre, les points A, B, C et D sont quatre points du cercle $\mathscr{C}$.

Montrer que les triangles DCM et ABM sont semblables.

E.9 Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en C et on note H le pied de la hauteur issue du sommet C.



Montrer que les triangles ACH, CHB et ACB sont des triangles semblables.

E.10 $ABCD$ est un carré de centre O et de côté $10cm$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe la diagonale $[BD]$ en K et le côté $[BC]$ en L.

1. Démontrer que les triangles AOK et ABL sont semblables.
2. Calculer le coefficient de réduction du triangle ABL

E.11 Soient trois points E, D et F trois points d'un cercle $\mathscr{C}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{EDF}$ coupe $\mathscr{C}$ en K et coupe la droite (EF) en M.

1. Justifier l'égalité des angles $\widehat{EDK}$ et $\widehat{EFK}$
2. Justifier l'égalité des angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{DKF}$
3. En déduire que les triangles DEM et FKM sont semblables.

E.12 Soit ABC un triangle isocèle en A

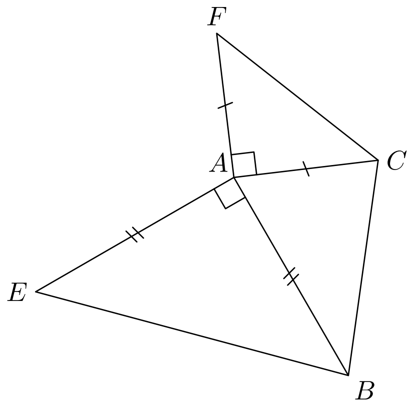
1. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

   Démontrer que : $BI = CI$
2. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en K et la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe $[AB]$ en L.

   Démontrer que : $BK = CL$
3. La hauteur issue de B, coupe $[AC]$ en M et la hauteur issue de C, coupe $[AB]$ en N.

   Démontrer que : $BM = CN$

E.13 Soit ABC un triangle. On construit extérieurement au triangle ABC deux triangles rectangles et isocèles en A.



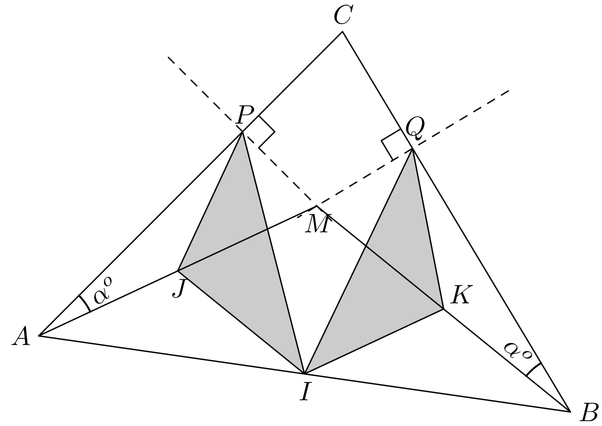
1. Montrer que : $FB = CE$.
2. On note I et J les milieux respectifs des segments $[FB]$ et $[CE]$. Montrer que A est sur la médiatrice du segment $[IJ]$

E.14 Dans un triangle ABC, on considère un point M, intérieur à ce triangle, réalisant l'égalité suivante :

$$\widehat{CAM} = \widehat{CBM}$$

On note P et Q les projetés orthogonaux du point M respectivement sur la droite (AC) et sur la droite (BC).

On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.



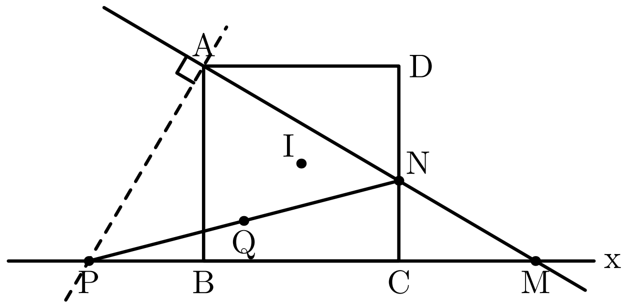
1. a. Justifier l'égalité : $AJ = JP$.

   b. Établir l'égalité : $JP = IK$.
2. Établir l'égalité : $IJ = KQ$.
3. a. Justifier que le quadrilatère $IJMK$ est un parallélogramme.

   b. Montrer que les angles $\widehat{PJI}$ et $\widehat{IKQ}$ sont de mesures égales.
4. En déduire que le triangle IPQ est un triangle isocèle.

E.15 On considère un carré $ABCD$ de sens direct. Le point M est un point de la demi-droite $[BC)$ n'appartenant pas au segment $[BC]$.
On note N le point d'intersection des droites (CD) et (AM), et P le point d'intersection de la droite (BC) et de la droite passant par A perpendiculaire à (AM).
On définit le point Q comme le milieu du segment $[PN]$.

On note I le centre du carré $ABCD$.



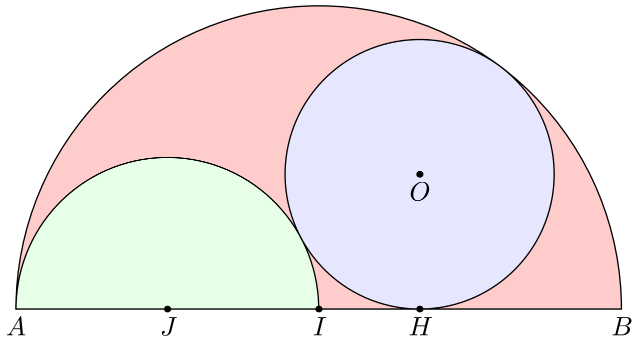
1. a. Montrer que les angles $\widehat{DAN}$ et $\widehat{BAP}$ sont de mesures égales.

   b. Démontrer que les triangles ADN et ABP sont isométriques.
2. a. Montrer l'égalité suivante : $DN = DC$.

   b. Démontrer les triangles ABQ et CBQ sont isométriques.
3. En déduire le lieu géométrique du point Q lorsque le point M décrit la demi-droite $[Cx)$.

4. *Sangaku*

E.16 Voici la représentation d'un sangaku :



Il est composé de deux demi-disques et d'un disque tous tangents entre eux.

Détermine les mesures IH et OH en fonction de la longueur JI.

5. *Lieu géométrique*

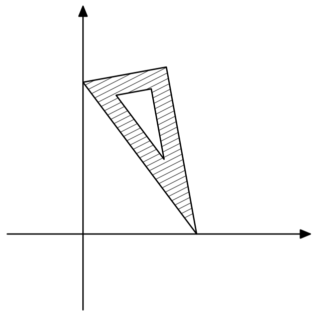
E.17 Dans le plan, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et $[AB]$ un diamètre de ce cercle.
Le point C est un point du cercle $\mathscr{C}$ distincts de A et de B.

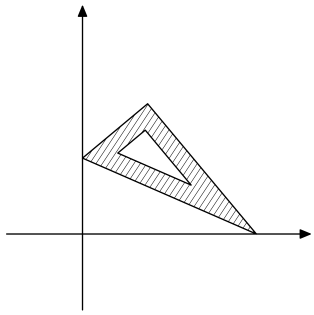
À tout point M du cercle $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, on associe la construction suivante :

- la droite (d) parallèle à la droite (AC) passant par le point M ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en D.
- la droite (d') parallèle à la droite (BC) passant par le point M ; elle intercepte une seconde fois le cercle $\mathscr{C}$ en E.
- on note G le centre de gravité du triangle MDE.

Préciser le lieu géométrique du point G lorsque le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$.

E.18 On considère une équerre dont les deux sommets de son hypoténuse sont situés respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

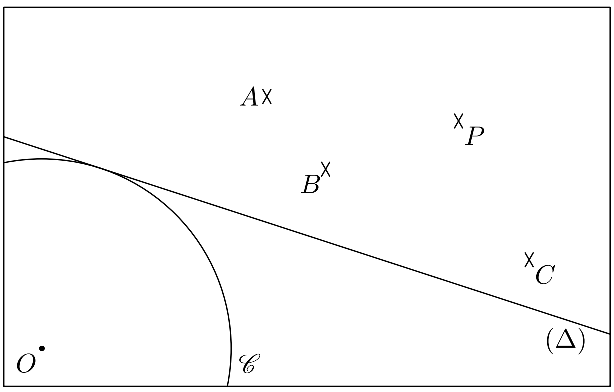




Lorsque l'équerre glisse dans ces conditions, quel est le lieu géométrique du sommet de l'angle droit?

6. *Cercles et tangentes*

E.19 On considère la configuration donnée ci-dessous :



1. À l'aide de l'équerre, vérifier que la droite (Δ) est une tangente du cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
2. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre P et tangent à la droite (Δ). Par quel*(s)* point*(s)* passe*(ent)* de la figure, le cercle $\mathscr{C}'$ passe-t-il?.

E.20 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point situé à l'extérieur du cercle $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{C}'$ le cercle ayant pour diamètre $[OA]$.

On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

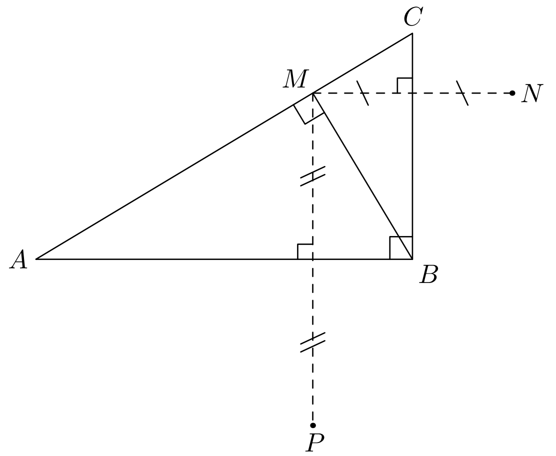
1. Réaliser une figure représentant cette configuration.
2. Que peut-on dire de la droite (AM) relativement au cercle $\mathscr{C}$? Justifier votre affirmation.

E.21 On considère la configuration suivante :

> *"Soit (d) une droite et H un point de cette droite. $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à la droite (d) ayant pour point de contact le point H."*

Effectuer le tracé d'une telle configuration et indiquer une méthode de construction.

E.22 Dans le plan, on considère le triangle ABC rectangle en B et M un point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{AMB}$ soit un angle droit ; les point N et P sont les symétriques du point M, respectivement par rapport aux droites (BC) et (AB) :



1. a. Justifier les égalités suivantes de longueurs : $BM = BN = BP$

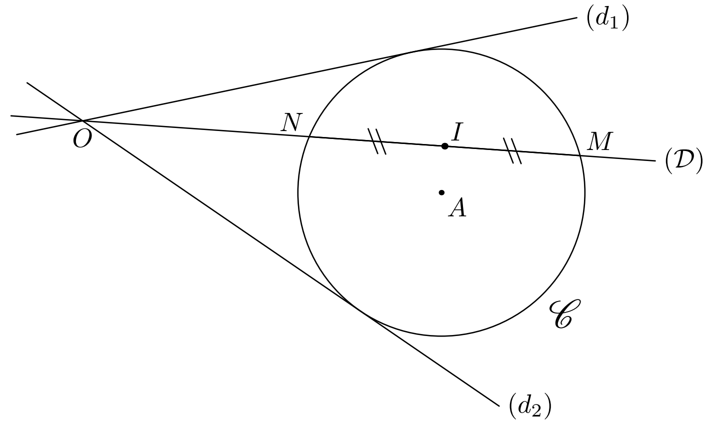
   b. Montrer que : $\widehat{PBN} = 180^o$.

   c. Justifier que le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[NP]$ admet la droite (AC) comme tangente au point M.

2. a. Démontrer que les points B, C, M, N sont cocycliques d'un cercle qu'on nommera $\mathscr{C}'$.

   b. Donner la position de la droite (AB) relativement au cercle $\mathscr{C}'$.

E.23 On considère un cercle $\mathscr{C}$, un point O et les deux droites (d_1) et (d_2) tangentes au cercle passant par le point O.



On considère une droite $(\mathcal{D})$ passant par O et comprise entre les droites (d_1) et (d_2) : on est libre de placer la droite $(\mathcal{D})$ a n'importe quel endroit, mais assujetti à ces deux contraintes.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble décrit par I lorsque la droite $(\mathcal{D})$ décrit l'ensemble des droites passant par O et comprise entre (d_1) et (d_2) :

1. a. Où se trouve le point I lorsque la droite $(\mathcal{D})$ est tel que les points M et N soient diamétralement opposés ?

   b. Tracer la droite $(\mathcal{D})$ à trois endroits différents ainsi que le point I associé.

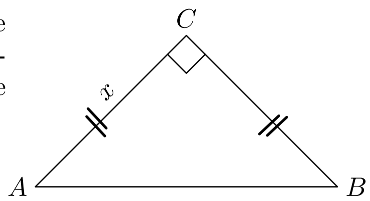
2. a. Faîtes une conjecture quant à l'ensemble de points décrit par le point I.

   b. Établir cette conjecture.

7. Rappels sur la trigonometrie

E.24

On considère le triangle rectangle-isocèle en C ci-contre. On note x la mesure du côté AC.



1. Compléter le tableau :

	$\widehat{ACB}$	$\widehat{CAB}$
Mesure en degré		

2. a. À l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la mesure du côté $[AB]$ en fonction de x.

   b. Dans le triangle rectangle ABC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$.

   c. Compléter le tableau :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
45^o			

8. théorème médiane

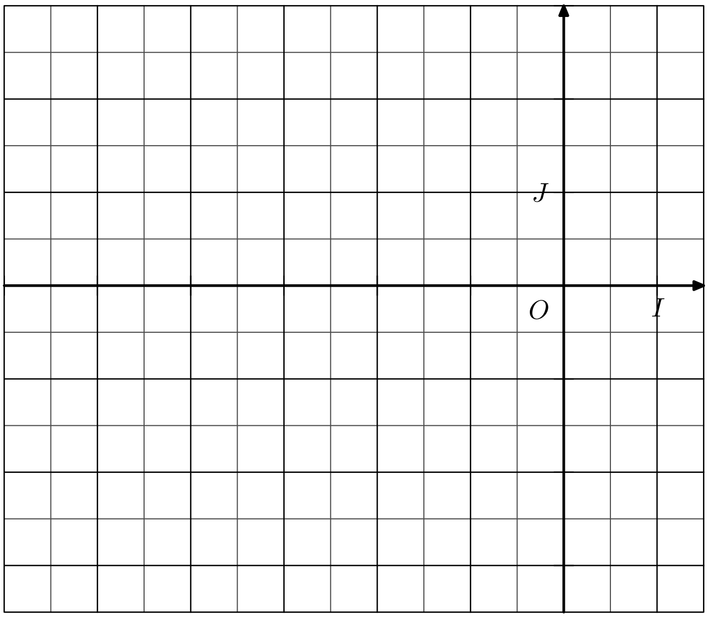
E.25

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. On considère les points A et B de coordonnées :
$A(x_A ; y_A)$; $B(x_B ; y_B)$.

- La distance AB est définie par :
$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$
- Notons I le milieu du segment $[AB]$. Le point I a pour coordonnées :
$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les deux points suivants :

$A(-4\,;-2)$; $B(-1\,;2)$



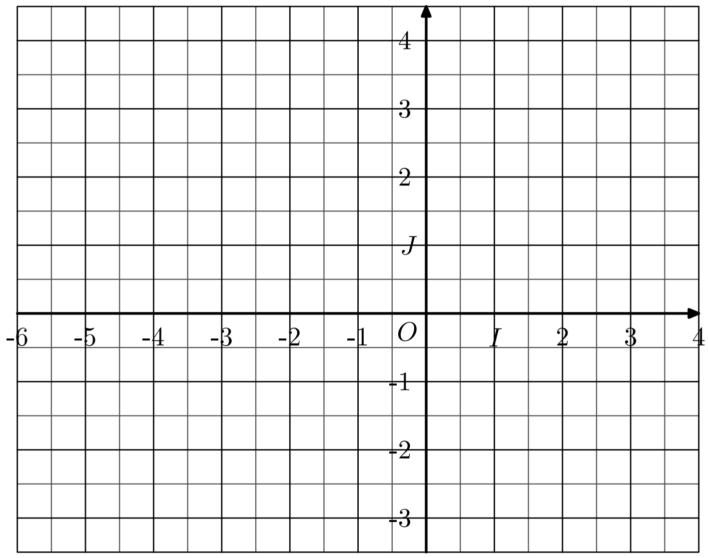
1. Placer les points A et B.

Le graphique sera complété au fur et à mesure des questions l'exercice.

2. On note K le milieu du segment $[AB]$. Montrer que le point K a pour coordonnées : $K(-2{,}5\,;0)$.

3. On considère le point C de coordonnées $(-2{,}5\,;\,-2{,}5)$.
   a. Déterminer les longueurs AB et KC.
   b. Que représente le segment $[KC]$ pour le triangle ABC?
   c. En déduire que le triangle ABC est rectangle en C.

E.26 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:



1. Placer les trois points A, B, C dans le repère ci-dessous :

   $A(3\,;-3)$; $B(-4\,;3)$; $C(-5\,;-1)$

2. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$.
3. a. Déterminer les longueurs AB et MC
   b. Établir que le triangle ABC est rectangle en C.
4. Soit N un point de l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées du point N afin que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CM}$ soient colinéaires.

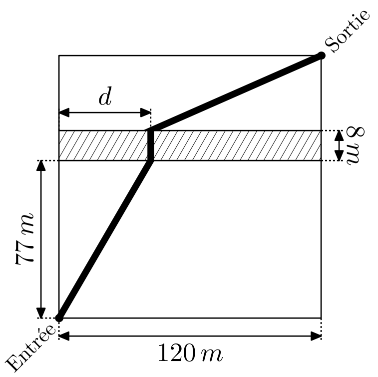
E.27 On considère le triangle ABC équilatéral dont les côtés mesurent $6\,cm$; on note I, J, K les milieux respectifs des milieux $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$; M est le centre de gravité du triangle ABC.

1. Déterminer la longueur du segment $[BJ]$ et $[BM]$.
2. Déterminer la valeur des différents produits scalaires suivants :
   a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$
   b. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$
   c. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$
   d. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MI}$

9. *Exercices non-classés*

E.28

La ville "*Promenade*" souhaite emmenager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.
La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



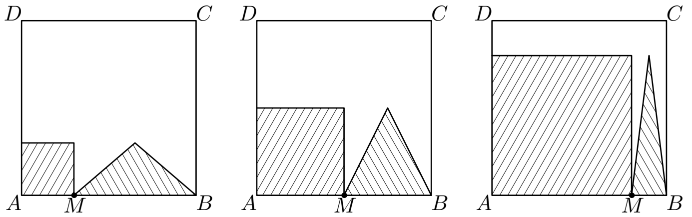
A quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?

E.29 On considère un carré $ABCD$ et un point M appartenant au segment $[AB]$. On constuire à l'intérieur du carré :

- un carré ayant le segment $[AM]$ pour côté ;
- un triangle isocèle admettant le segment $[MB]$ pour base principale.

On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan formé de ces deux figures.

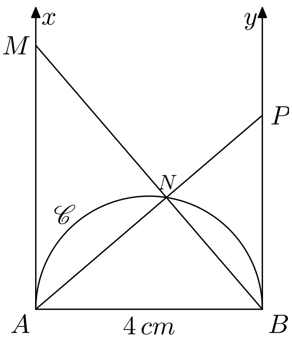
Voici trois représentations de cette situation :



Déterminer la position du point M pour l'aire du domaine $\mathcal{D}$ soit la moitié de celle du carré $ABCD$.

E.30

Dans la figure ci-contre, est représenté le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, les axes (Ax) et (By) sont perpendiculaires à la droite (AB).



M est un point quelconque de la demi-droite $[Ax)$.

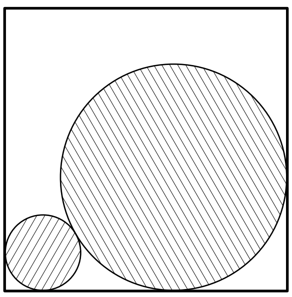
N est le point d'intersection, autre que B, du demi-cercle $\mathscr{C}$ et de la droite (MB).

P est le point d'intersection de la droite (AN) et de l'axe (By).

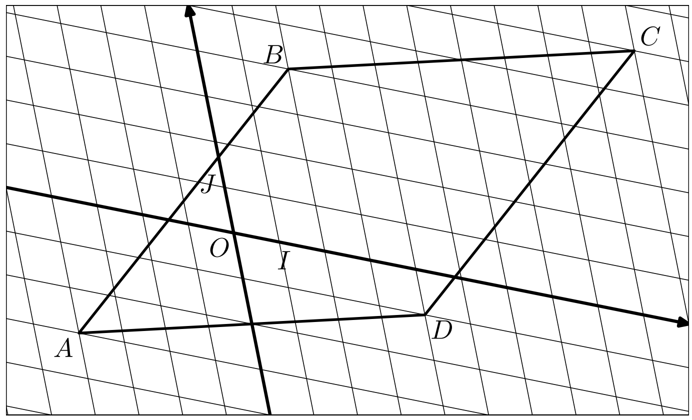
Que peut-on dire de la fonction f définie par :
$f:\ AM \longrightarrow BP$

E.31

Deux boules se trouvent au fond du boite cubique d'arête $15\,cm$. La grande boule a un rayon 3 fois supérieur à la petite boule.
La coupe transversale donnée ci-contre montre qu'elle sont "*parfaitement emboitées*" au fond de cette boîte.
Déterminer le rayon de chacune de ces boules.



E.32 Le plan est muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ quelconque représenté ci-dessous. On considère les quatre points A, B, C et D :



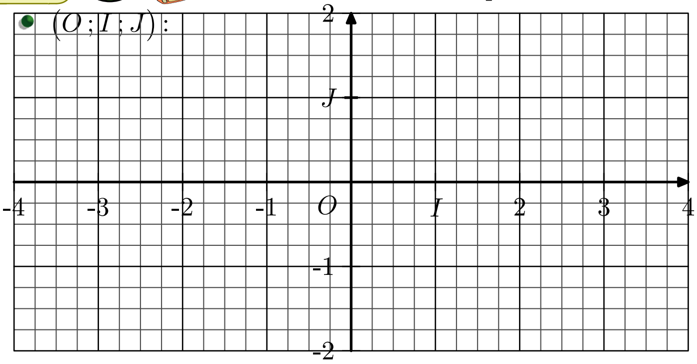
1. Donner les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère $(O\,;I\,;J)$.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

E.33 *Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. L'unité de longueur est le centimètre.*

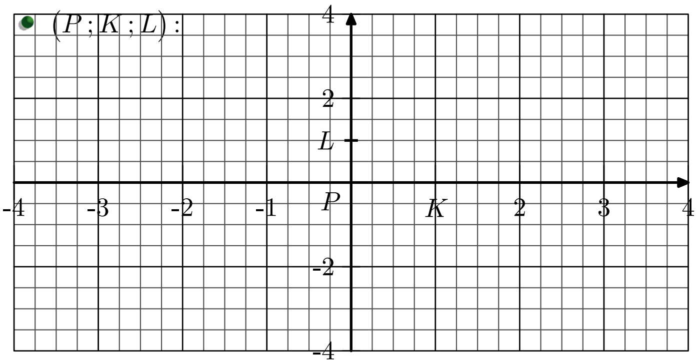
1. a. Placer le point $A(5\,;3)$.
   b. Déterminer la distance IA.
2. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 5 et le point $B\left(-1\,;\sqrt{21}\right)$.
   a. Démontrer que les points A et B appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.
   b. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer le point B.
3. a. Placer le point C, symétrique de A par rapport à I.
   b. Établir, sans aucun calcul, que le triangle ABC est rectangle en B.
4. a. Placer le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle
   b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D.

E.34 On considère les trois repères ci-dessous :

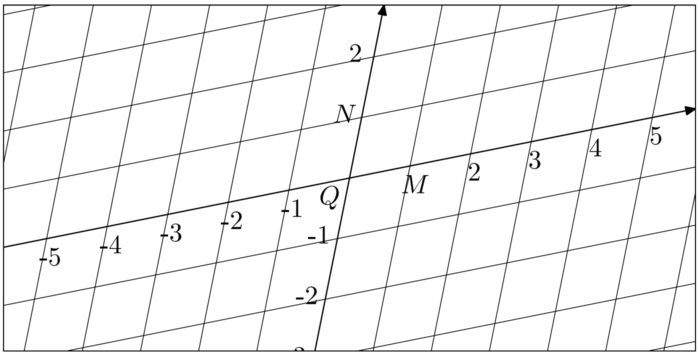
- $(O\,;I\,;J)$:



- $(P\,;K\,;L)$:

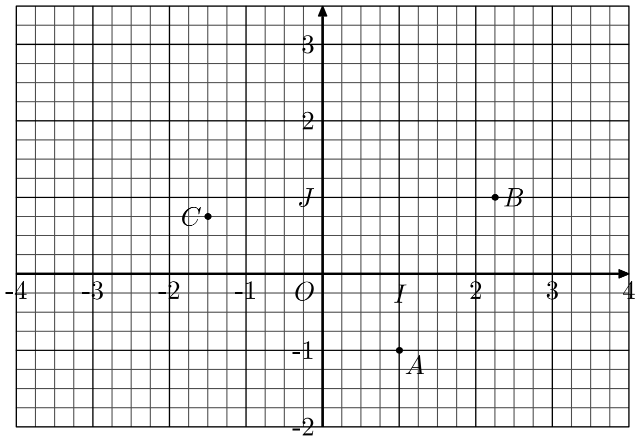


- $(Q\,;M\,;N)$:



1. Donner le nom de chacun de ces repères.
2. On considère les point A, B et C de coordonnées : $A(3\,;-1)$; $B(0\,;-2)$; $C(2\,;2)$
   a. Placer les points A, B et C dans chacun des repères.
   b. Vérifier, à l'aide de l'équerre, que le triangle ABC est rectangle en A dans le repère $(O\,;I\,;J)$.
   c. Quelle est la nature du triangle ABC dans les deux autres repères?

E.35 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et les trois points A, B, C représentés ci-dessous :



1. Donner les coordonnées des points A, B, C.
2. a. Placer le point D afin que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
   b. Donner les coordonnées du point D.
3. a. Placer le point E afin que le quadrilatère $ABEC$ soit un parallélogramme.
   b. Donner les coordonnées du point E.

