Hors programme lycée / Probabilité

1. *Dénombrement et équiprobabilité*

E.1 Un jeu consiste à cocher 8 cases sur une grille de A *(n° 1 à 20)* et 1 case sur une grille B *(n° 1 à 4)*

Grille A				
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Grille B			
1	2	3	4

"Les résultats des calculs de probabilité seront donnés à 0,0001 près"

1. Déterminer le nombre de façons possibles de cocher 8 cases dans la grille A.

   Un tirage détermine 8 "*bons numéros*" dans la grille A et 1 "*bon numéro*" dans la grille B.

2. **Cas 1** : le joueur récupère sa mise lorsqu'il a coché 4 "*bons numéros*" dans la grille A et 1 "*bons numéros*" dans la grille B.
   a. Combien de grilles cochées A comportent 4 "*bons numéros*" et 4 "*(mauvais numéros)*" ? En déduire la probabilité de cocher 4 "*bons numéros*" dans la grille A.
   b. Déterminer la probabilité de cocher le "*bons numéros*" dans la grille B.
   c. En déduire que la probabilité que le joueur récupère sa mise est de $0{,}068\,8$.

3. **Cas 2** : Le joueur gagne s'il a coché 5, 6, 7 et 8 "*bons numéros*" dans la grille *(avec ou sans le numéro gagnant de la grille B)*.
   a. Combien de grilles cochées A comportent 5 "*bons numéros*" et 3 "*(mauvais numéros*" ?
   b. En déduire la probabilité de cocher 5 "*bons numéros*" dans la grille A.

4. On admet que la probabilité d'être gagnant est de $\dfrac{2}{11}$. Un joueur décide de jouer les mêmes numéros sur 4 tirages consécutifs. Déterminer la probabilité que ce joueur soit gagnant 2 fois sur les 4 tirages.

E.2

Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   - A : "*La carte tirée est un pique*" ;
   - B : "*La carte tirée est une figure*" ;
   - C : "*La carte tirée est noire*" ;
   - D : "*La carte tirée est le valet*" ;

2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

   a. $A\cap B$ b. $A\cap C$ c. $A\cup B$ d. $B\cup C$

   e. $C\cap D$ f. $C\cup D$ g. $C\cap\overline{D}$ h. $\overline{C}\cup\overline{D}$

E.3

On considère un jeu de 32 cartes et on demande à une personne de tirée une carte au hasard dans ce jeu.
On considère les événements suivants :
- R : "*la carte tirée est un roi*" ;
- C : "*la carte tirée est un coeur*" ;
- N : "*la carte tirée est de couleur noire*".

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

1. Déterminer la probabilité des événements R, C et N.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   a. $C\cap R$ b. $\overline{R}\cap C$ c. $R\cup\overline{N}$

E.4

On considère un jeu de 32 cartes représenté ci-contre. On tire au hasard une carte dans ce jeu et on considère les événements ci-dessous :
- A : "*la carte tirée est un carreau*"
- B : "*La carte tirée est une figure*"
- C : "*La carte tirée porte le nombre 8 ou 9*"

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

Déterminer les probabilités ci-dessous :

a. $\mathcal{P}(\overline{C})$ b. $\mathcal{P}(A\cap C)$

c. $\mathcal{P}(A\cup\overline{B})$ d. $\mathcal{P}(B\cap\overline{C})$

E.5 **Partie A.**

1. Déterminer les 20 diviseurs positifs de 240.

2. Dans le tableau ci-dessous, parmi ces 20 entiers rangés dans l'ordre croissant, on a coché les multiples de 10.

   Reproduire et compléter le tableau, en cochant les multiples de 2 et de 5.

Diviseurs de 240								10				20		30	40		60	80	120	240
Multiples de 10								×				×		×	×		×	×	×	×
Diviseurs de 2																				
Diviseurs de 5																				

Partie B.

On étudie l'épreuve aléatoire qui consiste à tirer au hasard un nombre parmi les 20 diviseurs de 240.

1. Quelle est la probabilité de tirer le nombre 2? le nombre 7?

2. On considère les événements suivants :
   - A : "On tire un multiple de 10"
   - B : "On tire un multiple de 2"
   - C : "On tire un multiple de 5"

   Déterminer les probabilités $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(C)$ des événements A, B, C.

3. On refait cette épreuve aléatoire quatre fois de suite dans les mêmes conditions.
   a. Quelle est la probabilité de tirer 4 fois de suite un multiple de 10?
   b. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer un multiple de 10?
   c. Quelle est la probabilité de tirer au moins une fois un multiple de 10?
   d. Pour tout naturel n compris entre 1 et 4, on note A_n l'événement :
   "*Obtenir un multiple de 10 pour la première fois au n-ième tirage*"
   Calculer les probabilités $\mathcal{P}(A_2)$, $\mathcal{P}(A_3)$ et $\mathcal{P}(A_4)$ des événements A_2, A_x, A_4.

E.6 Le tableau ci-dessous donne, d'après un échantillon de 800 personnes interrogés en 2005, un aperçu de la lecture de la presse quotidienne en France.

	Tous les jours ou presque	Une ou deux fois par semaine	Seulement pendant certaines périodes	Rarement	Jamais	Total
Agriculteurs exploitants	1	10	2	8	79	100
Artisans, commerçants , chefs d'entreprise	11	11	5	7	66	100
Cadres	17	16	10	18	39	100
Professions intermédiaires	8	15	7	15	55	100
Employés	6	7	4	9	74	100
Ouvriers (y compris agricoles)	4	5	3	5	83	100
Retraités	6	7	2	6	79	100
Autres inactifs	5	9	4	9	73	100
Total en effectif	58	80	37	77	548	800
Pourcentages du total	7,25 %	10 %	4,625 %			

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale et éventuellement arrondis à 0,001 *près.*

Partie A.

1. La dernière ligne du tableau ci-dessous représente la part de chaque catégorie par rapport à l'échantillon total. Calculer les valeurs manquantes de cette dernière ligne.

2. Donner la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les cadres ne lise jamais.

Partie B.

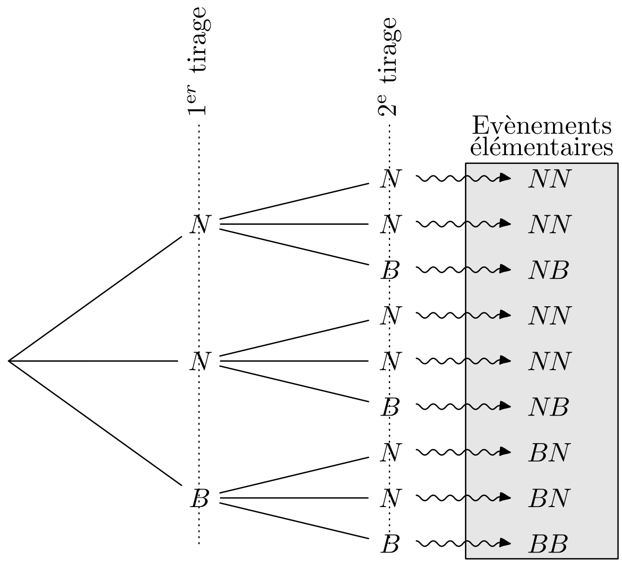
On choisit au hasard une personne dans cet échantillon de 800 personnes. Dans cette partie, on note les événements suivants :

- J l'événement : "*la personne choisie ne lit jamais*" ;
- O l'événement : "*la personne choisie est un ouvrier*".

1. Calculer les probabilités des événements J et O.
2. Calculer la probabilité de l'événement $J \cap O$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $J \cup O$

E.7 Une urne contient deux boules noires et une boule blanche ; le jeu se fait avec remise de la boule tirée : c'est-à-dire qu'une fois tirée, la boule est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.

Voici un arbre de décision basée sur le tirage de deux boules :



1. En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents?
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   a. A : "*La première boule tirée est blanche*".
   b. B : "*Les deux boules tirées sont de couleurs différents*".
   c. C : "*La seconde boule est une boule noire*".
3. Donner les probabilités des événements suivants :

   a. $A\cap B$ b. $\overline{B}$ c. $\overline{C}$

2. *Adequation d'une loi de probabilité*

E.8 Une étude s'intéresse aux achats faits par des internautes par intermédiaire d'internet. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

1. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :
$$d^2 = \sum_{k=1}^{k=3}\Big(f_k - \frac{1}{3}\Big)^2.$$
Calculer d^2 puis $1000{\cdot}d^2$.
2. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi $\{1\,;\,2\,;\,3\}$ avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations, on obtient une valeur de $1000{\cdot}d^2$. Voici les résultats :

Min.	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Max.
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,5104	5,925 6

Au risque de 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable.

E.9 On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier ; on souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

Face i	1	2	3	4
Effectif n_i	34	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel :
$$\sum_{i=1}^{4}\Big(f_i - \frac{1}{4}\Big)^2$$

On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule :

$$d^2 = \sum_{i=1}^{4}\Big(F_i - \frac{1}{4}\Big)^2$$

où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9e décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égale à 0,009 8.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré?

E.10 On décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela, il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

1. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

2. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)$. Calculer d^2.

3. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Min.	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Max.
0,00124	0,00192	0,00235	0,00281	0,00345	0,00452	0,01015

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé 7.

E.11

1. Les 1000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234
8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964
4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914
5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737
2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367
8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943
3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480
7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129
8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986
0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320
0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721
4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354
2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605
1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599
0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017
1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035
9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781
8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4
Occurences	93	116	102	102	94

Valeurs	5	6	7	8	9
Occurences	97	94	95	101	106

Avec un tableau, on a simulé 1000 expériences de 1000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9}\left(f_k - 0{,}1\right)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.

On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile *(d_1 et d_9)*, le premier et troisième quartile *(Q_1 et Q_3)* et la médiane *(Me))* :

$d_1 = 0{,}000\,422$; $Q_1 = 0{,}000\,582$; $M_e = 0{,}000\,822$

$Q_3 = 0{,}00\,1136$; $d_9 = 0{,}00145$

En effectuant le calcul de d^2 sur la série des 1000 premières décimales de π, on obtient :

(a) 0,000 456 (b) 0,004 56 (c) 0,000 314

2. Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse?

(a) Oui (b) Non (c) Il ne peut pas conclure

3. Autres tirages : successifs avec remise

E.12 On dispose de 26 cartes où sont écrites les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et avec remise trois cartes de ce jeu. On suppose les différents tirages indépendants entre eux.

1. Combien de mots de trois lettres peut-on ainsi former?

2. (a) Déterminer la probabilité de l'événement :
A_1 : "Le mot commence par la lettre B".

(b) Déterminer la probabilité de l'événement :
A_2 : "La seconde lettre du mot est la lettre B".

3. (a) Déterminer la probabilité de l'événement :
B_1 : "La première lettre du mot est la seule lettre B"

(b) Quelle est la probabilité de l'événement :
C : "Le mot contient une seule fois la lettre B".

4. Autres tirages : successifs sans remise

E.13 Un bibliothécaire souhaite ranger, à sa place, une encyclopédie en quatre volumes. Pour cela, il tire successivement les volumes de son chariot et les ordonne dans ce sens. À la fin de ce rangement aléatoire, il regarde sa composition :

1. Quelle est la probabilité de l'événement :
   A : "*Le volume 1 se trouve à sa place*" ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement :
   B : "*Le volume 2 se trouve à sa place*" ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement :
   C : "*Les quatre volumes sont parfaitement ordonnés*" ?

5. *Autres tirages : simultanés*

E.14

Indication : on donnera les valeurs exactes sous forme de fraction, ainsi que les valeurs arrondies à 10^{-3} près.

Un enfant met 10 billes rouges et 3 billes vertes dans une boîte cubique.

Dans ce jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
2. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$.

E.15 Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac

1. On note A l'événement "*obtenir deux jetons blancs*".

   Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.
2. On note B l'événement "*obtenir deux jetons portant des numéros impairs*".

   Calculer la probabilité de B.
3. Les événements A et B sont-ils indépendants?

E.16 Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

6. *Autres tirages*

E.17 Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un entier pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle :

- N l'événement : "*la boule noire figure parmi les boules tirées*" ;
- G l'événement : "*le joueur gagne*".

1. Déterminer la probabilité de l'événement N.
2. Démontrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\dfrac{3}{10}$. On pourra s'aide d'un arbre pondéré.
3. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire?

E.18 *Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; indiquer, sans justification, l'unique réponse exacte.*

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires.

1. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

   $$\frac{21}{40} \quad ; \quad \frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}$$
2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égales à :

   $$\frac{3^3\times7^2}{10^5} \quad ; \quad \binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^3 \quad ; \quad \binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$$
3. De la même urne, On tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique *(dont les faces sont numérotées de* 1 *à* 6*)*. Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique *(dont les faces sont numérotées de* 1 *à* 4*)*. On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.

   Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

   $$\frac{7}{60} \quad ; \quad \frac{14}{23} \quad ; \quad \frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$$

E.19 Un groupe d'amis possède un jeu de 32 cartes. Il joue par trois fois aux cartes en changeant les règles du jeu.

On considère les événements suivants :

- A : "*les deux premières cartes tirées sont des as*" ;
- B : "*on tire dans cet ordre un valet, un roi, une dame*" ;
- C : "*la dernière carte tirée est un pique*".

1. Les joueurs décident de tirer successivement et avec remise trois cartes du jeu. Déterminer les probabilités des événements A, B et C.
2. Maintenant, ils jouent en tirant trois cartes successivement et sans remise. Déterminer les probabilités des événements A, B, C.

On considère les événements suivants :

- D : "*deux des cartes tirées sont des as*" ;
- E : "*on a tiré un valet, un roi, une dame*" ;
- F : "*au moins, une des cartes est un pique*" ;
- G : "*une seule des cartes est un pique*".

3. Ils changent les règles du jeu et, maintenant, tirent simultanément trois cartes. Déterminer les probabilités des événements D, E, F et G.

E.20 Une urne contient cinq boules bleues, numérotées de 1 à 5, quatre boules vertes numérotées de 1 à 4 et une boule rouge portant le numéro 1.
Ces boules étant indiscernables au toucher, dans chacune des deux parties, les différentes éventualités sont équiprobables.

Note : Les probabilités demandées seront présentées sous forme de fractions irréductibles

Partie 1 : tirages simultanés

On tire simultanément deux boules

1. Calculer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules vertes
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule bleue.

Partie 2 : tirages successifs

On tire une boule, on note son numéro, puis sans remettre cette première boule tirée dans l'urne, on tire une autre boule et on note aussi son numéro. Avec ces deux numéros ainsi obtenus, on forme un entier naturel comportant deux chiffres. Le premier numéro tiré est pris comme chiffre des dizaines et le second comme chiffre des unités.

1. Calculer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir l'entier 24.