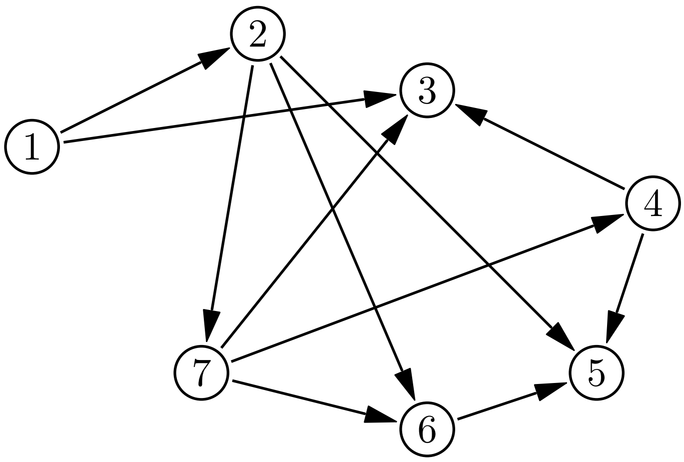
Hors programme lycée / Graphe

ChingEval : 3 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

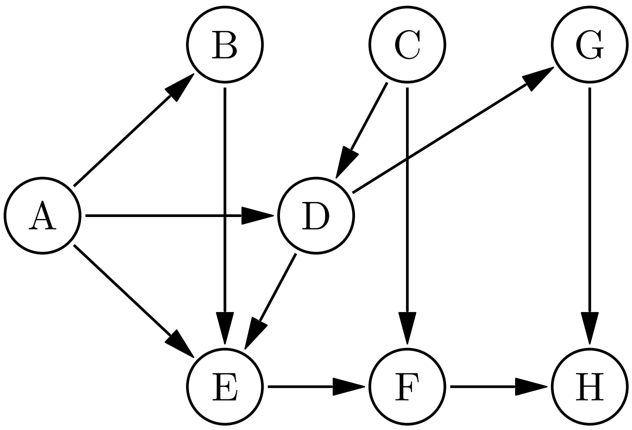
1. *TD 5 L4*

E.1 Pour le graphe G ci-dessous :



1. Déterminer la matrice M associée au graphe G.
2. Déterminer d^+ et d^-.
3. Le graphe est-il sans circuit? Si oui, le partager en niveaux.
4. Donner alors une nouvelle représentation du graphe.

E.2 Pour le graphe G ci-dessous :



1. Déterminer la matrice M associée au graphe G.
2. Déterminer d^+ et d^-.
3. Le graphe est-il sans circuit? Si oui, partager en niveaux.
4. Donner alors une nouvelle représentation du graphe.

E.3 Tracer le graphe de la matrice d'adjacence suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E.4 Tracer le graphe de la matrice d'adjacence suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E.5 On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

1. Construire le graphe où les sommets sont les produits chimiques et où les arêtes représentent les incompatibilités de stockage de ces produits entre eux.
2. Écrire la matrice d'adjacence correspondante.
3. On souhaite utiliser un minimum de wagons pour transporter l'ensemble de ces produits chimiques. Expliquer en quoi l'algorithme de Welsh-Powell permet de répondre à cette question.
4. Appliquer cet algorithme.

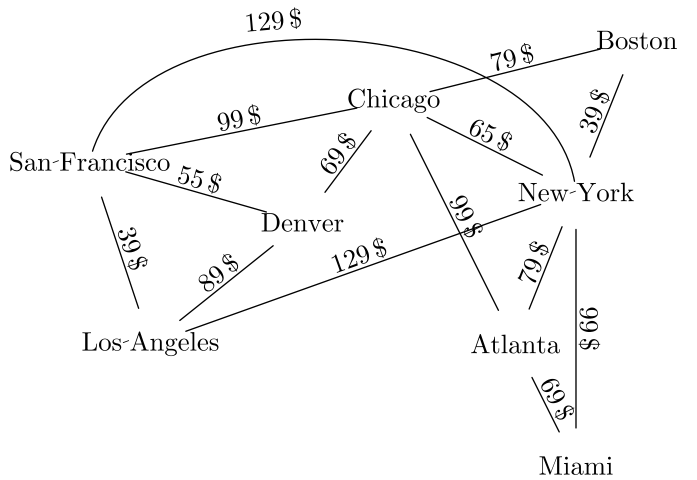
2. *TD 6 L4*

E.6 Des étudiants A, B, C, D, E et F doivent passer des examens dans différentes disciplines, chaque examen occupant une demi-journée :

- Chimie : étudiants A et B.
- Électronique : étudiants C et D.
- Informatique : étudiants C, E, F et G.
- Mathématiques : étudiants A, E, F et H.
- Physique : étudiants B, F, G et H.

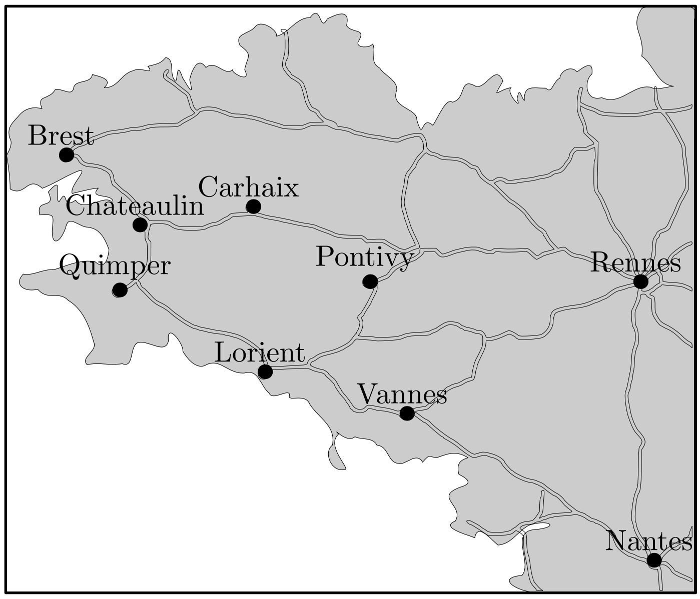
On cherche à organiser la session d'examens la plus courte possible.

E.7 Voici le graphe valué qui modélise un trafic aérien américain.



Quel est le chemin le moins cher pour aller de Miami à Los Angeles?

E.8 Un transporteur veut aller le plus vite possible de Nantes à Brest par la route. Aidez-le à trouver son chemin



	Brest	Carhaix	Chateaulin	Lorient	Nantes	Pontivy	Quimper	Rennes	Vannes
Brest			35						
Carhaix			35	50		60			
Chateaulin	35	35					25		
Lorient		50				45	45		40
Nantes								75	75
Pontivy		60		45				75	45
Quimper			25	45					
Rennes					75	75			70
Vannes				40	75	45		70	

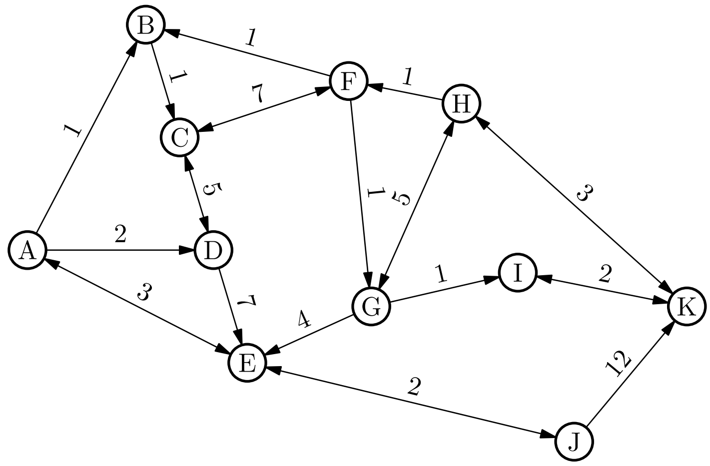
Les nombres indiqués représentent des temps de trajet en min.

E.9 Le gestionnaire d'un aéroport doit évaluer le nombre minimal de pistes de décollage en fonction du type d'avions. La longueur de la piste de décollage de l'avion qui s'y pose.
Pour respecter la réglementation sur les distances de sécurité en fonction de la cadence, certains avions ne peuvent pas se poser sur les mêmes pistes.
Le tableau ci-dessous récapitule ces incompatibilités : une croix représente le fait que ces avions ne peuvent décoller de la même piste.

	A320	A321	B373	A380	A350	B777
A320		×	×		×	×
A321	×		×		×	
B373	×	×			×	
A380					×	×
A350	×	×	×	×		
B777	×			×		

Quel est le nombre minimal de pistes de décollage dont l'aéroport doit se doter?

E.10 Voici le graphe valué qui modélise le plan d'un quartier que droit travers un coursier pour livre un colis en temps minimal de l'entrepôt de départ A au point de livraison K. Chaque sommet représente un croisement et chaque arc une rue. La valeur attribuée à l'arc représente le temps de parcours en minutes.



Quel est le chemin le plus rapide?

3. *TD 7 L4*

E.11 On veut affecter 5 tâches à 5 machines. Les coûts des affectations sont donnés par le tableau suivant :

	machine 1	machine 2	machine 3	machine 4	machine 5
Tâche 1	15	40	5	20	20
Tâche 2	22	33	9	16	20
Tâche 3	40	6	28	0	26
Tâche 4	8	0	7	25	60
Tâche 5	10	10	60	15	5

Rechercher une affectation conduisant à un coût minimum en utilisant l'algorithme hongrois.

E.12 Déterminer par la méthode hongroise une affectation de coût minimal associée à la matrice des coûts suivant :

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

E.13 Résoudre :

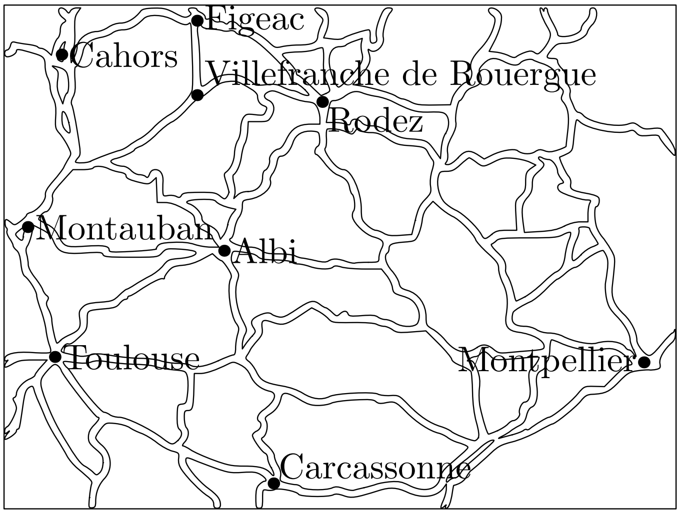
- *max :* $1\,200\cdot x_1 + 1\,000\cdot x_2$
- *sous contrainte :* $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 160 \\ 6x_1 + 3x_2 \leqslant 180 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

Résoudre ce problème graphiquement puis par l'algorithme du simplexe.

E.14 Dans le cadre de sa politique anti-pollution de son entreprise, un transporteur veut aller de Montpellier à Cahors en consommant le moins d'émissions de particules polluantes possibles :

	Montpellier	Rodez	Villefranche de Rouergue	Figeac	Albi	Carcassonne	Toulouse	Montauban	Cahors
Montpellier		135			205	155			
Rodez	135		80	85					
Villefranche de R.		80							55
Figeac		85							55
Albi	205						30		125
Carcassonne	155						95		
Toulouse					30	95		50	
Montauban							50		35
Cahors			55	55	125			35	

Les nombres indiqués représentent les émissions de particules polluantes sur le trajet.



Déterminer le trajet à emprunter par le transporteur.

4. *TD 8 L4*

E.15 Un ouvrier fabrique 2 types d'agenda $Ag1$ et $Ag2$:

Ag1	**Ag2**
1 heure de fabrication	2 heure de fabrication
Coût de fabrication : 3 €	Coût de fabrication : 2 €
Profit : 2 €	Profit : 3 €

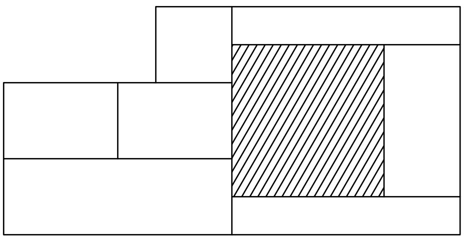
L'ouvrier travaille 8 heures par jour.
L'ouvrier peut investir 12 €/jour pour la fabrication de ses agendas.
Combien faut-il fabriquer d'agenda de chaque type par jour pour maximiser le profit?

E.16 Un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat.
En réserves, il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 ℓ de lait.
Il a deux spécialités : l'oeuf Extra et l'oeuf Sublime.
Un oeuf Extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 ℓ de lait.
Un oeuf Sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 ℓ de lait.

Il fera un profit de 20 euros en vendant un oeuf Extra, et de 30 euros en vendant un oeuf Sublime.
Combien d'oeufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible?

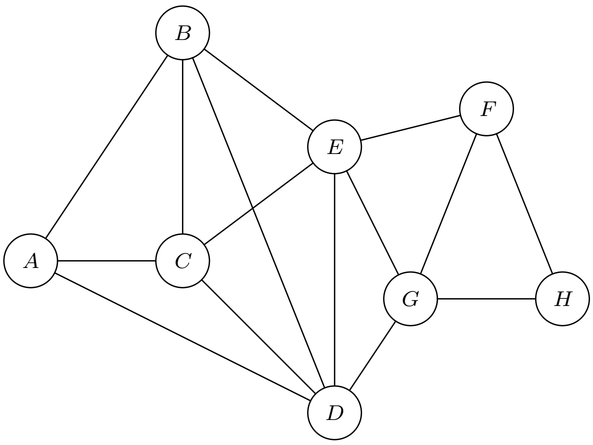
5. *Coloration d'un graphe*

E.17 Ci-dessous sont représentés sept rectangles blancs :



Colorier avec un minimum de couleurs ces sept rectangles.

E.18 Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des "*déchets papier*" ainsi que les trajets possibles entre ces différents points sont représentés par le graphe ci-dessous :



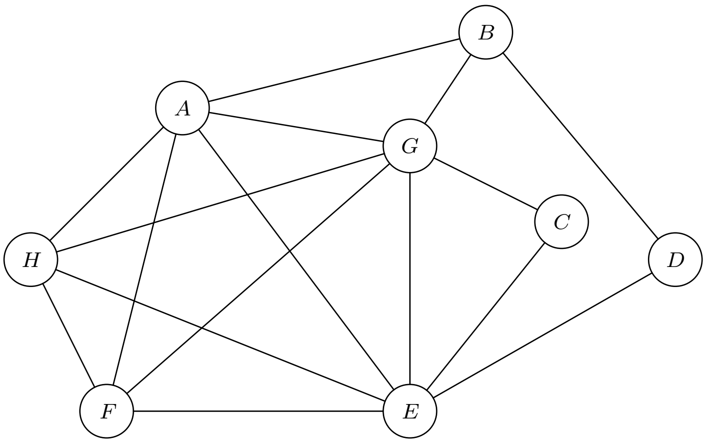
Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.

Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les sommets du graphe représentant son réseau de manière que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

Combien de couleurs au minimum peut-il utiliser?

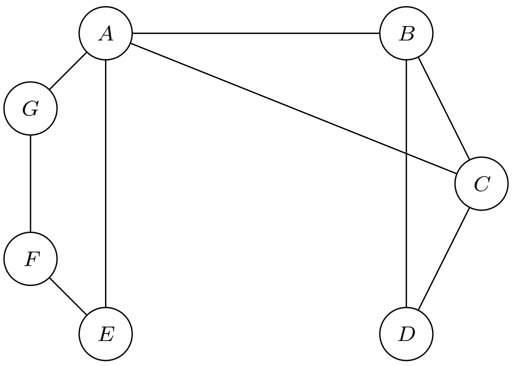
E.19 Une entreprise de produits cosmétique fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.

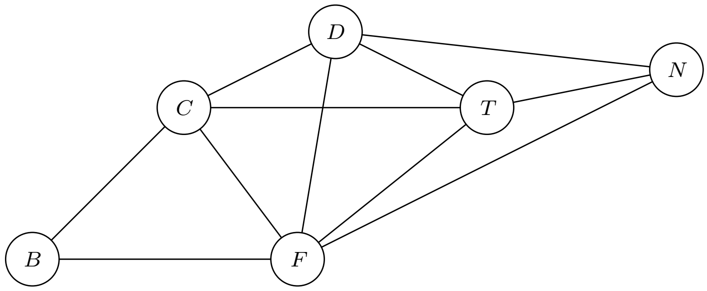


L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat. Combien de lots doit-elle prévoir au minimum? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

E.20 Déterminer le nombre chromatique κ du graphe ci-dessous :



E.21 Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes.
On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1. Recopier et compléter le tableau suivant :

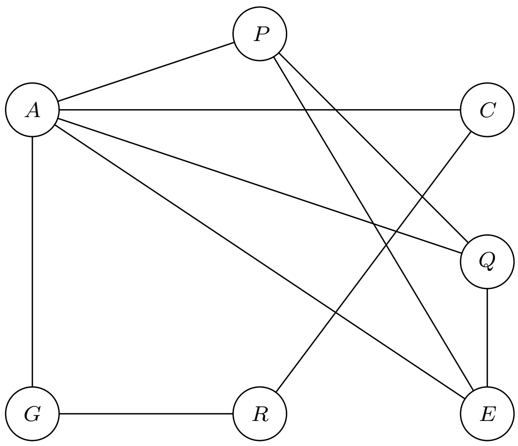
Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

2. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.
   a. Montrer que : $4 \leqslant \leqslant 6$
   b. Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

E.22 À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale.

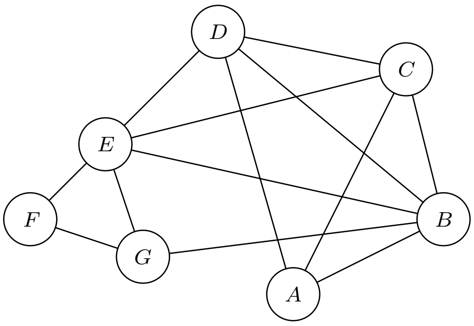
Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent être logés dans le même hôtel.

On donne ci-dessous le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe B



1. Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.
2. Prouver une répartition des supporters par hôtel en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

E.23 Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathcal{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



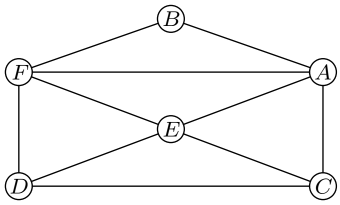
1. Le graphe $\mathcal{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathcal{G}$?
2. a) Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
   Proposer un coloriage adapté à cette condition.
   b) Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathcal{G}$?
3. a) Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?
   b) Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2 ?

6. *Chaine et cycle eulériens*

E.24

On considère le graphe ci-contre :

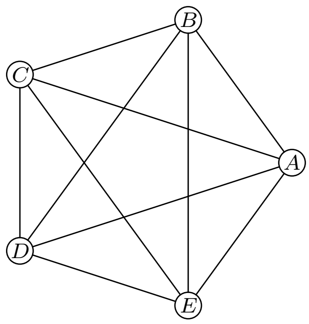
Déterminer une chaîne eulérienne de ce graphe.



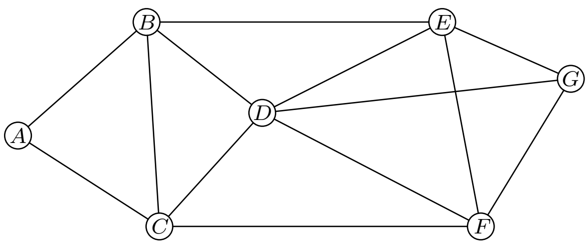
E.25

On considère le graphe ci-contre :

1. Justifier que le graphe est complet.
2. Déterminer un cycle eulérien.



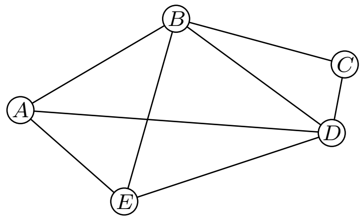
E.26 On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui, donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui, donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe $\mathcal{G}$. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F, G.

E.27 *Parmi les affirmations ci-dessous, lesquelles sont exactes. Les réponses doivent être justifiées.*

On considère le graphe $\mathcal{G}$ représenté ci-dessous :



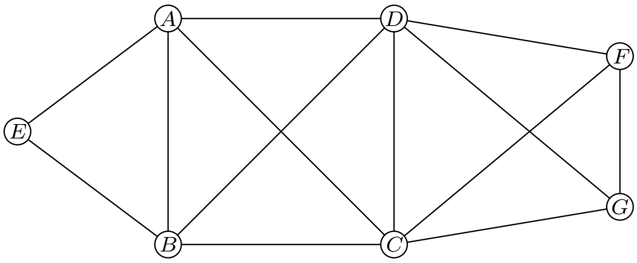
1. Le graphe $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne.
2. Le graphe $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien.
3. Le graphe $\mathcal{G}$ est complet.
4. Le graphe $\mathcal{G}$ le graphe admet un sous-graphe stable d'ordre 4.
5. Le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas connexe.

E.28 Soit M la matrice carrée d'ordre 5 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Construire le graphe associé à M. On appellera A, B, C, D, E les sommets.
   Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ?
2. Existe-t-il une chaîne eulérienne ?
   Existe-t-il un cycle eulérien ?

E.29 L'objet d'étude est le réseau des égouts d'une ville. Ce réseau est modélisé par le graphe ci-dessous : les sommets représentent les stations et les arêtes, les canalisations.



Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne?

E.30 On considère le graphe non orienté $\mathcal{G}$ de sommets A, B, C, D, E dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

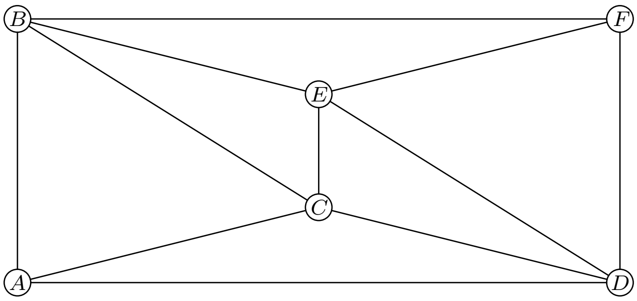
Trois propositions sont proposées ci-dessous et parmi elles, une seule est exacte. Laquelle ?

a) Le graphe $\mathcal{G}$ comporte 12 arêtes.

b) Le graphe $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne.

c) Le graphe $\mathcal{G}$ est complet.

E.31 On considère le graphe $\mathcal{G}$ suivant :

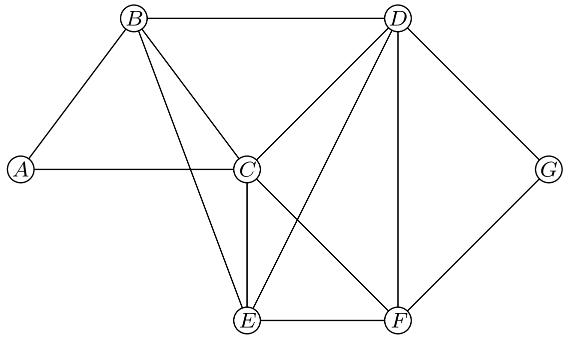


1) Le graphe $\mathcal{G}$ est-il connexe? Expliquer la réponse.

2) Le graphe $\mathcal{G}$ admet-il des chaînes eulériennes? Si oui, préciser une.

3) Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe $\mathcal{G}$. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien?

E.32 Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville.
Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques. Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements.



On s'intéresse au graphe non pondéré.

Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :

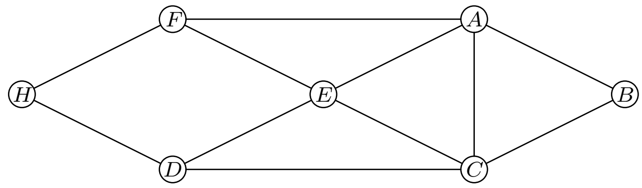
a) Ce graphe est-il connexe?

b) Ce graphe est-il complet?

c) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne?

d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien?

E.33 On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC *(Maison de la Jeunesse et de la Culture)* par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages *(portes, couloirs ou escaliers)* entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.



En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle *(bureau du directeur et hall inclus)* les objets oubliés par les enfants.

1) Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.

2) Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.

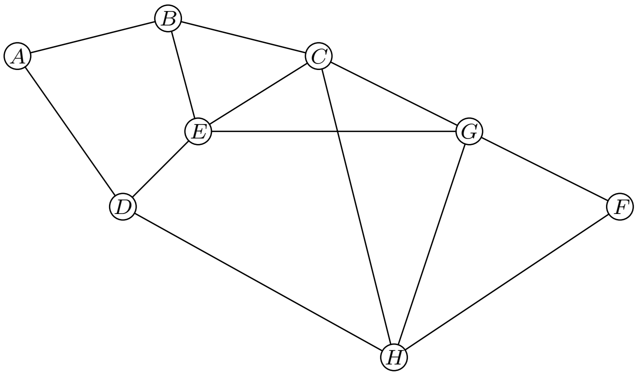
3) On range les sommets par ordre alphabétique.
Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.

4) On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.

E.34 Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes *(une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête)*:



① Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
  ⓐ complet ⓑ connexe

② ⓐ Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.

ⓑ Citer un trajet de ce type.

③ On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ *(les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique)*.

ⓐ Déterminer la matrice M.

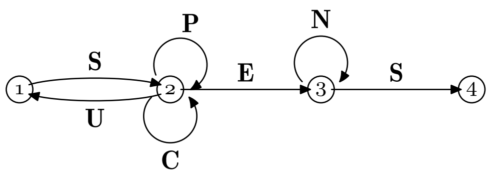
ⓑ On donne la matrice :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
Préciser ces chemins.

7. *Graphe étiqueté*

E.35 Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, ne partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes *SES* et *SPPCES* sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes *SUN* et *SPEN*.

① Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le *(ou les)* code*(s)* reconnu*(s)* par le graphe.

SUCCES ; *SCENES* ; *SUSPENS*

② Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre $1-2-3-4$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

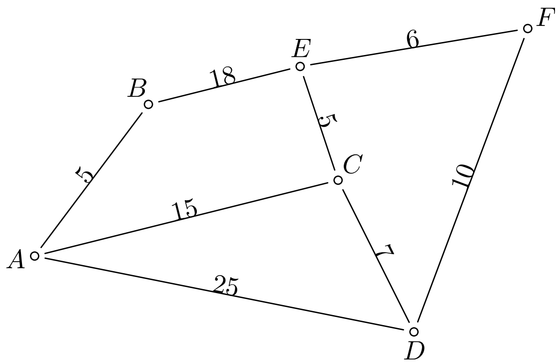
③ Avec une calculatrice, on a calculé :

$$A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes?

8. *Algorithme de Dijkstra*

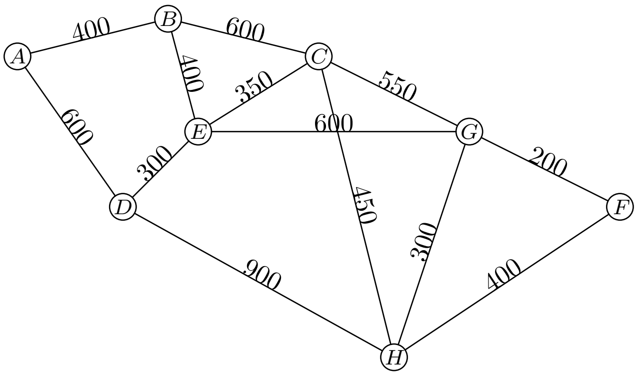
E.36 On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous où sont indiqués sur chacune des arêtes le temps de parcours, en minutes, pour relier deux sommets de ce graphe.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet A au sommet F en un temps minimal.

E.37 Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes *(une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête)*:

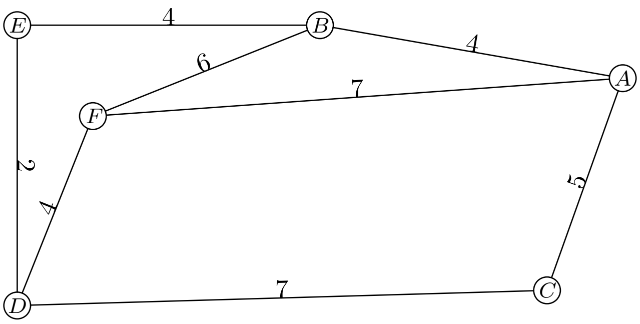
Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A.
Le graphe $\mathcal{G}$ indique les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.

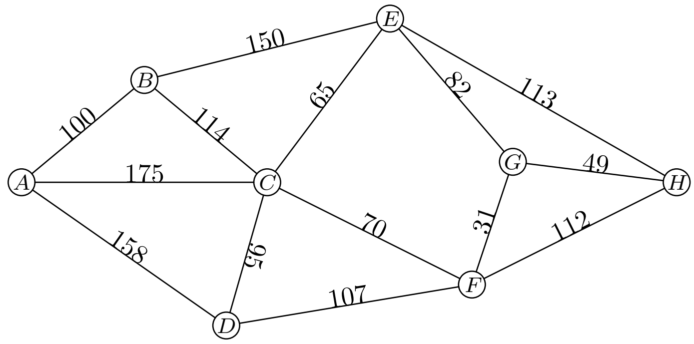
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

E.38 On considère le graphe ci-dessous où sont indiquées les durées de parcours pour chacune d'elles.



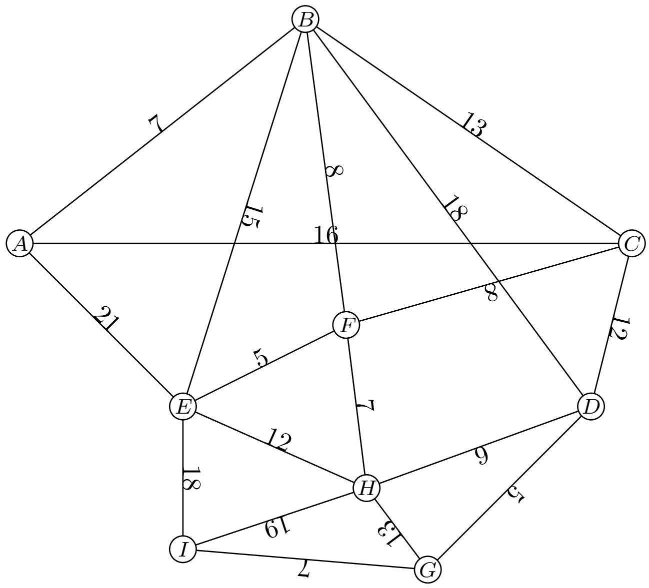
Déterminer la chaîne la plus courte reliant les sommets A et D.

E.39 Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notée B, C, D, E, F et G et les deux sites, A et H.



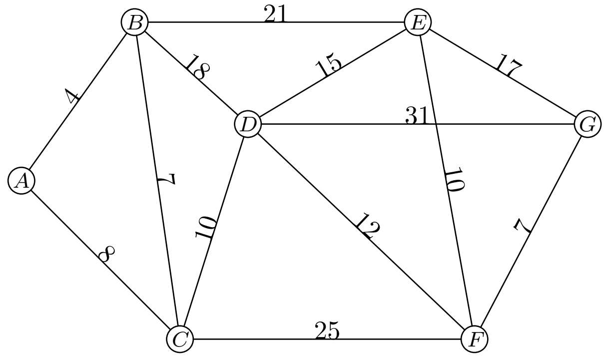
Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.

E.40 Une partie d'un domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



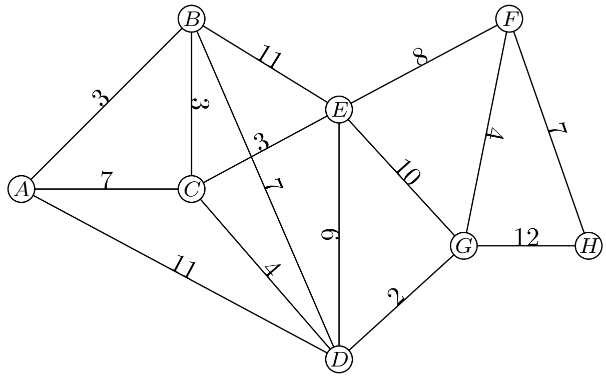
Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

E.41 ⚠ Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.
Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours *(correspondance comprise)* en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin?

E.42 Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des "*déchet papier*" ainsi que le temps de trajet *(en minutes)* entre ces différents points, sont représentés par le graphe ci-dessous. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.

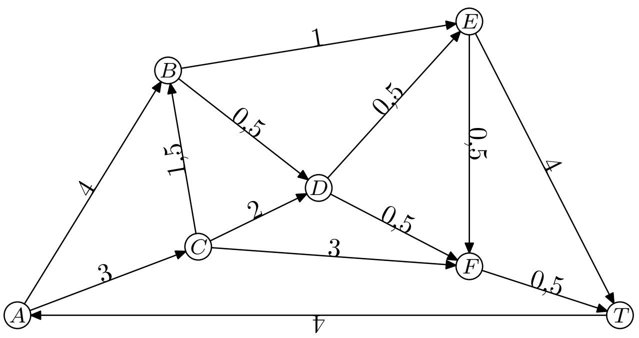


Le conducteur doit se rendre du dépôt A au point de collecte H. Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer ce chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.

9. *Algorithme de Dijkstra présentant des égalités de chemins*

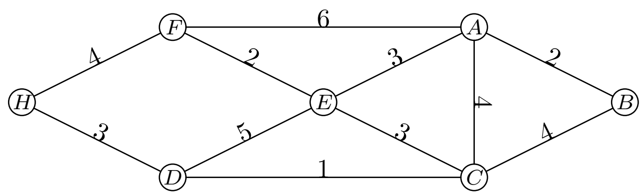
E.43 ⚠ Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.
Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation *(les "taxiways")* et les sommets du graphe sont les intersections.

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1. a. Écrire la matrice M associée à ce graphe *(ranger les sommets dans l'ordre alphabétique)*
   b. Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.
2. L'avion qui a atterri en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.
   Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

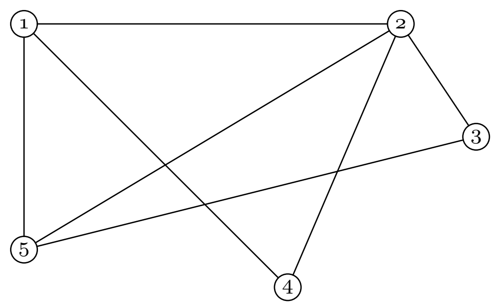
E.44 On considère le graphe ci-dessous :



Quel est le chemin le plus court pour relier le sommet B au sommet H?

10. *Annales*

E.45 ⚠ Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1 L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.
Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

2 On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

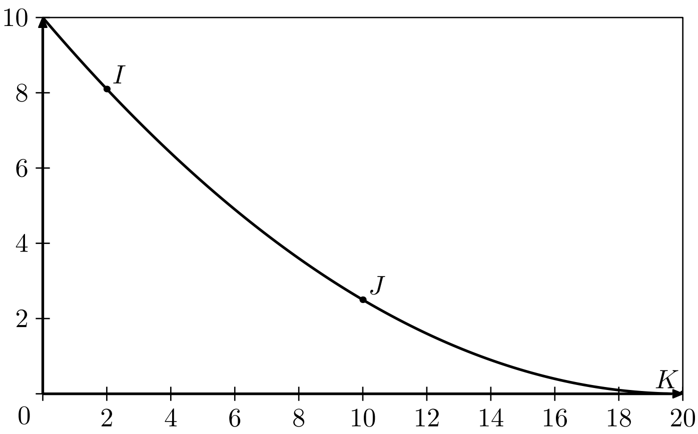
a Écrire la matrice M.

b On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des "*itinéraires express*" qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.
Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre d'"*itinéraires express*" réalisables.
(On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

3 Pour terminer ces "*itinéraires express*", on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.
La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives $(2\,;8{,}1)$, $(10\,;2{,}5)$ et $(20\,;0)$.

La fonction f est définie sur $[0\,;20]$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$
où a, b et c sont trois nombres réels.

a Justifier que a, b et c sont solutions du système :

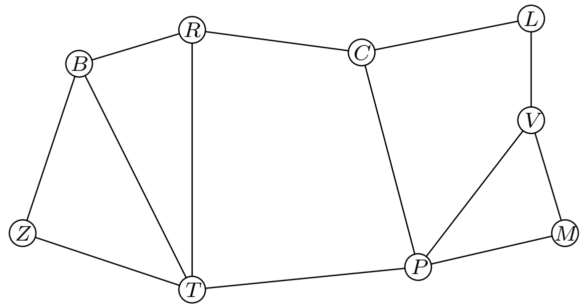
$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 2{,}5 \\ 4a + 2b + c = 8{,}1 \end{cases}$$

b Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soir équivalent à :

$$U\cdot X = V \quad \text{où } U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c Déterminer a, b et c.

E.46 Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).



1 Pour cette question, on justifiera chaque réponse

a Déterminer l'ordre du graphe.

b Déterminer si le graphe est connexe.

c Déterminer si le graphe est complet.

2 Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

3 Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.
On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.

Voici les matrices N et N^3 :

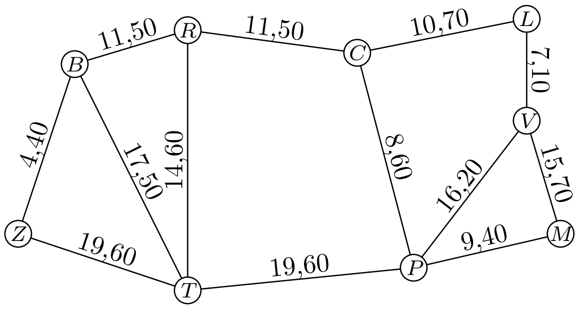
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4.

b En donner une interprétation.

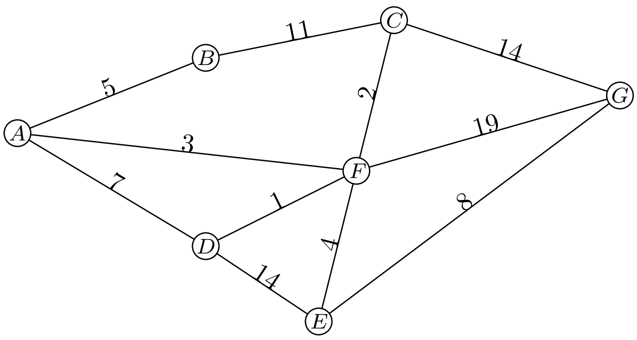
4 Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



(a) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.

(b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

E.47 Dans le jeu "*Save the princess*", l'objectif est d'aller délivrer une princesse tout en récoltant des trésors situés dans les couloirs du château.
Le plan du château est représenté par le graphe pondéré ci-dessous. Les sommets de ce graphe représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs reliant les salles entre elles.



Partie A

(1) Le joueur se trouve dans la salle A. Il décide de visiter chacun des couloirs afin de trouver le plus de trésors possibles. Peut-il trouver un trajet lui permettant de passer par tous les couloirs une et une seule fois? Justifier la réponse.

(2) Dans chaque couloir se trouve un certain nombre de monstres. Les étiquettes du graphe pondéré donnent le nombre de monstres présents dans les couloirs.
Le joueur souhaite, en partant de A, rejoindre la princesse enfermée dans la salle G. Déterminer le chemin qu'il doit prendre pour délivrer la princesse en combattant le moins de monstres possible.
Combien de monstres aurait-il alors à affronter?

Partie B

Pour un joueur régulier, on estime que :

- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0,7 ;
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est 0,6.

On note $P_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste lors de la n-ième partie où u_n désigne la probabilité que la partie soit gagnée et v_n celle que la partie soit perdue.

(1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On nommera les sommets U *(pour la partie gagnée)* et V *(pour la partie perdue)*.

(2) En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre U, V.

(3) On suppose la première partie perdue, l'état probabiliste initial est donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la probabilité que le joueur gagne la 3^e partie est 0,52.

(4) Déterminer la probabilité que le joueur gagne la 15^e partie.
Arrondir le résultat au centième.