Hors programme lycée / Géométrie espace

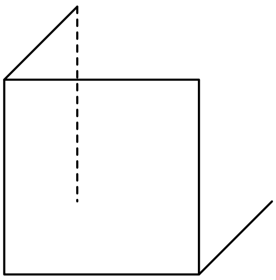
1. Perspectives cavalières

E.1 Voici les règles pour représenter un solide en perspective cavalière :

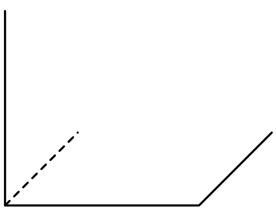
- Les figures vues de face restent inchangées.
- Des droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.
- L'alignement des points est conservé.
- Le rapport de longueur est conservé : en particulier un milieu reste un milieu.
- Les parties cachées sont représentées en pointillés.

Voici des représentations incomplètes d'un cube en perspective cavalière. Tracer les lignes manquantes en respectant la perspective cavalière.

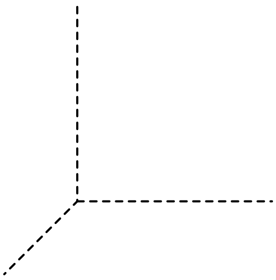
a



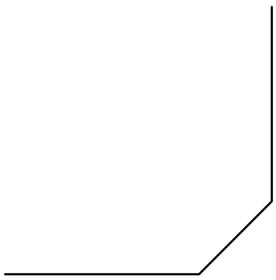
b



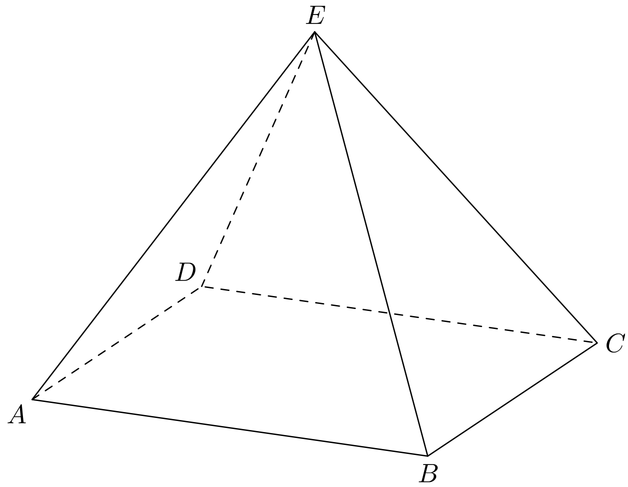
c



d



E.2 On considère la pyramide à base rectangulaire $ABCDE$ représentée ci-dessous :



1. a. Placer sur la figure le centre du rectangle $ABCD$.
   b. Quelle propriété a été utilisée de la perspective cavalière pour placer le point O?
2. a. Placer le centre de gravité G du triangle EBC.
   b. Quelles propriétés de la perspective cavalière ont été utilisées pour tracer ce centre de gravité?

E.3 On considère un quart de cercle $\overset{\frown}{AC}$ d'un cercle de centrer B représenté dans le plan *(Fig. 1)* et dans l'espace *(Fig. 2)* :

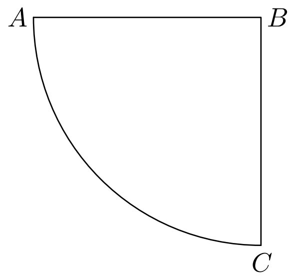


Fig 1

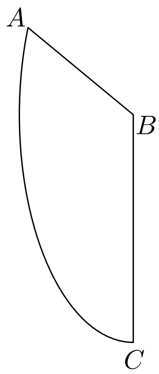
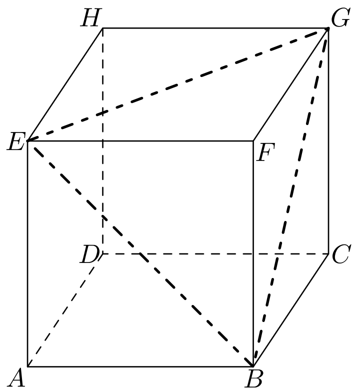


Fig 2

On n'utilisera, dans cet exercice, que la règle non-graduée et le compas.

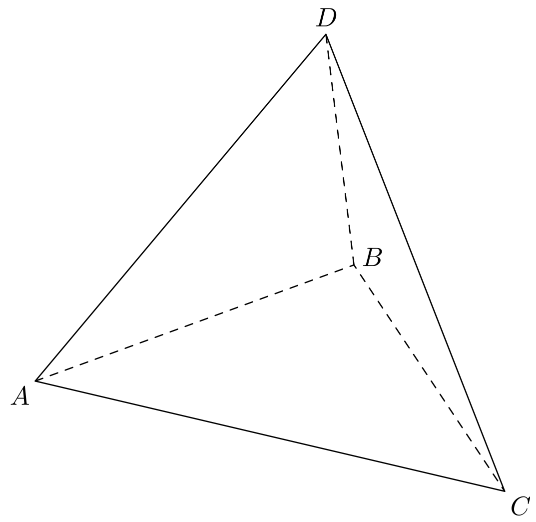
1. Dans la figure 1 :
   a. Placer les milieux des segments $[BA]$ et $[BC]$. Justifier votre construction.
   b. Placer le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$. Justifier votre construction.
2. Dans la figure 2 :
   a. Placer les milieux des segments $[BA]$ et $[BC]$.
   b. Peut-on placer le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$?

E.4 On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{FGB}$.
2. a. Donner la nature du triangle BEG. Justifier votre réponse.
   b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{EBG}$.

E.5 Dans l'espace, on considère le tétraèdre régulier $ABCD$ de côté $5\,cm$: toutes ces faces sont des triangles équilatéraux et le pied de la hauteur issue d'un sommet est le centre de la face opposée de ce sommet.



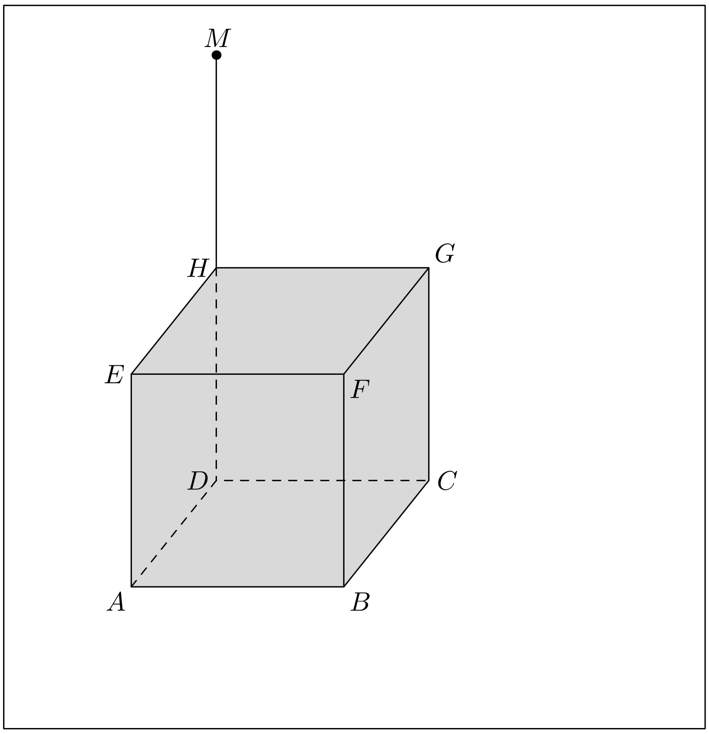
1. Dans le triangle ABC :
   a. Dessiner la hauteur issue du sommet C. On notera I le pied de cette hauteur. Justifier votre construction.
   b. Placer le point G centre de gravité du triangle ABC. Justifier.

On admet que toutes les hauteurs d'un triangle équilatéral de côté a ont pour mesure $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$:

2. Donner la mesure du segment $[CI]$.
3. a. Donner la mesure du segment $[CG]$. Justifier votre réponse.
   b. Déterminer la mesure du segment $[DG]$.
4. Déterminer le volume du tétraèdre régulier $ABCD$.

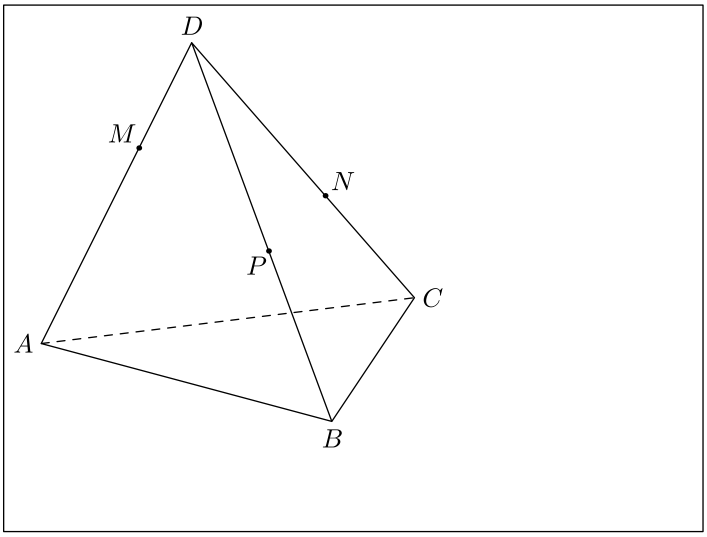
2. *Intersections d'objets dans l'espace*

E.6 Soit $ABCDEFGH$ un cube. On considère une source lumineuse M placée au-dessus du cube tel que : $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HM}$



Dessiner l'ombre créée par cette source lumineuse autour du cube.

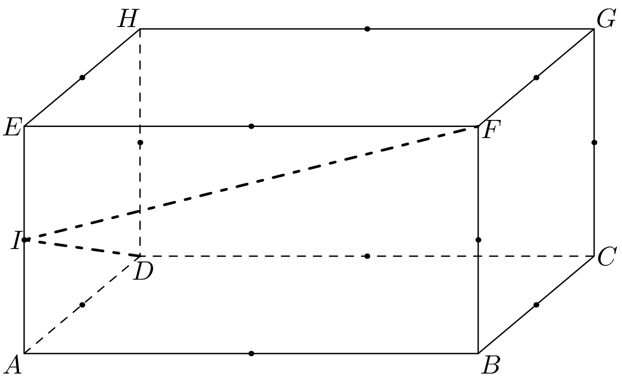
E.7 Dans l'espace, on considère le tétraèdre $ABCD$. On note M, N, P des points appartenant respectivement aux arêtes $[DA]$, $[DC]$, $[DB]$:



Tracer l'intersection du plan (ABC) et du plan (MNP).

3. *Utilisation des théorèmes*

E.8 On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



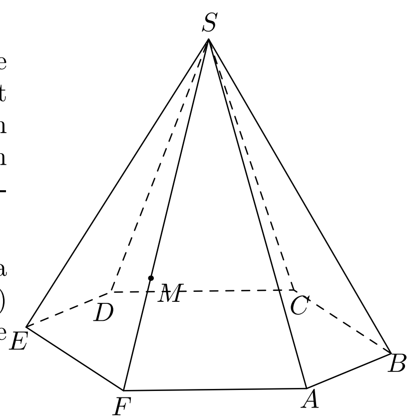
Le point I est le milieu du segment $[AE]$. Les milieux des différentes arêtes sont représentés sur la figure.

Représenter la section du plan (DIF) et du parallélépipède. Justifier votre construction.

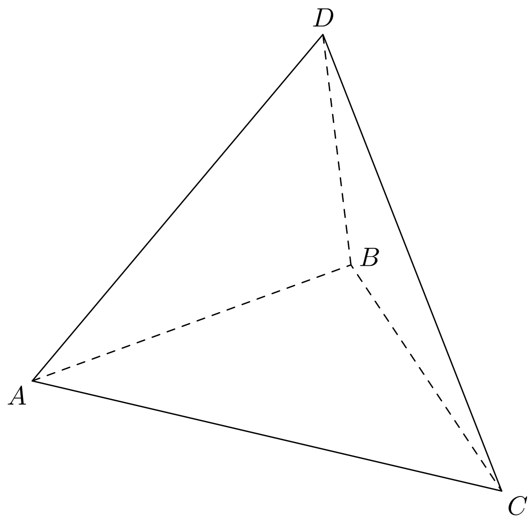
E.9

On considère la pyramide $ABCDEFS$ de sommet S dont la base est un hexagone régulier. On note M un point du segment $[SF]$.

Tracer le plan section de la pyramide avec le plan $(\mathcal{P})$ parallèle à son plan de bse passant par le point M.

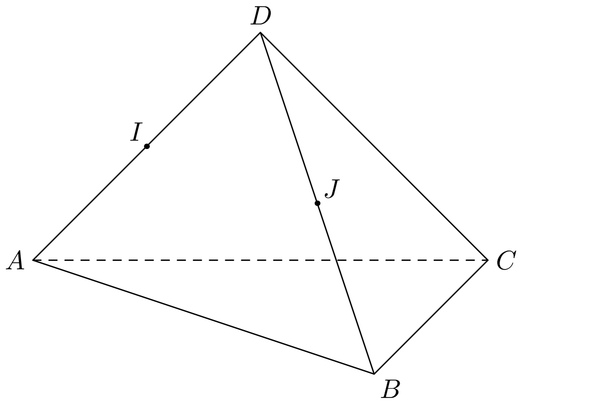


E.10 Dans l'espace, on considère le tétraèdre régulier $ABCD$: toutes ces faces sont des triangles équilatéraux.



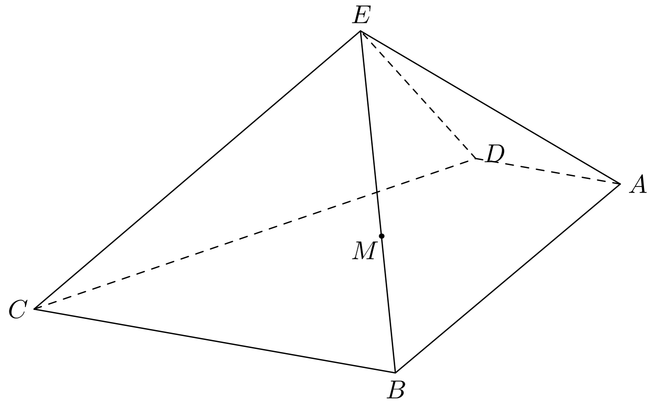
1. a. Dessiner la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
   b. Dessiner la hauteur du triangle ABD issue du sommet D.
2. Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

E.11 Dans l'espace, on considère le tétraèdre $ABCD$; I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AD]$ et $[BD]$. $[AD]$ *(resp.* $[BD]$*).*



1. Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB). Tracer le segment $[IJ]$.
2. En vous aidant d'un raisonnement similaire, tracer le point K milieu du segment $[CD]$.
3. Montrer que les deux plans (IJK) et (ABC) sont parallèles?

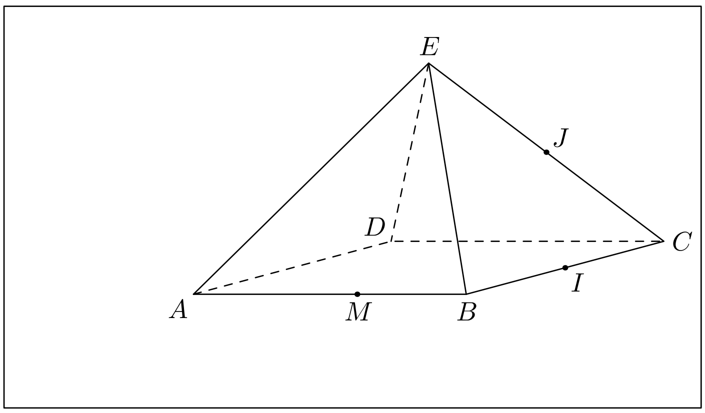
E.12 On considère la pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base est un trapèze avec $(BC)/\!/(AD)$. Soit M un point du segment $[BE]$.



Tracer la section de la pyramide par le plan (ADM). Justifier votre construction.

4. *Problèmes*

E.13 Dans l'espace, on considère la pyramide $ABCDE$ à base carré ; on note I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CE]$; M est un point de l'arête $[AB]$:

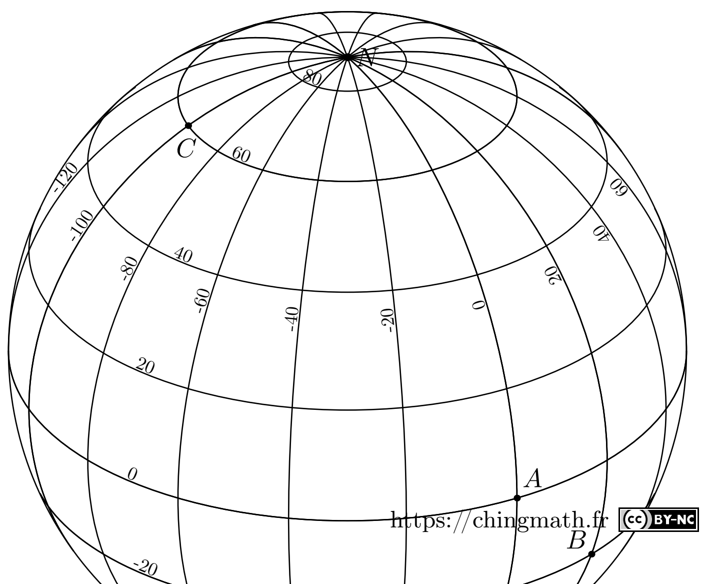


1. Montrer que (EB) est parallèle au plan (IJM).
2. En déduire le tracé de l'intersection des plans (ABE) et (IJM).
   Noter N le point d'intersection du plan (IJM) avec le segment $[AE]$.

1. a. Justifier que les droites (AD) et (IM) sont sécantes.
   b. Placer le point T intersection des droites (AD) et (MI).
   c. En déduire la position du point P intersection de la droite (DE) par le plan (IJM).
2. Tracer la section du plan sur la pyramide.
3. Retrouver le point P d'une autre manière

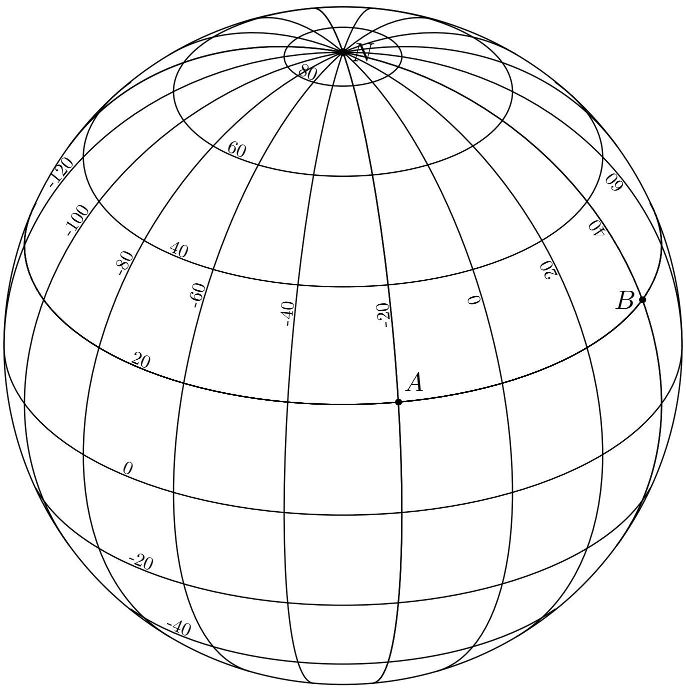
5. *Repérage dans la sphère*

E.14 Ci-dessous sont représentés les méridiens et les parallèles du globe-terrestre :



Déterminer les coordonnées géodésiques des points A, B et C.

E.15 Ci-dessous est représenté le globe terrestre muni de son repère géodésique *(méridiens et parallèles)* :

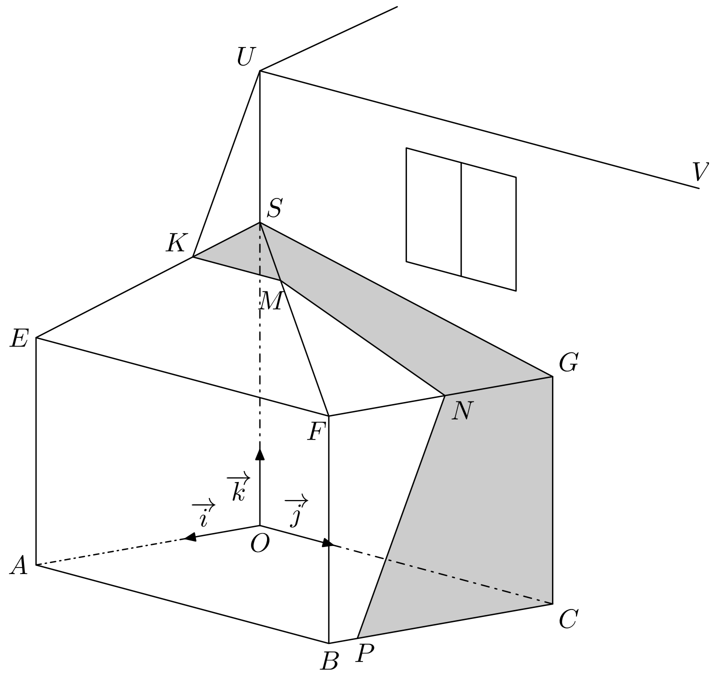


1. Déterminer les coordonnées géodésiques des points A et B.
2. En prenant $6\,370\,km$ pour le rayon de la terre, déterminer la distance à vol d'oiseau séparant les points A et B arrondie au kilomètre près.

6. *Sections de solides*

E.16 Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes $[UV]$ et $[EF]$ des toits sont parallèles.

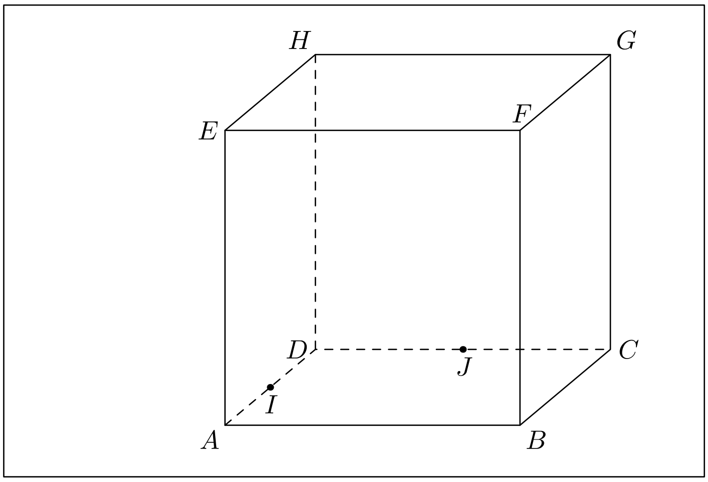


Sans calcul, justifier que :

1. le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$;
2. le segment $[NP]$ est parallèle au segment $[UK]$.

7. *Tracés de sections de solides*

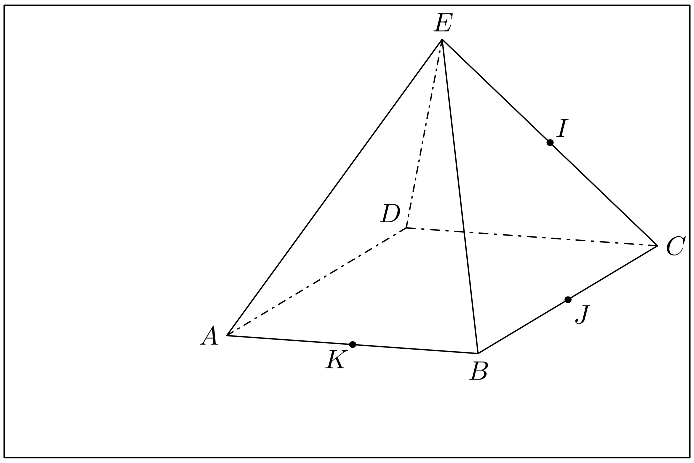
E.17 On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous et les points I, J milieux respectifs des arêtes $[AD]$ et $[DC]$:



1. a. Déterminer la position sur la figure du point M intersection de la droite (AB) avec le plan (IJF).
   b. Déterminer la position sur la figure du point P intersection de la droite (AE) avec le plan (IJF).
2. a. Déterminer le point N, intersection de la droite (BC) avec le plan (IJF).
   b. Déterminer le point Q, intersection de la droite (GC) avec le plan (IJF).
3. Tracer sur la figure ci-dessus la section du cube avec le plan (FIJ).

Voir en animation la correction : r495-1

E.18 On considère la pyramide $ABCDE$ à base carrée représentée ci-dessous. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[CE]$, $[BC]$, $[AB]$:

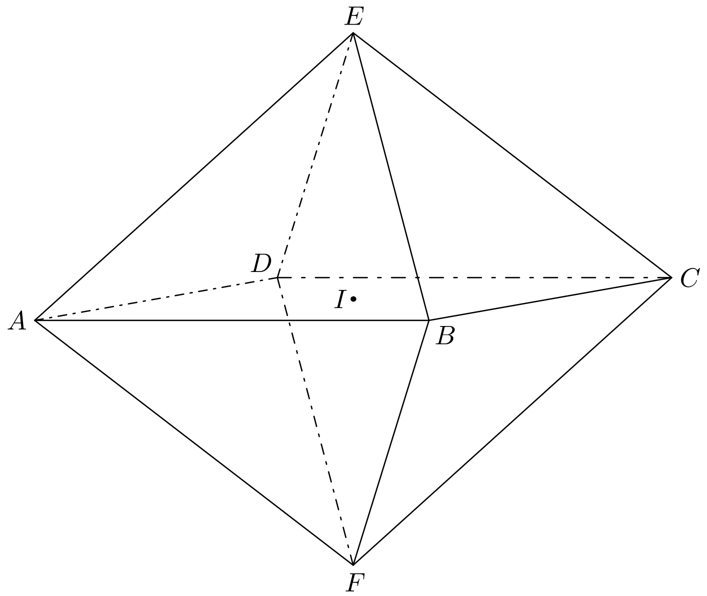


1. a. Justifier que les droites (BE) et (IJ) sont parallèles.
   b. Préciser la position de la droite (d) d'intersection des plans des plans (ABE) et (IJK). Puis, effectuer le tracé de la droite (d).

On note L le point d'intersection des droites (d) et (AE). On remarquera que le point L appartient au plan (IJK).

2. Dans cette question, nous allons étudier l'intersection du plan (IJK) avec l'arête $[ED]$:
   a. Déterminer l'emplacement du point T, intersection du plan (IJK) avec la droite (AD).
   b. Justifier que la droite (LT) appartient au plan (ADE).
   c. En déduire la position du point M, intersection du plan (IJK) avec l'arête $[ED]$.
3. Représenter la section de la pyramide $ABCDE$ avec le plan (IJK).

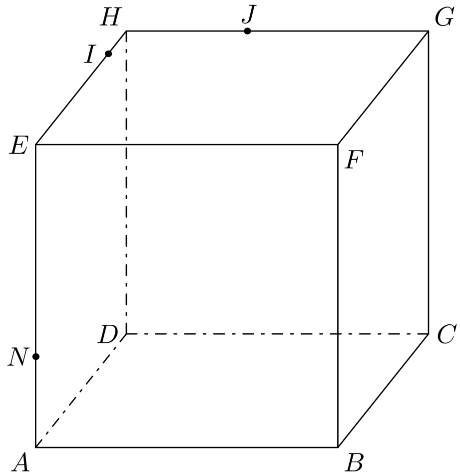
E.19 On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

1. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.
2. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).
3. Construire la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).

E.20 On considère le cube $ABCDEDFGH$ et les trois points I, J, N appartenant respectivement aux arêtes $[EH]$, $[HG]$, $[AE]$; on appelle $(\mathcal{P})$ le plan (IJN) :



1. a. Tracer le plan $(\mathcal{P}')$ passant par J et parallèle au plan (EHD).
   b. Tracer la droite (Δ) d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
   c. Placer le point N' intersection de la droite (Δ) avec le plan (EFB).
   d. En déduire la position du point M, intersection du plan $(\mathcal{P})$ avec la droite (AB).
2. Placer le point L, intersection de la droite (BC) avec le plan $(\mathcal{P})$.
3. Placer le point K, intersection de la droite (CG) avec le plan $(\mathcal{P})$.
4. Tracer la section du plan $\mathcal{P}$ avec le cube.

8. *Exercices non-classés*

E.21 Dans l'espace muni du repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé direct, nous considérons les points A de coordonnées $(0\,;0\,;8)$, B de coordonnées $(0\,;0\,;8)$, C de coordonnées $(4\,;0\,;8)$.

1. a. Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice *(unité graphique : 1 cm)*.
   b. Démontrer que :
      - Les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
      - Les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
      - La droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).
   c. Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre $OABC$.
   d. Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
2. À tout réel k de l'intervalle ouvert $]0\,;8[$, est associé le point $M\,(0\,;0\,;k)$.
   Le plan (π) qui contient M et est orthogonal la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.
   a. Déterminer la nature du quadrilatère $(MNPQ)$.
   b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB)? Pour quelle valeur de k, la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC)?
   c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k, la distance PM est-elle minimale?

