Hors programme lycée / Logique et paradoxe

1. Exercices non-classés

E.1 Dans chaque ligne, reconstruire si possible la phrase à l'aide de :
(Si … alors …) ou (… si, et seulement si, …)

A_1 Il pleut	A_2 Je prends mon parapluie
B_1 I milieu de $[AB]$	B_2 $AI = BI$
C_1 $a \geqslant b$	C_2 $a - b \geqslant 0$
D_1 $a < 3$	D_2 $a < 5$
E_1 $a \geqslant b$	E_2 $a^2 \geqslant b^2$
F_1 $a = 2$	F_2 $a^2 = 4$ et $a > 0$
G_1 $AB = AC$	G_2 ABC est isocèle
H_1 $\sqrt{a}$ existe	H_2 $a \in \mathbb{R}_+$

E.2 Pour chacun des couples de propositions suivantes, dîtes si :

- A est nécessaire pour B
- A est suffisant pour B
- A est équivalent à B

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
1	Le triangle ABC est rectangle	$AB^2 = AC^2 + BC^2$
2	$2x + 5 = 3$	$x = -1$
3	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$	I milieu de $[AB]$
4	$x \geqslant 0$	$x \geqslant 3$
5	$a = 5$	$a^2 = 25$

E.3 Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

a. Si $x < 2$ alors $x < 3$
b. Si $x < 3$ alors $x < 2$
c. Si $x \leqslant 3$ alors $x < 3$
d. Si $x < 3$ alors $x \leqslant 3$
e. Si $x = 2$ alors $2x + 3 = 7$
f. Si $2x + 3 = 7$ alors $x = 2$
g. Si $2x - 5$ alors $x < 3$
h. Si $x < 3$ alors $2x - 5 < 2$

E.4

1. En remarquant que $10x = 9x + x$, montrer que la propriété "10^n+1 *est multiple de 9*", dépendant de n, est héréditaire.
2. Pour autant, justifier que cette propriété est toujours fausse?

E.5

1. On dispose de deux galettes de riz de forme carré : la première a pour côté 10 cm et la seconde 15 cm. On souhaite fabriquer deux galettes ayant même côté dont la somme de leurs aires vaut la somme des deux premières galettes. Quel est cette longueur?
2. Supposons maintenant que les deux galettes est respectivement pour longueur de leurs côtés a et b. Établir alors qu'une galette moyenne aura pour côté :
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

E.6 Une entreprise de recyclage récupère un lot de digicodes ayant tous un clavier identique à celui représenté ci-contre.
Chacun de ces digicodes a été programmé pour fonctionner avec un code constitué de deux signes choisis parmi les douze figurant sur ce clavier.

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	A	B

Par exemple $A0$, BB, 43 sont des codes possibles.
Pour remettre en état de fonctionnement un tel digicode, il faut retrouver son code.

Pour faciliter une telle recherche, a été inscrit sur le boîtier de chaque digicode un nombre R qui dépend du code. Ce nombre a été obtenu de la manière suivante :

- Le code est considéré comme un nombre écrit en base 12 : A est le chiffre dix et B le chiffre 11.
- Le nombre R inscrit sur le boîtier est le reste de la division euclidienne du code, converti en base 10, par 53. R est donc un nombre écrit en base 10 et tel que $0 \leqslant R \leqslant 53$.

1. Combien y a-t-il de codes possibles?
2. On suppose que le code d'un digicode est AB.
   a. Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture en base 12 et $(AB)_{\text{douze}}$.
   b. Déterminer le nombre R inscrit sur le boîtier de ce digicode.
3. Sur le boîtier d'un digicode est inscrit le nombre R égal à 25. Démontrer que $(21)_{\text{douze}}$ peut être le code de ce digicode.
4. On considère la fonction `f`, extrait d'un algorithme, où l'argument `R` est un entier naturel :

```
Fonction f(R)
    L ← liste vide
    n ← 0
    Tant que  53n+R⩽ 143
        Ajouter la valeur de  53n+R
                en fin de la liste L
        n ←  n+1
    Fin Tant que
    Renvoyer L
```

a) Quelle est la liste renvoyée par la fonction `f` lorsque la fonction `f` est appelée avec pour argument la valeur `R`$=25$?

b) On suppose que le nombre R inscrit sur le boîtier d'un digicode est 25.
Quels sont les trois codes possibles de ce digicode?

5) Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Si l'affirmation est considérée comme étant fausse, en apporter la preuve.
Affirmation : quelle que soit la valeur de R la fonction `f` permet de trouver trois codes parmi lesquels se trouve le code secret.