

Hors programme lycée / Produit l'espace: produit scalaire et planscalaire dans le plan l'espace: produit scalaire et plan

1. Formule de la médiane

E.1   



Rappels: soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a la relation :

$$AM^2 + BM^2 = \frac{1}{2} \cdot AB^2 + 2 \cdot MI^2$$

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ et les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

$$A(-2; -3) ; B(-1; 2) ; C(3; 1)$$

- Déterminer les mesures AB, AC et BC .
- On note I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer la mesure de la médiane dans le triangle ABC issue du sommet C .
 - On note J le milieu du segment $[AC]$. Déterminer la mesure de la médiane dans le triangle ABC issue du sommet B .

E.2    On considère un triangle ABC rectangle en A ayant les mesures suivantes: $AB=6$; $AC=3$

On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu de $[IC]$.

On s'intéresse à l'ensemble \mathcal{E} des points M vérifiant la relation: $MA^2 + MB^2 + 2 \cdot MC^2 = 72$




1^{er} méthode:

- Montrer que tous points M vérifient la relation:
$$MA^2 + MB^2 + 2 \times MC^2 = 4 \cdot MJ^2 + JA^2 + JB^2 + 2 \times JC^2$$
- En utilisant par deux fois le théorème de la médiane, démontrer la relation suivante:
$$M \in \mathcal{E} \iff 4 \times MJ^2 + \frac{AB^2}{2} + IC^2 = 72$$
- En déduire la nature de l'ensemble \mathcal{E} .

2^{ème} méthode:

On munit le plan du repère $(A; \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AB}; \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC})$

- Déterminer les coordonnées des points A, B, C dans ce repère.
- En notant $(x; y)$ les coordonnées du point M , déterminer une équation de \mathcal{E} dans ce repère.
- En déduire la nature de l'ensemble \mathcal{E} .

E.3    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé et les deux points du plan suivants:
 $A(-3; 2) ; B(3; -6)$

- On désignera par M le point de coordonnées $(x; y)$:
 - Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.
 - Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{IM} et \overrightarrow{AB} .
 - Déterminer la longueur AB .
- Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points vérifiant la relation:
$$MA^2 - MB^2 = 40$$
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.
- Déterminer l'équation de l'ensemble des points vérifiant la relation:
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 34$$
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.
- Déterminer l'équation de l'ensemble des points vérifiant la relation:
$$MA^2 + MB^2 = 150$$
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.