# Hors programme lycée / Suite et limites

## 1. Limites de suites

**E.1** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot u_n - 5.$$

1. a. Calculer les termes $u_1$ et $u_2$
   b. La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ? On justifiera les réponses.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n=u_n+10$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme $v_0$.
   b. Exprimer le terme général $v_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$ puis celle de la suite $(u_n)$

**E.2**

**Partie A : étude d'une suite**

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0=800$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0{,}6\cdot u_n + 400.$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. On définit une autre suite $(v_n)$ sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout entier naturel $n$, : $v_n=1000-u_n$.
   a. Calculer les trois premiers termes de cette suite $(v_n)$.
   b. Montrer que cette suite $(v_n)$ est géométrique et en déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
3. a. Déduire des résultats précédents que :
   $u_n = 1000 - 200\times(0{,}6)^n$.
   b. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$?

**Partie B : application**

Le président d'une association culturelle constate que chaque année l'association garde 60 % de ses anciens adhérents et que 400 personnes nouvelles adhèrent. On suppose que ces données chiffrées restent les mêmes au fil des ans.
À la création de cette association, en janvier 2001, il y avait 800 adhérents.

1. Calculer le nombre d'adhérents en janvier 2002.
2. Quel sera le nombre d'adhérents en janvier 2003?
3. En quelle année verra-t-on pour la première fois l'effectif de l'association dépasser 990?

**E.3** Soit la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0=6$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot u_n + 3 \quad \textit{(n entier naturel)}$$

1. On pose : $v_n=u_n-4$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Montrer que $v_n=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   c. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$, puis celle de la suite $(u_n)$
2. On pose : $a_n=\ln v_n$
   a. Montrer que la suite $(a_n)$ est une suite arithmétique de raison $-2\cdot\ln 2$.
   b. Déterminer l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.
   c. Déterminer la valeur de $n$ pour laquelle $a_n$ est égale à $-13\cdot\ln 2$.

**E.4** Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre 1 000 nouveaux abonnés, mais 50 % des anciens abonnés environ ne renouvellent pas leur abonnement.

L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnés si cette situation perdure sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait 4 000 abonnés.
Dans ce but, on considère la suite $(U_n)$ définie par :

$u_0=4$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1}=0{,}5u_n+1$

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_n$ est une approximation du nombre de milliers d'abonnés au bout de $n$ années.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | |

3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :
   Pour tout entier naturel $n$ : $u_n>2$
4. Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=u_n-2$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,5.
   Préciser la valeur de $v_0$.
   b. En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
5. a. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que :
   Pour tout entier naturel $n$ : $u_n=2\cdot(1+0{,}5^n)$
   b. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$?
   c. Donner une interprétation de cette limite.

## 2. Somme des termes

**E.5** La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En 2000, elle était de 8 000 habitants.

1. On désigne par $u_n$ le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000+n)$. On a donc $u_0 = 8000$.
   - a. Calculer les termes $u_1$ et $u_2$.
   - b. Exprimer le terme $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. En déduire l'expression du terme $u_n$ en fonction de $n$.
   - c. Calculer le nombre d'habitants prévu pour l'année 2006.
   - d. Déterminer en quelle année la population aura doublé
2. On note $v_n$ l'augmentation par rapport à l'année précédente du nombre d'habitants constatée l'année $(2000+n)$. On a donc, pour tout entier naturel $n$ non nul : $v_n = u_n - u_{n-1}$.
   - a. Calculer les termes $v_1$ et $v_2$.
   - b. Exprimer le terme général $v_n$ en fonction de $n$.
   - c. Calculer la somme $v_1+v_2+\cdots+v_n$ en fonction de $n$. Vérifier, pour le cas particulier $n$ égal à 6, le résultat obtenu en 1 c

**E.6**

1. On considère une suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme 20 et de raison $-1$.
   - a. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
   - b. Donner l'expression de la somme des $n$ premiers termes.
   - c. En déduire la limite suivante :
     $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
2. On considère une suite géométrique $(v_n)$ de premier terme 20 et de raison 0,6.
   - a. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   - b. Donner l'expression de la somme des $n$ premiers termes de la suite $(v_n)$.
   - c. En déduire la limite suivante :
     $$\lim_{n\mapsto+\infty} v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

**E.7** Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 1600 euros.

- Contrat $n^o1$ : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 10 euros.
- Contrat $n^o2$ : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6% par rapport au mois précédent.

1. Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.
2. Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat $n^o2$ devient supérieur à celui du contrat $n^o1$. Justifier correctement la réponse.

On rappelle :

- La somme $S$ des $n$ premiers termes d'une suite géométrique $(u_n)$ de raison $q$ $(q \neq 1)$ est :
  $$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$
- La somme $S'$ des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique $(v_n)$ de raison $r$ :
  $$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = n \cdot v_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

**E.8** Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 $km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir 50 $km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera $d_n$ la distance parcourue durant le $n$-ième jour.

1. Calculer les distances $d_1$, $d_2$, $d_3$ parcourues durant les trois premiers jours.
2. Expliquer pourquoi : $d_{n+1} = 0{,}99 \cdot d_n$.
   En déduire la nature de la suite $(d_n)$ et l'expression de $d_n$ en fonction de $n$.
   - a. Calculer, en fonction de $n$, le nombre total $L_n$ de kilomètres parcourus au bout de $n$ jours.
     $$L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$
   - b. En déduire la limite de $L_n$ lorsque $n$ tend verse $+\infty$. Le globe-trotter peut-il gagner?
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours $N$ qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 $km$

On rappelle que :

- La somme $S$ des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)$ de raison $r$ est :
  $$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$$
- La somme $S'$ des $n$ premiers termes d'une suite géométrique $(v_n)$ de raison $q$ $(q \neq 1)$ est :
  $$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

**E.9** Soit $a$ un nombre réel, avec $a \neq 1$.
Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + a + a^2 + \cdot + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

**E.10** ⚠ Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes.
Les résultats demandés seront arrondis au centième.

Pour effectuer un achat dont le coût s'élève à 1 600 € un client a le choix entre deux formes de paiement.

1. Dans cette question, le premier versement s'élève à 150 € et on effectue une suite de versements notée $(a_n)$ qui vérifie $a_0 = 150$ et, pour tout entier $n$ :
   $a_{n+1} = 0{,}95 \cdot a_n + 100$
   - a. Calculer le deuxième versement $a_1$ et le troisième $a_2$.
   - b. Montrer qu'avec cinq versements, la somme de 1 600 € est remboursée.
2. Dans cette question, le premier versement s'élève à 200 €, puis chaque versement est égal au précédent diminué de 5%

   On note $(b_n)$ la suite des versements avec $b_0 = 200$.
   - a. Vérifier que $b_1 = 190$ et calculer $b_2$ et $b_3$.
   - b. Exprimer le terme $b_{n+1}$ en fonction de $b_n$.
     En déduire la nature de la suite $(b_n)$ et donner l'expression du terme général $b_n$ en fonction de $n$
   - c. Calculer en fonction de $n$ la somme $S_n$ égale à :
     $b_0 + b_1 + \cdots + b_n$
     des $(n+1)$ premiers versements. Calculer les sommes $S_8$ et $S_9$ et interpréter le résultat.

**E.11** ⚠ *Il est assez curieux qu'une infinité de termes positifs que l'on ajoute au fur et à mesure puisse donner un résultat fini. Ainsi le Grec Zénon prétendait, au IV^ème siècle avant J.C., démontrer qu'il est impossible d'aller d'un point à un autre, car "avant d'atteindre le but, il faut arriver au milieu de la route, puis atteindre le milieu du trajet à parcourir, et ainsi de suite : comme il y a une infinité d'étapes à observer, on ne peut arriver au bout de son voyage".*

Les nombres et leurs mystères - **A. Warusfel**

**I- Construction de la figure**

Construire un segment $[AB]$ puis,

1. le milieu $A_0$ de $[AB]$,
2. le milieu $A_1$ de $[A_0B]$,
3. le milieu de $A_2$ de $[A_1B]$.

**II- Utilisation d'une suite numérique :**

On construit ainsi une suite de points $A_n$ tels que pour tout $n$ entier supérieur ou égal à 1, $A_n$ est le milieu du segment $[A_{n-1}B]$.
On suppose que $AB = 2$. On pose :

$$d_0 = AA_0 \quad ; \quad d_1 = A_0A_1 \quad ; \quad d_2 = A_1A_2$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$ : $d_n = A_{n-1}A_n$.

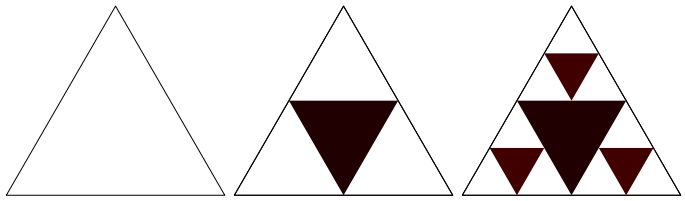
1. On a $d_0 = 1$, calculer $d_1$ et $d_2$.
2. On admet que, pour tout entier naturel $n$ :
   $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n$.
   - a. En déduire que la suite $(d_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   - b. Donner l'expression de $d_n$ en fonction de $n$.
3. On pose : $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.
   - a. Vérifier que : $S_n = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.
   - b. Quelle est la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini?
   - c. En donner une interprétation géométrique.

**Formulaire :** Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$ *(avec $q \neq 1$)* :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**E.12** ⚠ On divise un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central.

Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



1. a. Réaliser la 3^ème étape en partant d'un triangle équilatéral de côté 16 *cm*. Combien de triangles noircis ont-ils été rajoutés?
   - b. Combien de triangles noircis seront-ils rajoutés à la quatrième étape?
2. On note $T_n$ le nombre de triangles noircis rajoutés à la $n$-ième étape où $n$ est un entier supérieur ou égal à 1.
   La suite $(T_n)$ ainsi définie, est une suite géométrique de raison 3.
   - a. Donner la valeur de $T_1$, $T_2$, $T_3$.
   - b. Exprimer $T_n$ en fonction de $n$. Vérifier les résultats trouvés à la question 1.
3. Calculer le nombre total de triangles noircis après la dixième étape.

## 3. *Suite homographique*

**E.13** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{8u_n + 1}{-u_n + 10}$$

dont le premier terme a pour valeur : $u_0 = -5$

1. Donner la valeur des trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

a. Déterminer les trois premiers termes de la suite $(v_n)$.

b. Établir la relation suivante :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{9}$$

c. Donner la nature de la suite $(v_n)$ et donner l'expression du terme $v_n$ en fonction de $n$.

3. a. Établir la relation suivante :

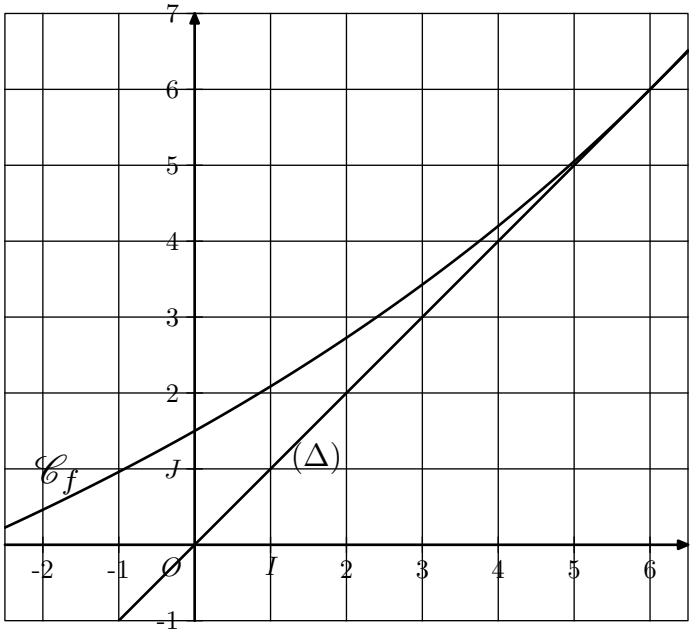
$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n}$$

b. Exprimer le terme $u_n$ en fonction de $n$.

4. Donner la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**E.14** Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}$$




La droite $(\Delta)$ est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad u_0 = -2$$

1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite $(u_n)$.

2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite $(u_n)$.

3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{u_n - 6}$$

a. Établir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{18}$

b. Donner la nature et les caractéristiques de la suite $(w_n)$ ainsi que l'expression du terme $w_n$ en fonction de $n$.

c. Déterminer l'expression du terme $u_n$ en fonction de $n$.

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)$

## 4. *Suites adjacentes*

**E.15** On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies, pour tout entier naturel $n$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.

2. Soit la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b. Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ et préciser la limite de la suite $(w_n)$

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites $(u_n)$ et $(v_n)$, démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire?

**E.16** On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. a. Établir que la suite $(u_n)$ est décroissante.

b. Établir que la suite $(v_n)$ est croissante.

2. a. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes.

b. Que peut-on dire de la convergence de ces deux suites?

**E.17** On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3x-2}{x}$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
   b. En déduire que pour tout nombre $x\in\left[\frac{3}{2}\,;4\right]$, on a :
   $$f(x)\in\left[\frac{3}{2}\,;4\right]$$

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3\cdot u_n-2}{u_n} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{3\cdot v_n-2}{v_n} \end{cases}$$

2. Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, on a :
   $$u_n\in\left[\frac{3}{2}\,;4\right]$$
   De même, on admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $v_n\in\left[\frac{3}{2}\,;4\right]$
3. Déterminer la valeur des trois premiers termes de chacune de ces suites.
4. a. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
   b. Montrer que la suite $(v_n)$ est décroissante.
   c. Établir l'encadrement suivant, par un raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel $n$ :
   $$0\leqslant v_n-u_n\leqslant 3\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$$
   d. Établir que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
5. a. Justifier que la limite $\ell$ vérifie : $\ell=\frac{3\cdot\ell-2}{\ell}$
   b. Justifier que la limite des deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ est 2.

**E.18** On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

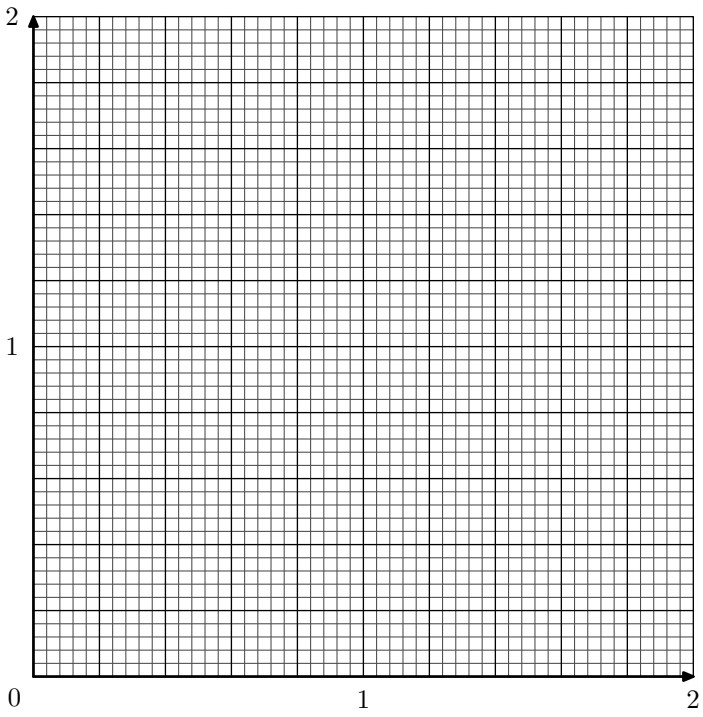
$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot u_n+2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n+2 \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)$ est croissante.
2. Montrer que $(v_n)$ est décroissante.
3. Montrer que, pour tout entier naturel, on a l'encadrement :
   $$0\leqslant v_n-u_n\leqslant 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
4. Établir que les deux suites $(u_n)$ sont adjacentes.
5. En déduire que ces deux suites convergent vers un même nombre $\ell$ ; déterminer la valeur de $\ell$.

**E.19** On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3\cdot u_n+1}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3\cdot v_n+1}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

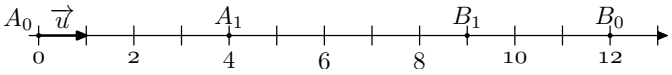
1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ d'une part et $v_1$, $v_2$, $v_3$ d'autre part.
2. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ *(unité graphique : 5 cm)* tracer les droites $D$ et $\Delta$ d'équations respectives :
   $$y=\frac{3\cdot x+1}{4} \quad ; \quad y=x$$
   Utiliser $D$ et $\Delta$ pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$, $u_3$ ainsi que les points $B_1$, $B_2$, $B_3$ d'abscisses respectives $v_1$, $v_2$, $v_3$.
   *Les tracés seront effectués sur une feuille de papier millimétré.*
3. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel $n$ par :
   $$s_n=u_n+v_n$$
   a. Calculer $s_0$, $s_1$, $s_2$, $s_3$. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite $(s_n)$ ?
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite $(s_n)$ est une suite constante.
4. On considère la suite $(d_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :
   $$d_n=v_n-u_n$$
   a. Montrer que la suite $(d_n)$ est une suite géométrique.
   b. Donner l'expression de $d_n$ en fonction de $n$.
5. En utilisant les résultats des questions 3 b et 4 b donner l'expression de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.
6. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergente. Préciser leurs limites.




## 5. Suites adjacentes - Annales

E.20 **Partie A**

On considère les suites de points $A_n$ et $B_n$ définies pour tout entier naturel $n$ de la manière suivante : sur un axe orienté $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ donné ci-dessous, le point $A_0$ a pour abscisse 0 et le point $B_0$ a pour abscisse 12.




Le point $A_{n+1}$ est le barycentre des points $(A_n\,;2)$ et $(B_n\,;1)$, le point $B_{n+1}$ est le barycentre des points pondérés $(A_n\,;1)$ et $(B_n\,;3)$.

1. Sur le graphique, placer les points $A_2$, $B_2$.
2. On définit les suites $\left(a_n\right)$ et $\left(b_n\right)$ des abscisses respectives des points $A_n$ et $B_n$. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2{\cdot}a_n + b_n}{3}$$

On admet de même que : $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

**Partie B**

1. On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par :
$u_n = b_n - a_n$
   a. Montrer que la suite $(u_n)$ est géométrique. En préciser la raison.
   b. Donner l'expression de $u_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.
   c. Déterminer la limite de $\left(u_n\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.
2. a. Démontrer que la suite $\left(a_n\right)$ est croissante *(on pourra utiliser le signe de $u_n$)*.
   b. Étudier les variations de la suite $\left(b_n\right)$.
3. Que peut-on déduire des résultats précédents quant à la convergence de suites $(a_n)$ et $(b_n)$?

**Partie C**

1. On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par :
$v_n = 3a_n + 4b_n$

   Montrer que la suite $(v_n)$ est constante.
2. Déterminer la limite des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

E.21 On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies, pour tout entier naturel $n$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.
2. Soit la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :
$w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   b. Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ et préciser la limite de la suite $(w_n)$
3. Après avoir étudié le sens de variation des suites $(u_n)$ et $(v_n)$, démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire?
4. On considère à présent la suite $(t_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par :
$t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$
   a. Démontrer que la suite $(t_n)$ est constante.
   b. En déduire la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**E.22** Le graphique de l'annexe sera complétée et remis avec la copie.

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

1. Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x\in[1\,;2]$ alors $f(x)\in[1\,;2]$.

2. $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   - $u_0=1$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$.
   - $v_0=2$ et pour tout entier naturel $n$ : $v_{n+1}=f(v_n)$.

   a. Le graphique donné en annexe représente la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$?

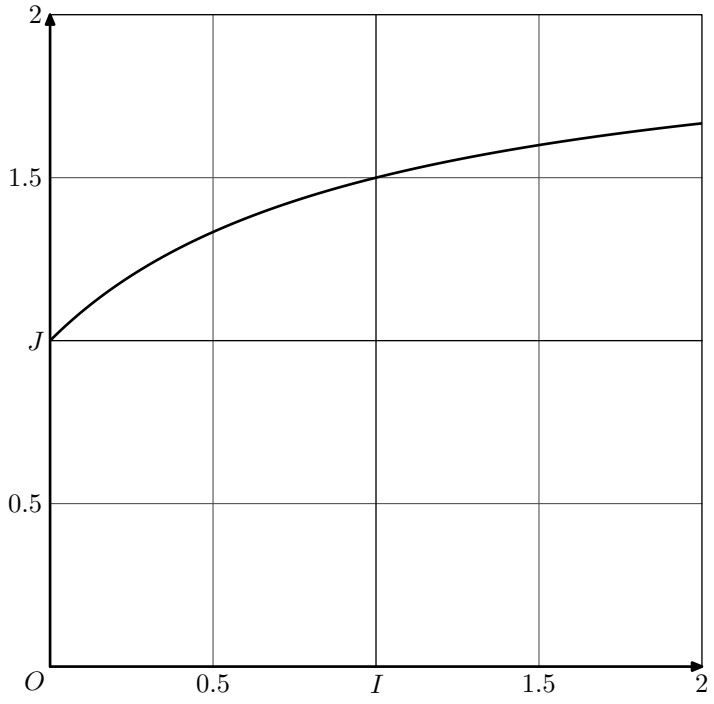
   b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   - Pour tout entier naturel $n$ : $1\leqslant v_n\leqslant 2$.
   - Pour tout entier naturel $n$ : $v_{n+1}\leqslant v_n$.

   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   - Pour tout entier naturel $n$ : $1\leqslant u_n\leqslant 2$.
   - Pour tout entier naturel $n$ : $u_n\leqslant u_{n+1}$.

   c. Montrer que pour tout entier naturel $n$ :
   $$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$
   En déduire que pour tout entier naturel $n$ :
   $$v_n-u_n\geqslant 0\quad;\quad v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{1}{4}(v_n-u_n)$$

   d. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   e. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers un même réel $\alpha$.
   Déterminer la valeur exacte de $\alpha$.




**E.23** On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par $a_0=1$, $b_0=7$ et

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot(2\cdot a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot(a_n+2\cdot b_n)\end{cases}\qquad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Soit $D$ une droite munie d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\right)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère les points $A_n$ et $B_n$ d'abscisses respectives $a_n$ et $b_n$.

1. Placer les points $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$, $A_2$ et $B_2$.

2. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n=b_n-a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

3. Comparer $a_n$ et $b_n$. Étudier le sens de variation des suites $(a_n)$ et $(b_n)$. Interpréter géométriquement ces résultats.

4. Démontrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.

5. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n=a_n+b_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que $(v_n)$ est une suite constante. En déduire que les segments $\left[A_nB_n\right]$ ont tous le même milieu $I$.

6. Justifier que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

**E.24** *Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.*

**Partie A : question de cours**

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n-v_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ ;

(2) si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes telles que $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante, alors pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, on a :
$$u_n\leqslant v_n\,;$$

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

"*Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite*".

**Partie B**

On considère une suite $(u_n)$, définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(v_n)$ sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si $(u_n)$ est convergente, alors $(v_n)$ est convergente.

2. Si $(u_n)$ est minorée par 2, alors $(v_n)$ est minorée par $-1$.

3. Si $(u_n)$ est décroissante, alors $(v_n)$ est croissante.

4. Si $(u_n)$ est divergente, alors $(v_n)$ converge vers zéro.

**E.25**

1. La suite $u$ est définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan, la droite d'équation $y=\frac{1}{3}\cdot x+\frac{23}{27}$ et le point $A$ de coordonnées $(2\,;0)$.
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite $u$.

b. Démontrer que si la suite $u$ est convergente alors sa limite est $\ell=\frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n \geqslant \frac{23}{18}$$

d. Étudier la monotonie de la suite $u$ et donner sa limite.

2. a. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\cdot\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

c'est-à-dire que :

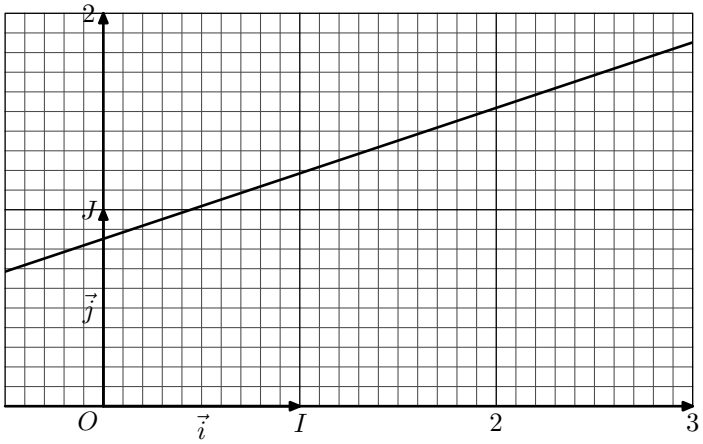
$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\cdot\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

b. La suite $v$ est définie par $v_n=1{,}2777...7$ avec $n$ décimales consécutives égales à 7. Ainsi :

$$v_0 = 1{,}2 \quad ; \quad v_1 = 1{,}27 \quad ; \quad v_2 = 1{,}277$$

En utilisant la question a démontrer que la limite de la suite $v$ est un nombre rationnel $r$ *(c'est-à-dire le quotient de deux entiers.)*.

3. La suite $u$ définie au 1 et la suite $v$ sont-elles adjacentes? Justifier.




**E.26** *Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.*
*Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.*
*Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.*
*Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.*

1. Les suites suivantes sont convergentes :

a. $\left(\frac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ b. $\left(\frac{2n+(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c. $\left(n\cdot\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ d. $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2. On construit trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ ayant, pour tout entier naturel $n$, les propriétés suivantes :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty}(u_n) = -1 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty}(w_n) = 1$$

Alors :

a. $\lim_{n\mapsto+\infty}(v_n) = 0$

b. La suite $(u_n)$ est minorée.

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.

d. On ne sait pas dire si la suite $(v_n)$ a une limite ou non.

3. Une suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a. La suite $(u_n)$ converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y=x$ et $y=2x-1$.

b. La suite $(v_n)$, définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-1$, est géométrique.

c. La suite $(v_n)$ est majorée.

d. La suite $(w_n)$, définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n=\ln(u_n-1)$, est arithmétique.

4. Deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont définies pour $n>0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

a. Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont toutes deux croissantes.

b. $x_3=\frac{19}{20}$ et $y_3=\frac{37}{60}$.

c. Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ ne sont pas majorées.

d. Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont adjacentes.

**E.27**

1. Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et tout $x$ de $[0\,;1]$ :
$$\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\leqslant\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}$$

2. a. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+n}dx$

   b. Déduire en utilisant 1, que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\leqslant\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
puisque
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

3. On appelle $U$ la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par :
$$U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$$
Démontrer que $U$ est décroissante *(on pourra utiliser 2 b)*

4. On désigne par $V$ la suite de terme général :
$$V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$
Démontrer que $V$ est croissante.

5. Démontrer que $U$ et $V$ convergent vers une limite commune notée $\gamma$.
Déterminer une valeur approchée de $\gamma$ à $10^{-2}$ près par la méthode de votre choix.

## 6. *Suite : passage à la limite*

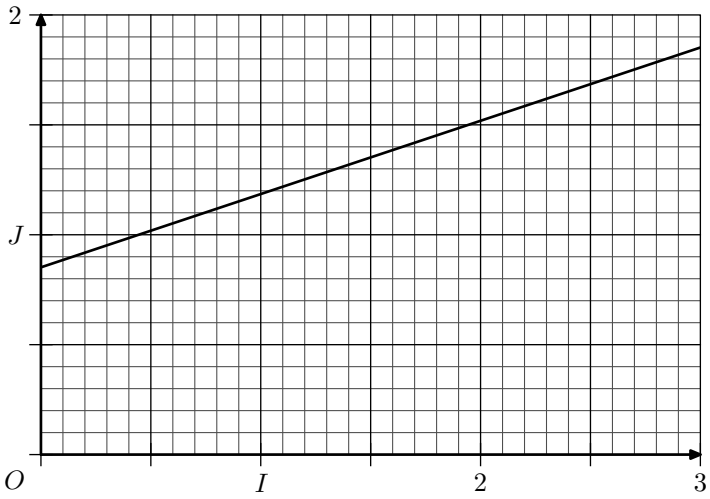
**E.28** La suite $u$ est définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot u_n+\dfrac{23}{27} \quad \text{pour tout entier naturel } n\end{cases}$$

1. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en annexe, la droite d'équation $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{23}{27}$ et le point $A$ de coordonnées $(2\,;0)$.
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite $u$.

2. Démontrer que si la suite $u$ est convergente alors sa limite est $\ell=\dfrac{23}{18}$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a :
$u_n\geqslant\dfrac{23}{18}$.

4. Étudier la monotonie de la suite $u$ et donner sa limite.




**E.29** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2\cdot u_n-1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$
Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(u_n)$ est divergente ; pour cela, effectuons un raisonnement par l'absurde, supposons que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ :

1. Déterminer la valeur de $\ell$.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$v_n=u_n-\ell$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

2. Établir que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. En déduire que la suite $(u_n)$ est divergente.

**E.30** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}\cdot u_n-1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)$ converge. On note $\ell$ sa valeur de convergence.
Déterminer, par un passage à la limite, la valeur de $\ell$.

2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n=u_n+3$

   a. Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.

   b. En déduire l'expression du terme $u_n$ en fonction de $n$.

   c. Établir la convergence de la suite $(u_n)$.

**E.31**

1. Si une suite $(u_n)$ converge vers $\ell$, vers quelle valeur converge l'expression $\frac{1}{3}\cdot u_n+\frac{1}{3}$.

2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

On admet que la suite $(u_n)$ converge vers un nombre noté $\ell$.

a. Déterminer la valeur exacte des huit premiers termes de la suite $(u_n)$.

b. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant en y inscrivant les valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

| $n$ | $u_n$ | $\frac{1}{3}\cdot u_n+\frac{1}{3}$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |

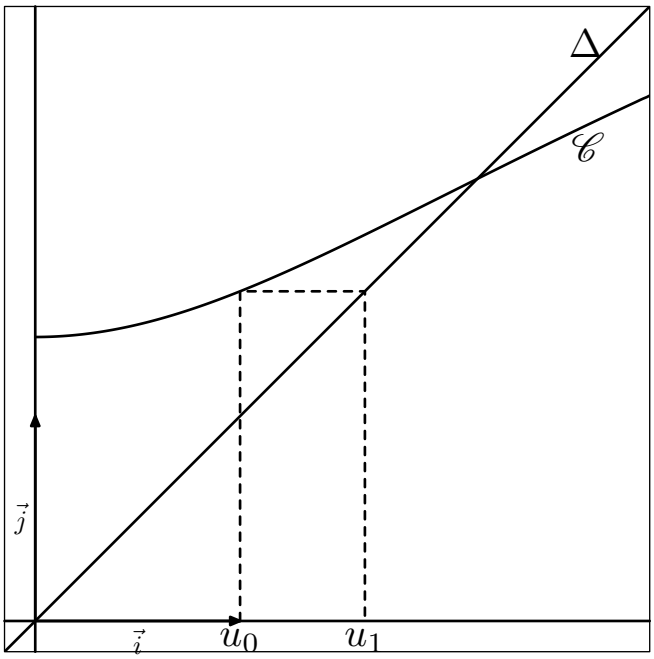
c. Émettre une conjecture sur les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}$$

d. Résoudre l'équation : $x=\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{3}$

e. En déduire la valeur de la limite $\ell$.

**E.32** La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f$ et la droite $\Delta$ sont tracés sur le graphique donné ci-dessous :




On considère la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = f(x) - x$

On admet les propriétés suivantes :

- La fonction $f$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction $g$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha)=0$ ; le nombre $\alpha$ appartient à l'intervalle $[2\,;\,3]$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel $n$ par :
$u_{n+1} = f(u_n)$

1. À partir de $u_0$, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta$, on a placé $u_1$ sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes $u_2$ et $u_3$ sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de constructions.

2. Placer le point $I$ de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse $\alpha$.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :
$1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$

b. Démontrer que la suite $(u_n)$ converge.

c. Déterminer sa limite.

## 7. *Suite et passage à la limite - Annales*

**E.33** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. a. Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Étudier le sens de variation de $f$, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. *(On prendra comme unité 2 cm).*

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points $A_0$, $A_1$, $A_2$ et $A_3$ de l'axe $\left(O\,;\vec{i}\right)$ d'abscisses respectives $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

2. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x\geqslant\sqrt{2}$ : $f(x)\leqslant x$.

c. En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Montrer que $\ell$ est solution de l'équation : $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

En déduire sa valeur.

**E.34** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=5$ et pour tout nombre entier $n$ par :

$$u_{n+1}=\frac{4\cdot u_n-1}{u_n+2}$$

Si $f$ est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$ alors on a, pour tout nombre entier naturel $n$ :

$u_{n+1}=f(u_n)$.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ ainsi que la droite $\Delta$ d'équation $y=x$.

1. a. Sur l'axe des abscisses, placer $u_0$ puis construire $u_1$, $u_2$ et $u_3$ en laissant apparents les traits de construction.

   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite $(u_n)$?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a :

   $u_n-1>0$

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1 b

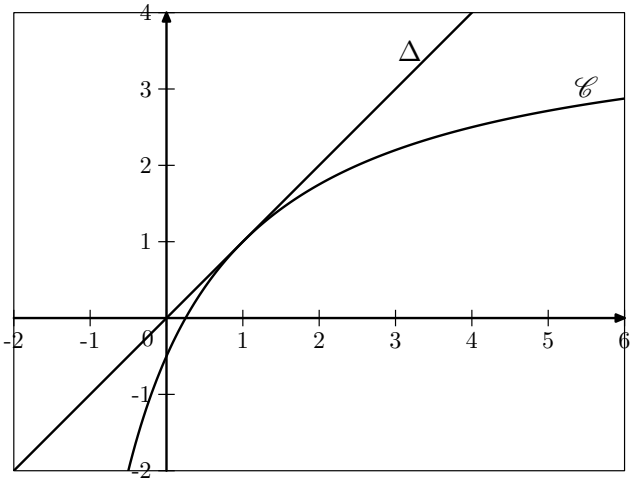
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite $(u_n)$ par une autre méthode, en déterminant une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

   Pour tout nombre entier naturel $n$, on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$

   a. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   b. Pour tout nombre entier naturel $n$, exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.



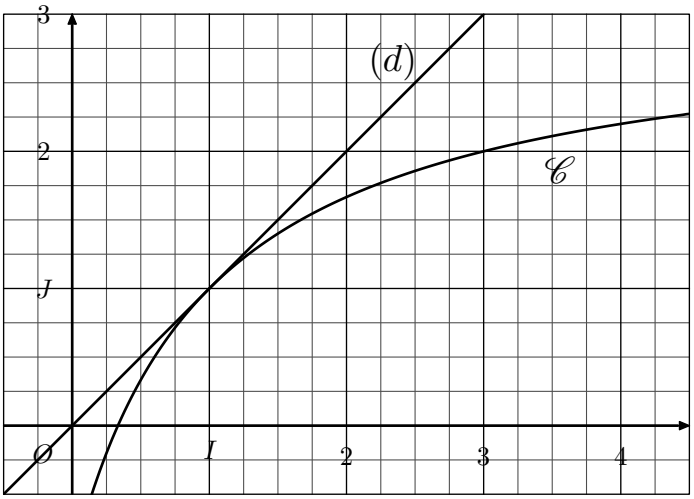

**E.35** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=3-\frac{4}{x+1}$$

On considère la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$u_0=4$ ; $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On a tracé, ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la droite $(d)$ d'équation $y=x$.




   a. Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$. Faire apparaître les traits de construction.

   b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)$?

2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1 b :

   a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n\geqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   b. Montrer que la fonction $f$ est croissance sur $[0\,;+\infty[$. En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a :

   $u_{n+1}\leqslant u_n$.

   c. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## 8. *Anciennes annales (avant 2012)*

**E.36** **Partie A : étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$.

1. Calculer les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en 1.

2. Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En déduire que si $x \geqslant e$ alors $f(x) \geqslant e$.

**Partie B : étude d'une suite récurrente**

On considère la suite $(u_n)$ définie par :
$u_0 = 5$ ; $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$ d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_0$, $u_1$ et $u_2$. On laissera apparaître les traits de construction.

   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite $(u_n)$ ?

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \geqslant e$.

   b. Déterminer les variations de la suite $(u_n)$.

   c. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

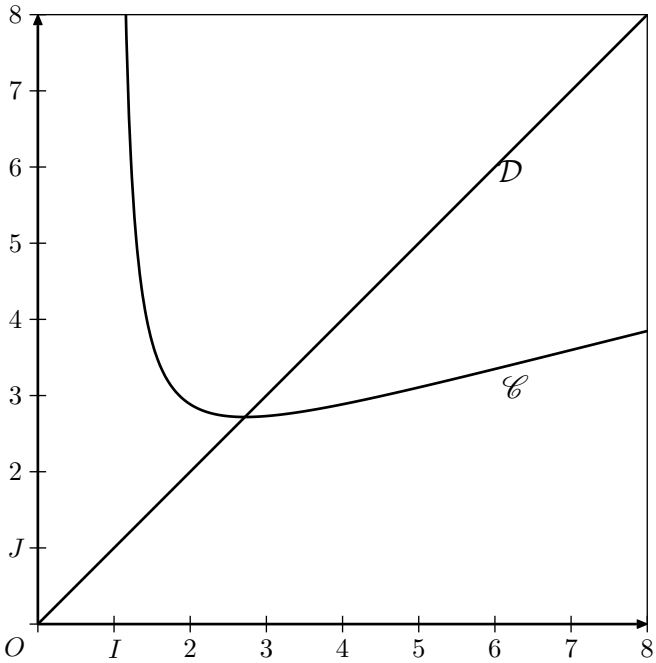
   d. Déterminer sa limite $\ell$.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X ← 5
Y ← 0
Tant que  X>2,72
            X
    X ←  ------
          ln X
    Y ←  Y+1
Fin Tant que
```

   À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur de la variable `Y` à la fin de l'exécution de cet algorithme :

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 3,106 674 672 8 |
| 2 | 2,740 652 532 3 |
| 3 | 2,718 372 634 6 |
| 4 | 2,718 281 830 01 |
| 5 | 2,718 281 828 |




**E.37** On considère l'équation notée : $(E)$ : $\ln x = -x$

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation $(E)$, admet une solution unique notée $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement.

**Partie A : existence et unicité de la solution**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. Vérifier que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$

**Partie B : encadrement de la solution $\alpha$**

On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = \dfrac{4 \cdot x - \ln x}{5}$

1. Étude de quelques propriétés de la fonction $g$.

   a. Étudier le sens de variation de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   b. En déduire que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

   c. Démontrer qu'un nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est solution de l'équation $(E)$ si, et seulement si, $g(x) = x$.

2. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n$, par :
   $u_{n+1} = g(u_n)$

   a. En utilisant le sens de variation de la fonction $g$, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ :
   $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

   b. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

3. Recherche d'une valeur approchée de $\alpha$ :

(a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $u_{10}$, arrondie à la sixième décimale.

(b) On admet que $u_{10}$ est une valeur approchée par défaut à $5\times10^{-4}$ près de $\alpha$.

En déduire un encadrement de $\alpha$ sous la forme :

$u \leqslant \alpha \leqslant v$

où $u$ et $v$ sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

**E.38** **Partie A**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 5\cdot\ln(x+3) - x$

(1) (a) On appelle $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Donner, dans un tableau, les variations de $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

(c) Montrer que, pour tout $x$ strictement positif, on a :

$$f(x) = x\cdot\left(5\cdot\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

(d) En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

(e) Compléter le tableau de variations de $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

(2) (a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On notera $\alpha$ cette solution.

(b) Après avoir vérifié que $\alpha$ appartient à l'intervalle $[14\,;15]$, donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

(c) En déduire le signe de $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

**Partie B**

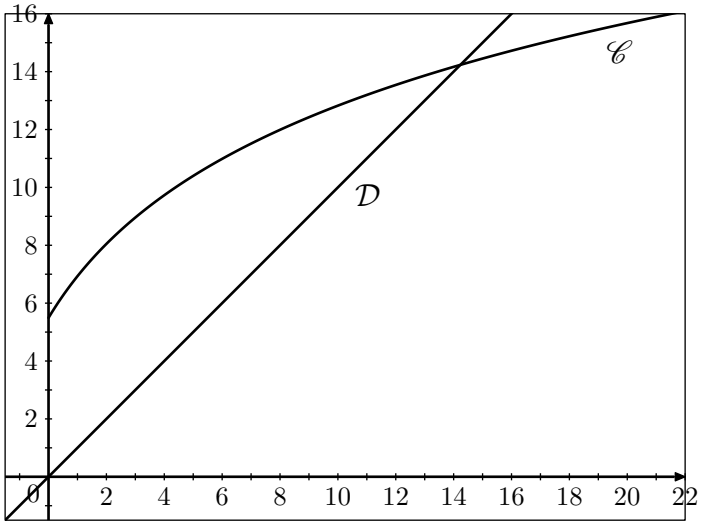
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1}=5\cdot\ln(u_n+3) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = 5\ln(x+3)$

Ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction $g$.




(1) (a) Construire sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$ de la suite $(u_n)$ en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

(b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite $(u_n)$.

(2) (a) Étudier le sens de variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

(b) Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$ où $\alpha$ est défini dans la partie **A** question (2) (a).

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$0 \leqslant u_n \leqslant a$

(d) Démontrer alors la conjecture émise à la question (1) (b) de la partie **B**.

(e) En utilisant la question (2) (a) de la partie **A**, justifier que :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \alpha$$

(3) On considère l'algorithme suivant

```
u ← 4
Tant que  u−14,2<0
    u ← 5·ln(u+3)
Fin Tant que
```

(a) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Justifier que l'exécution de cet algorithme se termine.

(b) Donner la valeur de la variable u à la fin de l'exécution de cet algorithme *(on arrondira à 5 décimales).*

**E.39** **Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

1. a. Déterminer les limites de la fonction $f$ en 1 et en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de la fonction $f$.

2. Soit $(u_n)$ la suite définie par :

   $u_0=5 \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a. On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y=x$ et les points $M_1$ et $M_2$ de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $u_1$ et $u_2$. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite $(u_n)$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n\geqslant e$ *(on pourra utiliser la question 1 b)*

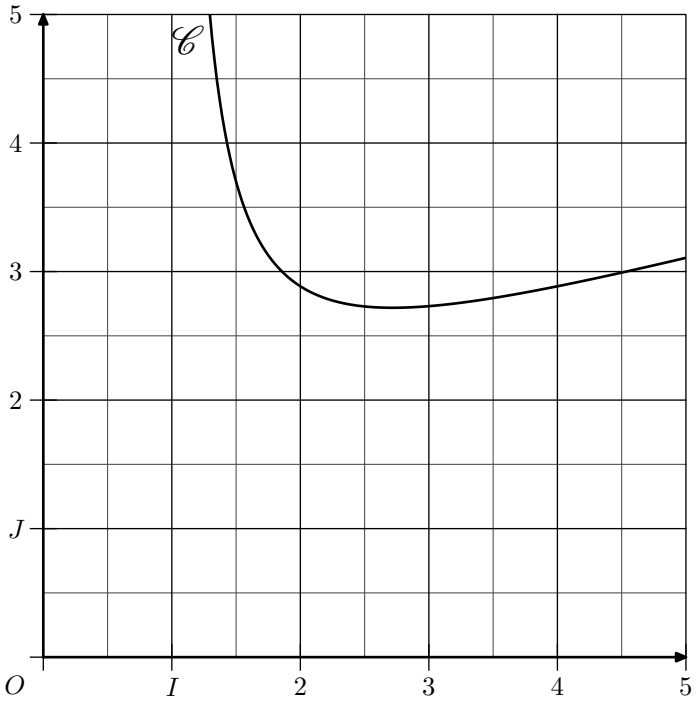
   c. Démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$ de l'intervalle $[e\,;+\infty[$.

**Partie B**

On rappelle que la fonction $f$ est continue sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ :

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $(f(u_n))$, démontrer que : $f(\ell)=\ell$.

2. En déduire la valeur de $\ell$.




**E.40** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ *(unité graphique 10 cm)*.

**Partie A.**

1. a. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

   c. Construire $\Gamma$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

2. a. Montrer que, pour tout réel $m$ de $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

   b. Dans le cas où $m=\frac{1}{4}$, on nomme $\alpha$ et $\beta$ les solutions *(avec $\alpha<\beta$)*.
   Déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$.

   c. Résoudre l'équation $f(x)=m$ dans le cas où $m=0$ et $m=\frac{1}{e}$.

**Partie B.**

1. On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   où $\alpha$ est le réel défini à la question **A** 2 b

   a. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $u_n>0$.

   b. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

   c. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite $(w_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n=\ln u_n$.

   a. Montrer que, pour tout $n$ entier naturel, on a :
   $u_n = w_n - w_{n+1}$

   b. On pose : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.
   Montrer que : $S_n=w_0-w_{n+1}$.

   c. En déduire : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

3. On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0$ *($v_0>0$)* et, pour tout entier naturel $n$ :
   $v_{n+1} = v_n\cdot\mathrm{e}^{-v_n}$

   Existe-t-il une valeur de $v_0$ différente de $\alpha$ telle que, pour tout $n\geqslant1$, on ait : $u_n=v_n$ ?
   Si oui, préciser laquelle.

## 9. *Suites homographiques et suites géométriques*

**E.41** On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1+0.5\cdot u_n}{0{,}5+u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n>1$

1. On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par :
   $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

   a. Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

(b) Calculer $v_0$ puis écrire $v_n$ en fonction de $n$.

(2) (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $v_n \neq 1$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**E.42** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2-u_n}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite $(u_n)$ sont différents de $-2$ et de $0$.

(1) On définit la suite $(v_n)$ définie par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(a) Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

(b) Exprimer les termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$.

(2) En déduire une expression des termes de la suite $(u_n)$ en fonction de $n$.

(3) Déterminer la limite des termes de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

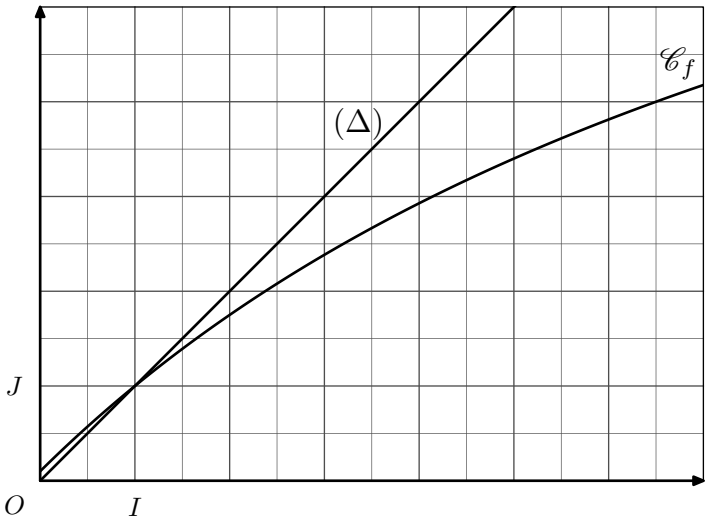
**E.43** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{13}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{10 \cdot u_n + 1}{u_n + 10} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite $(u_n)$ sont strictement supérieurs à 1.

(1) On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{10 \cdot x + 1}{x + 10}$.

On représente ci-dessous, dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ et la première bissectrice $(\Delta)$ du plan.




(a) Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$

(b) Faire une conjecture quant à la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

(2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique.

(b) Donner l'expression des termes de la suite $(v_n)$ en fonction de leur rang $n$.

(3) (a) Établir l'égalité suivante pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$

(b) En déduire l'expression des termes de la suite $(u_n)$ en fonction de leur rang $n$.

(4) Déterminer la limite de $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**E.44** Une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par son premier terme $U_1$ et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{6+U_n}{2+U_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(1) Montrer qu'il existe deux valeurs $a$ et $b$ de $U_1$ $(a<b)$ pour lesquelles la suite est constante.

(2) (a) Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même de $U_n$.

(b) Dans ces conditions, calculer : $\dfrac{U_{n+1}-a}{U_{n+1}-b}$ en fonction de $\dfrac{U_n - a}{U_n - b}$.

(3) On suppose que $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$ et on considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

(a) Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique.

(b) Calculer la limite de $|V_n|$ quand $n$ tend vers plus l'infini. En déduire celle de $U_n$.

## 10. *Suites homographiques et suites arithmétiques*

**E.45** Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{4 \cdot u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n > 1$

On définit les termes de la suite $(u_n)$ par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
2. Pour tout entier naturel ,, exprimer $v_n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)$

**E.46** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

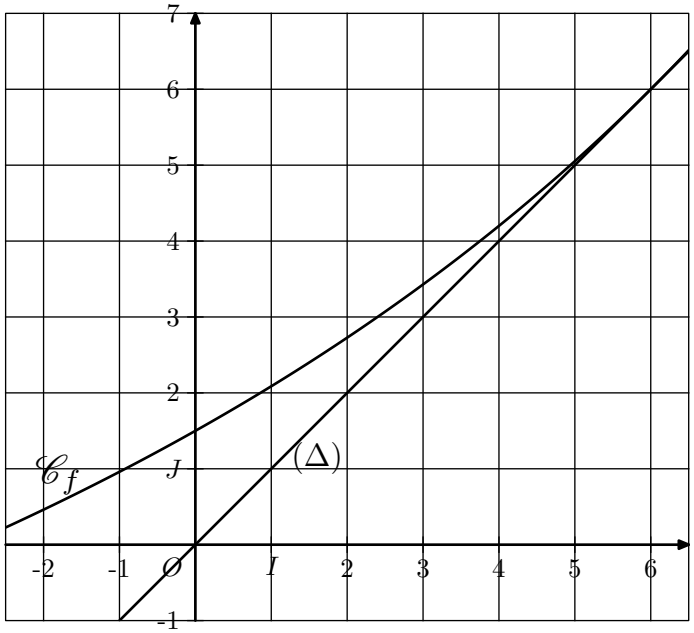
$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{-u_n - 2}{2 \cdot u_n + 3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que pour tous les termes de la suite $(u_n)$ sont définis et qu'ils vérifient : $u_n > -1$

1. On définit la suite $(v_n)$ définie par la relation :
$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
   a. Justifier que la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera les éléments caractéristiques.
   b. Exprimer les termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$.
2. a. Établir l'égalité :
$$u_n = \frac{4 - 10 \cdot n}{1 + 10 \cdot n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
   b. Montrer que les termes de la suite $(u_n)$, pour $n \geqslant 1$, admettent l'expression :
$$u_n = \frac{\frac{4}{n} - 10}{\frac{1}{n} + 10}$$
   c. Déterminer la limite des termes de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**E.47** Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}$$




La droite $(\Delta)$ est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que la suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ et que ses termes vérifient la comparaison : $u_n < 6$

1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite $(u_n)$.
2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite $(u_n)$.
3. On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$w_n = \frac{1}{u_n - 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
   a. Établir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{18}$
   b. Donner la nature et les caractéristiques de la suite $(w_n)$ ainsi que l'expression du terme $w_n$ en fonction de $n$.
   c. Déterminer l'expression du terme $u_n$ en fonction de $n$.
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)$