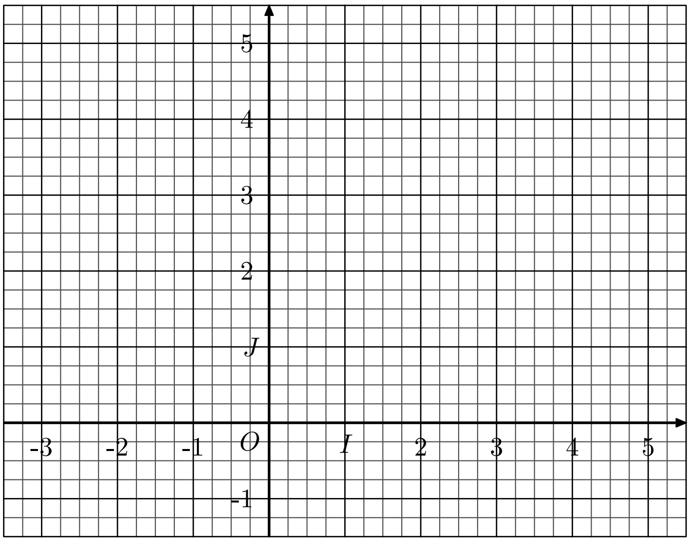
Hors programme lycée / Géométrie dans l'espace: produit scalaire et plan

1. Introduction (via les coordonnées)

E.1 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

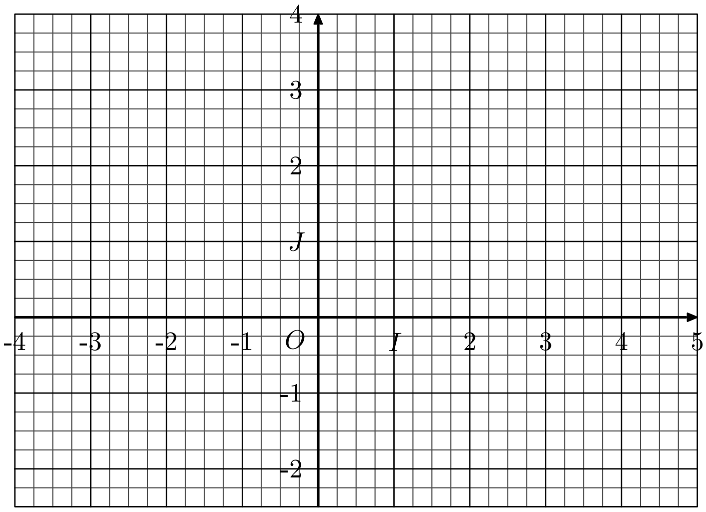


On considère les points A, B et C définis par :

$A(-3\,;1)$; $B(4\,;-1)$; $C(1\,;3)$

1. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.
2. Soit J l'image du point A par la symétrie centrale de centre C.
   a. Donner une relation vectorielle vérifiée par les points A, C et J
   b. Déterminer les coordonnées du point J.
3. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

E.2 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



1. On rappelle la formule de la distance entre deux points :
   $PQ = \sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2}$

   On considère les trois points du plan A, B et C de coordonnées :
   $A(-3\,;2)$; $B(-2\,;-2)$; $C(2\,;-1)$
   a. Déterminer les distances AB, AC et BC.
   b. Établir que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ un vecteur, on définit la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ comme le nombre $\|\overrightarrow{u}\|$ défini par :
   $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

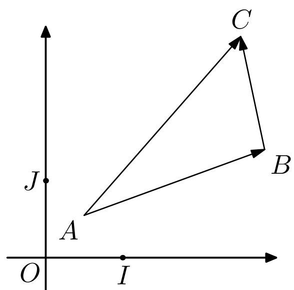
   On considère les deux points E et F de coordonnées :
   $E(-1\,;2)$; $G(4\,;3)$
   et les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées :
   $\overrightarrow{u}\,(4\,;-1)$; $\overrightarrow{v}\,(1\,;2)$
   a. Déterminer les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   b. Déterminer les coordonnées des points F et H vérifiant les deux égalités vectorielles :
   $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{v}$
   c. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ à l'aide des points E, F et G?
   d. Le triangle EFG est-il rectangle?

E.3

On considère le plan muni du repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et trois points A, B, C du plan.

On ne connait pas les coordonnées des points A et B mais on note :

$\overrightarrow{AB}(x\,;y)$; $\overrightarrow{BC}(x'\,;y')$



1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer la longueur de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ en fonction de x, x', y, y'. Elles se notent respectivement $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (AB) et (BC) soient perpendiculaires.

2. *Produit scalaire et coordonnées*

E.4 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{j}\right)$, on donne les points :

$$A(2\,;1\,;3) \quad ; \quad B(-3\,;-1\,;7) \quad ; \quad C(3\,;2\,;4)$$

1. Déterminer les coordonnées du point H barycentre du système :
$$\left\{(A\,;-2)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;2)\right\}$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que :
$$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$
En préciser les éléments caractéristiques.

3. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que :
$$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$$
En préciser les éléments caractéristiques.

3. *Ensemble de points*

E.5 On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace :
$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que :
$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$

E.6 Soit A et B deux points distincts du plan.

1. Caractériser l'ensemble des points tels que :
   a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$
   b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=AB^2$
   c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-AB^2$

2. On suppose que $AB=6$. Caractériser l'ensemble des points tels que :
   a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=18$
   b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

E.7 Dans l'espace, on considère deux points A et B distincts tels que $AB=4$. On note I le milieu du segment $[AB]$:

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a l'égalité :
$MA^2-MB^2=2\cdot\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$

2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant :
$MA^2-MB^2=16$