

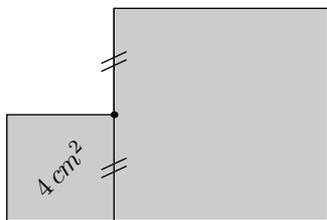
Hors programme lycée / Racines carrés

1. Introduction

E.1   

Construire un carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés représentés ci-contre.

Laisser apparentes toutes vos traces de recherche. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans la notation.



E.2  

1) Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles définissent ou pas un nombre. Justifier votre réponse.

a) $\frac{1}{3^2 - 9}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{-1}$

d) $\sqrt{0}$ e) $\sqrt{(-1)^2}$ f) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

2) Un élève affirme que : $\sqrt{20} = 10$

En utilisant seulement la définition de la racine carrée, justifier que son affirmation est fausse.

E.3   Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

a) $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}$ b) $\sqrt{(2 + \sqrt{12})^2} - 8\sqrt{3}$

c) $\sqrt{(\pi - 3)^2}$ d) $\sqrt{\sqrt{81}}$

e) $\sqrt{(-2)^2}$ f) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

E.4  

1) Écrire A sous forme de fraction irréductible.

$$A = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

2) a) Montrer que A est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près.

b) A est-il une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près?

2. Relations multiplicatives

E.5   Sachant que $\sqrt{196} = 14$, donner la valeur exacte des nombres suivants :

a) $\sqrt{1,96}$ b) $\sqrt{19600}$ c) $\sqrt{0,0196}$ d) $\sqrt{1960000}$

3. Simplifications additives

E.6    Écrire B et C sous la forme, $a\sqrt{b}$, avec a et b nombres entiers (b étant le plus petit possible).

$$B = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{45} + \sqrt{500} \quad ; \quad C = (\sqrt{3} + 4)^2 - 19$$

4. Simplifications

E.7   Simplifier au maximum l'écriture des calculs suivants :

$$A = \sqrt{63} + 4\sqrt{28} - 9\sqrt{175} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{15} \times \sqrt{35}}{\sqrt{7}}$$

$$C = -\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{8} - 7\sqrt{72}$$

E.8   Écrire toutes les expressions sous la forme

$a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible :

a) $\sqrt{75}$ b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{16}}$
 c) $\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$
 e) $5\sqrt{2} \times 4\sqrt{18}$ f) $\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 5\sqrt{75}$
 g) $7\sqrt{6} - 3\sqrt{24}$ h) $\sqrt{10} \times \sqrt{18} + 3\sqrt{5}$

5. Comparaison de nombres

E.9   Comparer sans l'aide de la calculatrice :

- (a) 6 et $\sqrt{33}$ (b) $\sqrt{6} \times \sqrt{5}$ et 6
 (c) $10\sqrt{10}$ et 30 (d) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{15}}$
 (e) $\sqrt{5+3}$ et $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (f) $2\sqrt{2} - 3$ et $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$

E.10   Sans l'aide de la calculatrice, effectuer la comparaison des couples de nombres proposées :

- (a) $2\sqrt{19}$ et $5\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{35}}$ et $\frac{1}{6}$
 (c) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ et $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{12} - \sqrt{7}$ et 5
 (e) $3\sqrt{5} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{47 + 6\sqrt{10}}$ (f) $\frac{6^{11} \times 3 \times 4^7}{3^{12}}$ et $\sqrt{2^{50}}$

E.11   Cet exercice doit être traité sans l'aide de la calculatrice :

- ① On considère les deux nombres suivants :
 $A = 2\sqrt{3}$; $B = 3\sqrt{2}$
 (a) Déterminer les valeurs exactes de A^2 et B^2 .
 (b) Comparer les deux nombres A et B .
 ② Comparer chaque couple de nombres ci-dessous :

- (a) 6 et $3\sqrt{6}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{2}}$
 (c) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{8}$

E.12   Sans l'usage de la calculatrice, comparer les couples de nombres ci-dessous :

- (a) $\sqrt{45}$ et 7 (b) -3 et $-\sqrt{57}$ (c) $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$
 (d) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ et $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (e) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\pi}$ (f) $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

E.13   Comparer les couples de nombres suivants :

- (a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\frac{5\sqrt{3}}{6}$
 (c) $\frac{5}{2}$; $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ (d) $\frac{5\sqrt{8}}{4}$; $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

E.14   Comparer les nombres suivants en justifiant votre méthode :

- (a) $\frac{1}{\sqrt{46}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ (b) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{35 + 12\sqrt{6}}$
 (c) $\frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}}$ et $\frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{\frac{3^4 \times 12^2}{3^8 \times 4^4}}$ et $\frac{1}{36}$

6. Simplifications

E.15    On considère les nombres :

$$C = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{27} \quad ; \quad D = 3\sqrt{2} \times \sqrt{6}$$

Écrire les nombres C et D sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un nombre entier.

E.16   Effectuer les opérations suivantes en mettant le résultat sous la forme suivante $p\sqrt{q}$ où p est un entier relatif et q est un entier naturel le plus petit possible :

- (a) $\sqrt{500}$ (b) $\sqrt{252}$ (c) $\sqrt{6} \times \sqrt{48}$
 (d) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ (e) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{75} - 3\sqrt{12}$ (f) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

E.17   Donner la forme simplifiée de chacune des expressions suivantes :

- (a) $\sqrt{7500}$ (b) $\sqrt{50} \times \sqrt{48}$ (c) $\sqrt{45} + 2\sqrt{500} - \sqrt{80}$
 (d) $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$ (e) $\frac{15 \times 10^4}{\sqrt{16} \times 10^{-6}}$ (f) $\sqrt{98} \times \sqrt{6}$

E.18   Simplifier les calculs suivants :

- (a) $4\sqrt{2} + \sqrt{6} \times \sqrt{48}$ (b) $\sqrt{27} + 2\sqrt{12} - 5\sqrt{75}$
 (c) $\frac{\sqrt{75} + \sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{75}}{\sqrt{5} \times \sqrt{90} + \sqrt{24} \times \sqrt{12}}$

7. Racine carré, fractions, puissance

E.19    On donne :

$$A = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} \div \frac{8}{7} \quad ; \quad B = \sqrt{12} - 7\sqrt{3} - \sqrt{75}$$

$$C = \frac{0,3 \times 10^2 \times 5 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}}$$

- ① Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
 ② Écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel le plus petit possible.

- ③ Calculer C et donner son écriture scientifique

E.20    Les calculs intermédiaires doivent figurer sur la copie

- Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un entier, le nombre :

$$A = \sqrt{75} + 4\sqrt{12}$$
- Prouver que :

$$\text{a) } \frac{2 + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - 5} = -\frac{11}{17} \quad \text{b) } \frac{35 \times 10^{22} \times 2 \times (10^{-2})^6}{42 \times 10^{10}} = \frac{5}{3}$$

E.21    On donne les nombres :

$$A = \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{21}{8} \quad ; \quad B = \frac{3 \times 10^2 \times 1,8 \times 10^{-3}}{6 \times 10^4}$$

$$C = \sqrt{12} - 5\sqrt{75} + 2\sqrt{147}$$

- Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
Écrire toutes les étapes du calcul.
- Donner l'écriture décimale de B .
 - Exprimer B en écriture scientifique.
- Écrire C sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un nombre entier.

E.22  

$$\text{1) On donne : } A = \frac{\frac{2}{3} + 3}{\frac{1}{3} + 5}$$

Écrire A sous la forme d'une fraction irréductible.

- On donne : $B = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{8} + 7\sqrt{18}$
Écrire B sous la forme $a\sqrt{2}$, avec a un nombre entier.
- On donne : $C = \frac{2,6 \times 10^2 \times 1,7 \times 10^2}{0,2 \times 10^5 \times 10^3}$
Donner l'écriture scientifique de C .

E.23   

1) On considère les deux expressions :

$$A = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{2} \quad ; \quad B = \frac{16 \times 10^{-1} \times 2}{(10^3)^2 \times 10^{-8} \times 80}$$

- Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
- Vérifier que B est un nombre entier

Écrire les étapes du calcul.

- Brice affirme que " A est l'opposé de B ".
Est-ce vrai? Justifier.
- On considère les deux expressions :

$$C = 2\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600} \quad ; \quad D = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 5\sqrt{2})$$
 - Mettre C sous la forme $a\sqrt{6}$, avec a entier relatif
 - Développer et réduire D .

E.24   

$$\text{1) On donne } A = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} \div \frac{5}{24}$$

Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

- On donne :

$$B = \sqrt{300} - 4\sqrt{27} + 6\sqrt{3} \quad ; \quad C = (5 + \sqrt{3})^2$$

$$D = (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$$
 - Écrire B sous la forme $b\sqrt{3}$, où b est un nombre entier.
 - Écrire C sous la forme $e + f\sqrt{3}$, avec e et f entiers.
 - Montrer que D est un nombre entier.

E.25  

$$\text{1) Effectuer le calcul suivant : } A = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{3 + \frac{1}{3}}}$$

- Donner l'écriture du quotient suivant sous la forme $2^m \times 3^n \times 5^p \times 7^q$ où m, n, p, q sont des entiers relatifs :

$$B = \frac{3 \times 15^2 \times (2 \times 5^3)^{-2}}{7^3 \times 12^4}$$

- Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

$$C = (3\sqrt{2} + 5\sqrt{2})(3\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \quad ; \quad D = \frac{1 - \sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$$

E.26    On donne :

$$E = \frac{2}{3} + \frac{17}{2} \times \frac{4}{3} \quad ; \quad F = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{16}}{\sqrt{2}}$$

- Démontrer que les nombres E et F sont égaux.
- On donne $G = (10^{-1} + a) \times 10^2$. Calculer le nombre a pour que l'égalité $E = G$ soit vraie.

8. Expressions conjuguées

E.27  

- Développer l'expression : $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$
- Utiliser la question précédente pour simplifier l'expression :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

E.28  

1 a Montrer que $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ est un nombre entier.

b Pour simplifier l'écriture du quotient $\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, nous allons multiplier son numérateur et son dénominateur par $(2-\sqrt{3})$.

Remarque que le dénominateur a, alors, une valeur entière.

2 a Montrer que $(2+3\sqrt{5})(2-3\sqrt{5})$ est un nombre entier relatif.

b Utiliser ce résultat pour écrire $\frac{\sqrt{5}-2}{2-3\sqrt{5}}$ avec un dénominateur entier.

3 Écrire $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ avec un dénominateur entier.

4 Écrire $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ avec un dénominateur entier.

E.29   Écrire les expressions ci-dessous sans racines carrées au dénominateur :

a $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ b $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ c $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-4}$ d $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

E.30   Démontrer les égalités suivantes :

1 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 10$

2 $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

Rechercher l'expression simplifiée de $(\sqrt{3}-1)^2$

9. Racine carré et PGCD

E.35  

1 Déterminer le PGCD des deux entiers 1323 et 243.

2 Donner la forme simplifiée de la fraction $\frac{\sqrt{1323}}{\sqrt{243}}$

E.36  

1 Déterminer le PGCD des deux entiers 343 et 175.

2 Donner la forme simplifiée de la fraction $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{175}}$

E.37  

1 Déterminer le PGCD des deux entiers 847 et 63.

2 Écrire le nombre A sous la forme $a\sqrt{b}$:

3 $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}} = \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

avec $x \in \mathbb{R}_*^+$ et $y \in \mathbb{R}_*^+$ tels que : $x \neq y$.

E.31   Établir l'égalité : $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} +$

$\frac{1}{\sqrt{3}+2} = 1$

E.32   Simplifier l'écriture de chacun des expressions suivantes :

a $\sqrt{63} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{2800}$ b $(2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

c $\frac{2+\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ d $\frac{\sqrt{5}-2}{1-\sqrt{2}}$

E.33   Simplifier les écritures suivantes :

a $\sqrt{175} - 10\sqrt{112} + \sqrt{7}$

b $(2\sqrt{2}-2)(\sqrt{200} + \sqrt{98} + \sqrt{18})$ c $\frac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$

d $\frac{\sqrt{27}-5}{\sqrt{3}-2}$ e $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

E.34   Comparer les nombres suivants en justifiant votre méthode :

a $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ et $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

c $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}-1$ d $\frac{15-\sqrt{2}}{14}$ et $\frac{14-\sqrt{2}}{15}$

$A = \sqrt{847} + \sqrt{63}$

E.38  

1 Déterminer le PGCD des deux entiers 567 et 175.

2 Écrire le nombre A sous la forme $a\sqrt{b}$:

$A = \sqrt{567} + \sqrt{175}$

E.39   

1 Sans calculer leur PGCD, dire pourquoi les entiers 648 et 972 ne sont pas premiers entre eux.

2 a Calculer $\text{pgcd}(972; 648)$.

b Prouver que : $\sqrt{648} + \sqrt{972} = 18(\sqrt{3} + \sqrt{2})$