Hors programme lycée / Géométrie complexe

1. *Configuration du plan*

E.1 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$; *(unité graphique : 2 cm).*

1. Montrer que les points A d'affixe $1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

   Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.

E.2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 *cm*.

Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives :
   $z_A = -11+4\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_B = -3-4\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_C = 5+4\cdot\mathrm{i}$

2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathcal{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

   Montrer que l'affixe de E vérifie :
   $z_E = -3+\left(8\sqrt{2}-4\right)\cdot\mathrm{i}$.
   Placer le point E.

4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Placer le point D.

E.3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 *cm*. On considère les points A et B d'affixes respectives :
$z_A = 1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = 2\cdot\mathrm{i}$

1. a. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
   b. Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   c. Déterminer la nature du triangle OAB.

2. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M'.
   a. Calculer un argument du quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   b. En déduire l'écriture complexe de rotation r.

3. Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O. Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' *(autre que O)*. On note z_C son affixe.
   a. Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.
   b. Calculer l'affixe z_I du milieu I de $[AB]$.
   c. Déterminer la nature du quadrilatère $OACB$.
   d. En déduire que I est le milieu de $[OC]$ puis montrer que l'affixe de C est :
      $z_C = 1+\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\mathrm{i}$

4. Soit D le point d'affixe $z_D = 2\cdot\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.
   a. Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.
   b. Placer D' image de D par la rotation r définie à la question 2.
      On note $z_{D'}$ l'affixe de D'. Montrer que :
      $z_{D'} = -\sqrt{3}+3\cdot\mathrm{i}$.

5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire?

E.4 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$

Soient les points A, B et C d'affixes respectives :
$\mathrm{i} \quad ; \quad 1+\mathrm{i} \quad ; \quad -1+\mathrm{i}$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}\cdot z+2}{z-\mathrm{i}}$$

1. a. Déterminer les images de B et de C par l'application f.
   b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :
      $(z'-\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 1$
   c. Soit D le point d'affixe $1+2\cdot\mathrm{i}$. Placer les points A, B, C et D sur une figure *(unité graphique 4 cm)*.
      Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l'application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif.
   Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R?

CC BY-NC

2. *Transformations du plan*

E.5 Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ orthonormé.

1. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe :
$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(-1+\mathrm{i}\right)$

2. On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(-1+\mathrm{i}\right)\cdot z$$
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

E.6 Le plan complexe est rapporté au repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ orthonormé direct.

On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe :
$z_A = \sqrt{3}+2\cdot\mathrm{i}$

1. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

   Sur une figure *(unité graphique 1 cm)* qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

2. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   Démontrer que le point B, image du point A par la rotation r, a pour affixe :
   $z_B = -1+\mathrm{i}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$

   Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

3. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

E.7 **Les parties A et B sont indépendantes**

On considère l'équation (E) : $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0$ où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. a. Montrer que (E) admet une solution réelle, noté z_1.

   b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :
   $z^3-(4+\mathrm{i})\cdot z^2+(7+\mathrm{i})\cdot z-4 = \left(z-z_1\right)\cdot\left(z-2-2\mathrm{i}\right)\cdot\left(az+b\right)$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les trois points A , B et C d'affixes respectives 1, 2+2i et 1−i.

1. Représenter A, B et C.

2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2i}{1-\mathrm{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.

3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.

4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.

5. Quelle est la nature de $OCDB$?

 BY-NC

E.8 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte *(unité graphique : 2 cm)*.

1. a. Résoudre l'équation : $(E) : z^2-2\sqrt{3}\cdot z+4=0$
   b. On considère les nombres complexes :
   $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}\quad;\quad z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$
   Et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.
   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w}=-2\cdot\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que $MNPQ$ est un carré.
2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.
3. On pose : $a=2-\sqrt{3}$:
   a. Montrer que : $1+a^2=4a\quad;\quad 1-a^2=2a\sqrt{3}$
   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de a.
   c. Montrer que : $\left|Z\right|=\left|Z'\right|\quad;\quad \dfrac{Z}{Z'}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS

E.9

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

   On pose : $a=3\quad;\quad b=5-2\cdot\mathrm{i}\quad;\quad c=5+2\cdot\mathrm{i}$

   On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.
   a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
   b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\cdot\mathrm{i}}$.
   c. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\cdot\mathrm{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.
2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2-\mathrm{i}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

E.10

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, on considère les points :
   - A d'affixe a où $a\in\mathbb{R}$;
   - B d'affixe $b+\mathrm{i}$ où $b\in\mathbb{R}$;
   - C image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

   a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $\left(O\,;\vec{v}\right)$.
   b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.
2. Dans cette question, on pose $a=\sqrt{3}$ et $b=0$. On considère les points C d'affixe $c=-\mathrm{i}$ et D d'affixe $d=2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}$
   a. Quelle est la nature du triangle ABC?
   b. Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$; que peut-on déduire pour le triangle ACD?
   c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   e. Déterminer la nature du triangle BEF.

E.11 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\dfrac{z-4}{z}=\mathrm{i}$. Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
   $a=2\quad;\quad b=4\quad;\quad a'=2\mathrm{i}\quad;\quad d=2+2\mathrm{i}$

   Quelle est la nature du triangle ODB?
4. Soient E et F les points d'affixes respectives :
   $e=1-\mathrm{i}\sqrt{3}\quad;\quad f=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$
   Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?
5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A' et de rayon 2.

   Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
   a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.
   b. Démontrer que le point E' est un point du cercle $\mathscr{C}'$.
   c. Vérifier que : $e-d=\left(\sqrt{3}+2\right)\left(e'-d\right)$.
   En déduire que les points E, E' et D sont alignés.
6. Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

 CC BY-NC

E.12 Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ orthonormé direct.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

   Proposition 1 : "z^{100} est un nombre réel".

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que :
   $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$.

   Proposition 2 : "l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels".

3. Soit r la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.

   Proposition 3 : "l'image du point O par la rotation r a pour affixe $(1-\sqrt{3})+\mathrm{i}\cdot(1+\sqrt{3})$"

4. On considère l'équation (E) suivante :
   $z^2+2\cdot\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cdot z+1=0$

   Proposition 4 : "L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1."

3. *Annales sur les configurations du plan*

E.13 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$; l'unité graphique est 1 *cm*.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :
   $z^2+4\cdot z+8=0$

   On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives :
   $a=2-2\cdot\mathrm{i}$; $b=-a$
   Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
   a. Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est :
   $d=2-6\cdot\mathrm{i}$
   c. Placer les points C et D sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système :
   $\{(A\,;1)\,;\,(B\,;-1)\,;\,(C\,;\alpha)\}$
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.
   b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.
   c. Pour quelle valeur de α a-t-on : $G_\alpha=D$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha=2$.

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MC}\right\|=4\cdot\sqrt{2}$

E.14 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ d'unité graphique 2 *cm*.

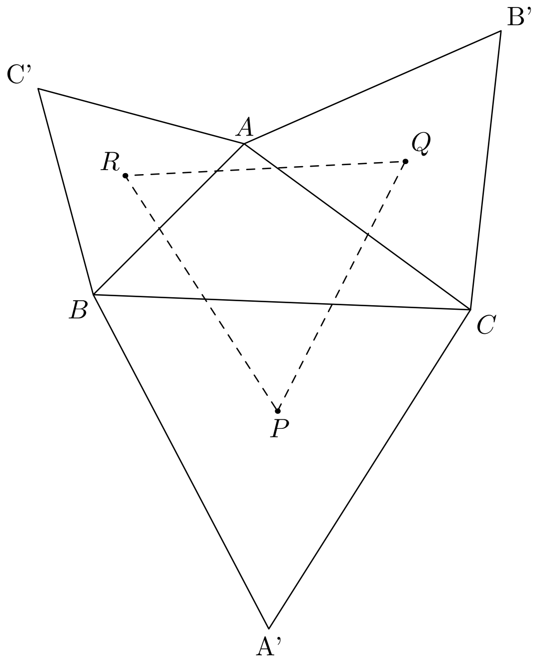
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=-2\cdot\mathrm{i}$; $z_B=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_C=\sqrt{3}+\mathrm{i}$

1. Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
2. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
3. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
4. a. Écrire le quotient $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
5. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.
   a. Montrer que le point O', image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.
   b. Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.
   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
6. a. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :
   $|z|=\left|z+\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|$
   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

 (cc) BY-NC

E.15 Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles BCA', ACB' et ABC' :



On note a, b, c, a', b', c', p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C', P, Q et R.

1 a Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l'image de A par une rotation dont on précisera la mesure de l'angle et le centre.

b Montrer que : $a'+b'+c'=a+b+c$.

2 En déduire que : $p+q+r=a+b+c$.

3 En déduire que les triangles ABC, $A'B'C'$ et PQR ont même centre de gravité.

4 Montrer que :
$3(q-p)=(b'-c)+(c-a')+(a-b)$.

On admettra que, de même :
$3(r-p)=(a-c)+(b-a')+(c'-b)$.

5 Justifier les égalités suivantes :

$a-c=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b'-c)$; $b-a'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a')$; $c'-b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)$

6 Déduire des questions 4 et 5 que le triangle PQR est équilatéral.

4. *Annales sur les transformations du plan*

E.16 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 2 cm)*, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=2$; $z_B=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $z_C=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

Partie A.

1 a Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.

b Placer les points A, B et C.

2 Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

3 Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan tels que :
$|z|=|z-2|$

Partie B.

À tout point M d'affixe z tel que $z\neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z'=\dfrac{-4}{z-2}$

1 a Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z=\dfrac{-4}{z-2}$.

b En déduire les points associés aux points B et C.

c Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2 a **Question de cours :**
Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :
$|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul :
$\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$

b Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 : $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$

c On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est l'ensemble défini à la question 3 de la partie **A**.
Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

CC BY-NC

E.17 ⚠ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique : 1 cm).*

Partie A

Dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation : $y^2-x^2=16$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ et où $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.

2. a. Étudier la fonction f *(limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).*

   b. Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

   c. Tracer $\mathscr{H}$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
   On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan constitué des points $M(x\,;y)$ vérifiant :
   $$-3\leqslant x\leqslant 3 \quad ; \quad \sqrt{x^2+16}\leqslant y\leqslant 5$$
   Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ et exprimer l'aire de $\mathscr{D}$ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de r.

   b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x\,;y)$ du plan.
   Vérifier que : $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-x+y)\end{cases}$
   Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A' et B' dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

2. Soit $\mathscr{H}'$ l'hyperbole d'équation : $x\cdot y=8$.

   a. Tracer $\mathscr{H}'$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

   b. Montrer que $\mathscr{H}'$ est l'image de $\mathscr{H}$ par la rotation r.

3. Soit $\mathscr{D}'$ l'image de $\mathscr{D}$ par la rotation r. On admet que $\mathscr{D}'$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan vérifiant :
   $$\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4\cdot\sqrt{2} \quad ; \quad \frac{8}{x}\leqslant y\leqslant 5\cdot\sqrt{2}-x.$$

   a. Hachurer $\mathscr{D}'$.

   b. Calculer l'aire de $\mathscr{D}'$, exprimée en cm^2.
   En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de $\mathscr{D}$.

5. Autes annales

E.18 ⚠ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives :
$a=5+5\cdot\text{i} \quad ; \quad b=5-5\cdot\text{i} \quad ; \quad p=10$

On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.

On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_B de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u=\text{i}(10-z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.

2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que :
   $z\cdot\overline{z}-5\cdot z-5\cdot\overline{z}=0$
   Justifier que le quadrilatère $OAPB$ est inscrit dans Γ.

3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.

   a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si, et seulement si, :
   $\dfrac{u}{z}=\dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$

   b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si, et seulement si, M appartient à Γ.

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?

5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.

   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

6. Exercices non-classés

E.19 ⚠ Le plan complexe est rapporté au repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.

On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A=\sqrt{3}+2\cdot\text{i}$

1. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

2. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Démontrer que le point B image du point A par la rota-

 (cc) BY-NC

tion r a pour affixe :
$z_B = -1 + \mathrm{i}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$

Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

3 Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

4 Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier.

E.20 Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct

On considère les points A et B d'affixes respectives :
$a = \mathrm{i}\quad ;\quad b = 1+\mathrm{i}$

On note :

- r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$;
- r_O la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

On considère :

- le point C d'affixe $c{=}3{\cdot}\mathrm{i}$;
- le point D image de C par r_A ;
- le point G image de D par r_B ;
- le point H image de C par r_0.

On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1 Démontrer que $d{=}{-}2{+}\mathrm{i}$.

2 Déterminer g et h.

3 Démontrer que le quadrilatère $CDGH$ est un rectangle.

E.21 Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le point A de $(\mathscr{C})$ d'affixe :
$z_A = e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}$

1 Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

2 a Justifier que $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

b Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier.

3 Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b Quelle est la nature du triangle PQR? Justifier.

4 *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

a Donner l'écriture complexe de h.

b Calculer $z_A{+}z_B{+}z_C$. En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.

c Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle $(\mathscr{C})$?

E.22 Le plan est rapporté au repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct *(unité graphique 2 cm)*.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe $2\mathrm{i}$.

On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'{=}\mathrm{i}{\cdot}z$.

1 a Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

b Déterminer l'affixe du point A', image par f du point A d'affixe $1{+}\sqrt{2}{+}\mathrm{i}$.

c Montrer que les points A, I et A' sont alignés.

2 a Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1{+}\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b Vérifier que le point A appartient à (Γ).

c Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).

3 Soit B le point d'affixe $2{+}2\mathrm{i}$ et B' l'image de B par f.

a Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.

b Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. Déterminer la nature du quadrilatère $OACA'$.

 CC BY-NC