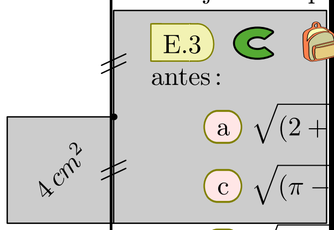
Hors programme lycée / Racines carrés

1. *Introduction*

E.1 Construire un carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés représentés ci-contre.
⚠ *Laisser apparentes toutes vos traces de recherche. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans la notation.*



E.2
1. Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles définissent ou pas un nombre. Justifier votre réponse.

   a. $\dfrac{1}{3^2-9}$ b. $\sqrt{2}$ c. $\sqrt{-1}$

   d. $\sqrt{0}$ e. $\sqrt{(-1)^2}$ f. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

2. Un élève affirme que : $\sqrt{20} = 10$
   En utilisant seulement la définition de la racine carrée, justifier qu[redacted] son affirmation est fausse.

E.3 Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

a. $\sqrt{(2+\text{[redacted]}\sqrt{3})^2}$ b. $\sqrt{\left(2+\sqrt{12}\right)^2-8\sqrt{3}}$

c. $\sqrt{(\pi-\text{[redacted]})^2}$ d. $\sqrt{\sqrt{81}}$

e. $\sqrt{(-2\text{[redacted]}}$ f. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

E.4
1. Écrire A sous forme de fraction irréductible.
   $A = 2 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}}$
2. a. Montrer que A est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près.
   b. A est-il une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près?

2. *Relations multiplicatives*

E.5 Sachant que $\sqrt{196} = 14$, donner la valeur exacte des nombres suivants :

a. $\sqrt{1{,}96}$ b. $\sqrt{19600}$ c. $\sqrt{0{,}0196}$ d. $\sqrt{1960000}$

3. *Simplifications additives*

E.6 ⚠ Écrire B et C sous la forme, $a\sqrt{b}$, avec a et b nombres entiers *(b étant le plus petit possible)*.

$$B = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{45} + \sqrt{500} \quad ; \quad C = \left(\sqrt{3}+4\right)^2 - 19$$

4. *Simplifications*

E.7 Simplifier au maximum l'écriture des calculs suivants :

$$A = \sqrt{63} + 4\sqrt{28} - 9\sqrt{175} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{15}\times\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$$

$$C = -\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{8} - 7\sqrt{72}$$

E.8 Écrire toutes les expressions sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible :

a. $\sqrt{75}$ b. $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{16}}$

c. $\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ d. $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

e. $5\sqrt{2}\times4\sqrt{18}$ f. $\sqrt{27}+3\sqrt{12}-5\sqrt{75}$

g. $7\sqrt{6}-3\sqrt{24}$ h. $\sqrt{10}\times\sqrt{18}+3\sqrt{5}$

5. *Comparaison de nombres*

E.9 Comparer sans l'aide de la calculatrice :

a) 6 et $\sqrt{33}$ b) $\sqrt{6}\times\sqrt{5}$ et 6

c) $10\sqrt{10}$ et 30 d) $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\sqrt{5+3}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ f) $2\sqrt{2}-3$ et $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

E.10 Sans l'aide de la calculatrice, effectuer la comparaison des couples de nombres proposées :

a) $2\sqrt{19}$ et $5\sqrt{3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{35}}$ et $\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ d) $\sqrt{12}-\sqrt{7}$ et 5

e) $3\sqrt{5}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{47+6\sqrt{10}}$ f) $\dfrac{6^{11}\times3\times4^7}{3^{12}}$ et $\sqrt{2^{50}}$

E.11 Cet exercice doit être traité sans l'aide de la calculatrice :

1. On considère les deux nombres suivants :
$A=2\sqrt{3}$; $B=3\sqrt{2}$
   a) Déterminer les valeurs exactes de A^2 et B^2.
   b) Comparer les deux nombres A et B.
2. Comparer chaque couple de nombres ci-dessous :

a) 6 et $3\sqrt{6}$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{8}$

E.12 Sans l'usage de la calculatrice, comparer les couples de nombres ci-dessous :

a) $\sqrt{45}$ et 7 b) -3 et $-\sqrt{57}$ c) $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ e) $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{\pi}$ f) $-\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

E.13 Comparer les couples de nombres suivants :

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

c) $\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ d) $\dfrac{5\sqrt{8}}{4}$; $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

E.14 Comparer les nombres suivants en justifiant votre méthode :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{46}}$ et $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$ b) $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ et $\sqrt{35+12\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ et $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{\dfrac{3^4\times12^2}{3^8\times4^4}}$ et $\dfrac{1}{36}$

6. *Simplifications*

E.15 ⚠ On considère les nombres :

$C=5\sqrt{3}+2\sqrt{27}$; $D=3\sqrt{2}\times\sqrt{6}$

Écrire les nombres C et D sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un nombre entier.

E.16 Effectuer les opérations suivantes en mettant le résultat sous la forme suivante $p\sqrt{q}$ où p est un entier relatif et q est un entier naturel le plus petit possible :

a) $\sqrt{500}$ b) $\sqrt{252}$ c) $\sqrt{6}\times\sqrt{48}$

d) $\sqrt{3^2+4^2}$ e) $5\sqrt{3}+2\sqrt{75}-3\sqrt{12}$ f) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

E.17 Donner la forme simplifiée de chacune des expressions suivantes :

a) $\sqrt{7\,500}$ b) $\sqrt{50}\times\sqrt{48}$ c) $\sqrt{45}+2\sqrt{500}-\sqrt{80}$

d) $2\sqrt{75}-\sqrt{48}$ e) $\dfrac{15\times10^4}{\sqrt{16\times10^{-6}}}$ f) $\sqrt{98}\times\sqrt{6}$

E.18 Simplifier les calculs suivants :

a) $4\sqrt{2}+\sqrt{6}\times\sqrt{48}$ b) $\sqrt{27}+2\sqrt{12}-5\sqrt{75}$

c) $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{8}\times\sqrt{75}}{\sqrt{5}\times\sqrt{90}+\sqrt{24}\times\sqrt{12}}$

7. *Racine carré, fractions, puissance*

E.19 ⚠ On donne :

$A=\dfrac{7}{3}-\dfrac{2}{3}\div\dfrac{8}{7}$; $B=\sqrt{12}-7\sqrt{3}-\sqrt{75}$

$C=\dfrac{0{,}3\times10^2\times5\times10^{-3}}{4\times10^{-4}}$

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel le plus petit possible.
3. Calculer C et donner son écriture scientifique

E.20 ⚠ *Les calculs intermédiaires doivent figurer sur la copie*

1. Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un entier, le nombre : $A=\sqrt{75}+4\sqrt{12}$

2. Prouver que :
   a. $\dfrac{2+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4}-5}=-\dfrac{11}{17}$ b. $\dfrac{35\times10^{22}\times2\times\left(10^{-2}\right)^6}{42\times10^{10}}=\dfrac{5}{3}$

E.21 ⚠ On donne les nombres :

$A=\dfrac{3}{7}-\dfrac{2}{7}\times\dfrac{21}{8}$; $B=\dfrac{3\times10^2\times1{,}8\times10^{-3}}{6\times10^4}$

$C=\sqrt{12}-5\sqrt{75}+2\sqrt{147}$

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
   Écrire toutes les étapes du calcul.
2. a. Donner l'écriture décimale de B.
   b. Exprimer B en écriture scientifique.
3. Écrire C sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un nombre entier.

E.22

1. On donne : $A=\dfrac{\dfrac{2}{3}+3}{\dfrac{1}{3}+5}$
   Écrire A sous la forme d'une fraction irréductible.
2. On donne : $B=2\sqrt{50}-3\sqrt{8}+7\sqrt{18}$
   Écrire B sous la forme $a\sqrt{2}$, avec a un nombre entier.
3. On donne : $C=\dfrac{2{,}6\times10^2\times1{,}7\times10^2}{0{,}2\times10^5\times10^3}$
   Donner l'écriture scientifique de C.

E.23 ⚠

1. On considère les deux expressions :
   $A=\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{5}{2}$; $B=\dfrac{16\times10^{-1}\times2}{\left(10^3\right)^2\times10^{-8}\times80}$
   a. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
   b. Vérifier que B est un nombre entier
   Écrire les étapes du calcul.
   c. Brice affirme que "A est l'opposé de B".
   Est-ce vrai ? Justifier.
2. On considère les deux expressions :
   $C=2\sqrt{24}+\sqrt{96}-\sqrt{600}$; $D=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$
   a. Mettre C sous la forme $a\sqrt{6}$, avec a entier relatif
   b. Développer et réduire D.

E.24 ⚠

1. On donne $A=\dfrac{3}{7}-\dfrac{15}{7}\div\dfrac{5}{24}$.
   Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. On donne :
   $B=\sqrt{300}-4\sqrt{27}+6\sqrt{3}$; $C=\left(5+\sqrt{3}\right)^2$
   $D=\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$
   a. Écrire B sous la forme $b\sqrt{3}$, où b est un nombre entier.
   b. Écrire C sous la forme $e+f\sqrt{3}$, avec e et f entiers.
   c. Montrer que D est un nombre entier.

E.25

1. Effectuer le calcul suivant : $A=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{3}}}$
2. Donner l'écriture du quotient suivant sous la forme $2^m\times3^n\times5^p\times7^q$ où m, n, p, q sont des entiers relatifs :
   $B=\dfrac{3\times15^2\times\left(2\times5^3\right)^{-2}}{7^3\times12^4}$
3. Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
   $C=\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)$; $D=\dfrac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$

E.26 ⚠ On donne :

$E=\dfrac{2}{3}+\dfrac{17}{2}\times\dfrac{4}{3}$; $F=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{16}}{\sqrt{2}}$

1. Démontrer que les nombres E et F sont égaux.
2. On donne $G=\left(10^{-1}+a\right)\times10^2$. Calculer le nombre a pour que l'égalité $E=G$ soit vraie.

8. *Expressions conjuguées*

E.27

1. Développer l'expression : $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$
2. Utiliser la question précédente pour simplifier l'expression :
   $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

E.28

1. a. Montrer que $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ est un nombre entier.

   b. Pour simplifier l'écriture du quotient $\dfrac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, nous allons multiplier son numérateur et son dénominateur par $(2-\sqrt{3})$.

   Remarquer que le dénominateur a, alors, une valeur entière.

2. a. Montrer que $(2+3\sqrt{5})(2-3\sqrt{5})$ est un nombre entier relatif.

   b. Utiliser ce résultat pour écrire $\dfrac{\sqrt{5}-2}{2-3\sqrt{5}}$ avec un dénominateur entier.

3. Écrire $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$ avec un dénominateur entier.

4. Écrire $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ avec un dénominateur entier.

E.29 Écrire les expressions ci-dessous sans racines carrées au dénominateur :

a. $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ b. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ c. $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-4}$ d. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

E.30 Démontrer les égalités suivantes :

1. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=10$

2. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

   Rechercher l'expression simplifié de $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

3. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}=\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

   avec $x\in\mathbb{R}_*^+$ et $y\in\mathbb{R}_*^+$ tels que : $x\neq y$.

E.31 Établir l'égalité : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=1$

E.32 Simplifier l'écriture de chacun des expressions suivantes :

a. $\sqrt{63}-5\sqrt{7}+2\sqrt{2800}$ b. $\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

c. $\dfrac{2+\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ d. $\dfrac{\sqrt{5}-2}{1-\sqrt{2}}$

E.33 Simplifier les écritures suivantes :

a. $\sqrt{175}-10\sqrt{112}+\sqrt{7}$

b. $\left(2\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{200}+\sqrt{98}+\sqrt{18}\right)$ c. $\dfrac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{\sqrt{27}-5}{\sqrt{3}-2}$ e. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

E.34 Comparer les nombres suivants en justifiant votre méthode :

a. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

c. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}-1$ d. $\dfrac{15-\sqrt{2}}{14}$ et $\dfrac{14-\sqrt{2}}{15}$

9. *Racine carré et PGCD*

E.35

1. Déterminer le *PGCD* des deux entiers 1323 et 243.
2. Donner la forme simplifiée de la fraction $\dfrac{\sqrt{1323}}{\sqrt{243}}$

E.36

1. Déterminer le *PGCD* des deux entiers 343 et 175.
2. Donner la forme simplifiée de la fraction $\dfrac{\sqrt{343}}{\sqrt{175}}$

E.37

1. Déterminer le *PGCD* des deux entiers 847 et 63.
2. Écrire le nombre A sous la forme $a\sqrt{b}$:

   $A=\sqrt{847}+\sqrt{63}$

E.38

1. Déterminer le *PGCD* des deux entiers 567 et 175.
2. Écrire le nombre A sous la forme $a\sqrt{b}$:

   $A=\sqrt{567}+\sqrt{175}$

E.39 ⚠

1. Sans calculer leur *PGCD*, dire pourquoi les entiers 648 et 972 ne sont pas premiers entre eux.
2. a. Calculer pgcd(972 ; 648).

   b. Prouver que : $\sqrt{648}+\sqrt{972}=18\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$