

Hors programme lycée / Matrice

1. Formule du binôme de Newton

E.1 On considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 Déterminer pour tout entier naturel, l'expression des puissances I^n et A^n .
- 2 En déduire l'expression de la matrice $(I+A)^5$.

E.2 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n .

- 1 On considère la matrice B définie par $B = A - I_3$. Donner l'expression de B^2 et B^3 .
- 2
 - a Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I_3+B)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.
 - b Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = \binom{n}{0} \cdot I_3 + \binom{n}{1} \cdot B + \binom{n}{2} \cdot B^2$$

E.3 On considère les deux matrices A et D définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n .

- 1 On considère la matrice B définie par $B = A - D$. Donner l'expression de B^2 et B^3 .
- 2
 - a Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(D+B)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.
 - b Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = (-1)^n \cdot \binom{n}{0} \cdot I_3 + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{1} \cdot B + (-1)^{n-2} \cdot \binom{n}{2} \cdot B^2$$

E.4 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1 Écrire la matrice A sous la forme $B+C$ où B est une matrice diagonale carrée.
- 2
 - a Pour tout entier n , donner l'expression de C^n .
 - b Vérifier que les matrices B et C sont commutatives.
 - c Établir l'égalité suivante pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$A^n = B^n + n \cdot C \cdot B^n + \binom{n}{2} \cdot C^2 \cdot B^{n-2}$$

2. Formule du binôme de Newton et suites

E.5 Considérons la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1 On considère la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = 0$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Établir que pour tout entier n , on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2 On considère les deux matrices D et S définies par :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a Montrer que : $D \cdot S = S \cdot D$.
- b Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $S^k = 0_3$.
- c À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel non-nul.

3 En déduire la formule explicite de la suite (u_n) .

3. Matrices et nombres complexes

E.6 On considère la matrice carrée A d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

où i est le nombre complexe vérifiant : $i^2 = -1$.

4. Matrice diagonalisable

E.7 On considère les matrices A et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1 Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1} .
- 2 a Établir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité :
 $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$
- b À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n , on a l'égalité :
 $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
- c En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n .

E.8 On considère les matrices A et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1 Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1} .
- 2 a Établir l'égalité suivante :
 $A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$
- b En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n .

- 1 Montrer que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.
- 2 Montrer que la matrice $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. On note D cette matrice diagonale dans le reste de l'exercice.
- 3 a Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :
 $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
- b Justifier que pour tout entier n , on a la relation
 $A^{n+4} = A^n$

E.9 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

- 1 Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.
- 2 On note D la matrice définie par : $I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- a Établir l'égalité : $A = P \cdot D \cdot Q$
- b Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :
 $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$
- c En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n .

E.10 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -7 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1 Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2 Établir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité :
 $A = P \cdot D \cdot Q$

et admettant pour expression :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b, c \text{ sont trois réels.}$$

3 a À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n , on a l'égalité :
 $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

b En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n .

E.11 On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n .

Pour cela, on considère les deux matrices carrées P et Q :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2 Établir l'égalité : $A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot Q$

$$\text{On note } D \text{ la matrice : } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 a Donner l'expression de la matrice D^n où n est un entier naturel.

b Établir pour tout entier naturel n , l'égalité :
 $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

c Donner l'expression de A^n en fonction de n .

E.12 On considère les deux matrices de dimensions 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1 a Justifier que la matrice P est une matrice inversible.

b Donner l'expression de la matrice P^{-1} inverse de la matrice P .

2 Déterminer la valeur des réels α et β réalisant l'égalité suivante :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

3 a À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$A^n = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

b Donner l'expression de A^n en fonction de n .

E.13 On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1 a Justifier que la matrice P est inversible et donner l'expression de la matrice inverse de P .

b Notons $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Montrer que la matrice D est diagonale.

2 a À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

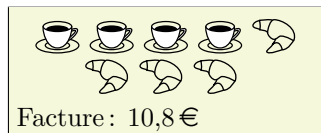
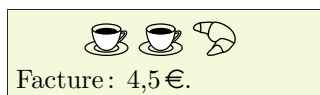
$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

b Donner l'expression de la matrice A^n en fonction de l'entier naturel non-nul n .

5. Rappels sur les systèmes

E.14

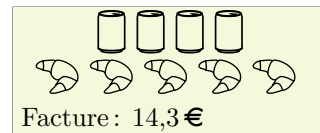
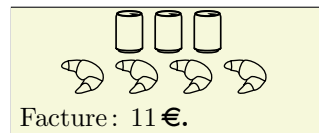
Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'un café?

E.15

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'une canette?

E.16

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Quels sont les prix, dans ce café, d'un café et d'une canette?

E.17

- 1 Résoudre par la méthode de combinaisons linéaires le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

- 2 Résoudre par la méthode de la substitution le système suivant :

$$(T) : \begin{cases} 3x + y = 16 \\ 8x - 5y = 12 \end{cases}$$

E.18 On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + y = -7 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

6. Exercices non-classés

E.19 On considère un processus évolutif admettant la matrice de transition suivante :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

- 1 On considère la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a Montrer que la matrice P est une matrice inversible et déterminer l'expression de sa matrice inverse.
- b Déterminer l'existence d'une matrice D diagonale vérifiant l'égalité : $T = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
- c Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$T^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}.$$

- d En déduire l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n .

- 2 On considère les deux suites (a_n) et (b_n) de premiers termes respectifs a_0 et b_0 et vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

- a À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = T^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

- b Déterminer une expression des termes de ces deux suites en fonction de n , a_0 et b_0 .
- c En déduire la limite de ces deux suites.