# Hors programme lycée / Suites et variations

## 1. Etude des variations

**E.1** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ positif ou nul par :
$u_n = -8{\cdot}n^2 + 5{\cdot}n + 7$

1. Établir que le terme de rang $n{+}1$ de la suite $(u_n)$ admet pour expression :
$u_{n+1} = -8{\cdot}n^2 - 11{\cdot}n + 4$

2. En étudiant la différence $u_{n+1}-u_n$ de deux termes consécutifs de la suite $(u_n)$, montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**E.2** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ strictement positif par : $u_n = \dfrac{3{\cdot}n-1}{(n-1)^2}$

En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

**E.3** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 3{\cdot}n^2 - 2{\cdot}n + 4$

1. Exprimer le terme $u_{n+1}$ en fonction de $n$.

2. En étudiant la différence $u_{n+1}-u_n$ de deux termes consécutifs de la suite $(u_n)$, montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**E.4** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par la relation :
$u_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$

1. Déterminer la valeur exacte des cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

Puis, compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs approchées aux centièmes près :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | |

2. Pour tout entier naturel $n$, montrer que :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2+5{\cdot}n+3}{(n+2)(n+3)}$$

3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$ sur $\mathbb{N}$.

**E.5** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 400{\times}0{,}8^n + 30$

1. Établir, pour tout entier naturel $n$ $(n\in\mathbb{N})$, on a la relation :
$u_{n+1} - u_n = -80{\times}0{,}8^n$

2. En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

**E.6** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 1{,}2^n + 30$

1. Établir, pour tout entier naturel $n$ $(n\in\mathbb{N})$, on a la relation :
$u_{n+1} - u_n = 0{,}2{\times}1{,}2^n$

2. En déduire que la suite $(u_n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$.

**E.7** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = \dfrac{n+3}{n+1}$

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.

2. a. Établir l'identité pour tout entier naturel $n$ :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$

b. En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

**E.8**

**Rappels :** pour tous nombres réels $a$ et $b$ et pour tous entiers relatifs $n$ et $m$, on a :
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^n{\times}a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a\neq0)$
- $(a^n)^m = a^{n\times m}$
- $a^n{\times}b^n = (a{\times}b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ $(b\neq0)$

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)$ est strictement décroissante.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$v_n = \dfrac{3^n}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Montrer que $(v_n)$ est strictement croissante.

**E.9** Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1. La suite $(u_n)$ est définie par la formule explicite :
$u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

2. La suite $(v_n)$ est définie par la formule explicite :
$v_n = \dfrac{3}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

**E.10** On considère la suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. Exprimer la valeur du terme $u_n$ en fonction de son rang $n$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**E.11** On considère la suite géométrique $(v_n)$ de premier terme 24 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite $(v_n)$.
2. Exprimer la valeur du terme $v_n$ en fonction de son rang $n$.
3. Démontrer que la suite $(v_n)$ est décroissante.

**E.12** Une entreprise décide de rentrer en bourse. Lors de son entrée en bourse, le prix d'une action est de 50 €. Elle espère que le prix de son action augmente de 5 % par an.

On note $u_0$ le prix de l'action lors de son entrée en bourse et $u_n$, pour tout entier $n$ strictement positif, le prix de l'action au bout de $n$ années.

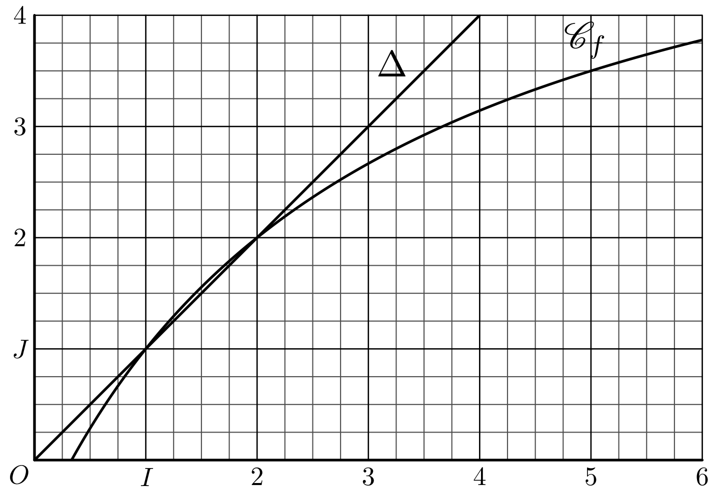
1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la suite $(u_n)$.
2. a. Donner la formule explicite du terme de rang $n$ de la suite $(u_n)$.
   b. Donner le prix de l'action au bout de 10 ans
3. a. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)$. Justifier votre réponse.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le prix de l'action dépassera 100 €.

**E.13**

1. On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
   $u_n = 3{\cdot}n + 5$
   a. Établir que le terme de rang $n+1$ admet pour expression :
      $u_{n+1} = 3{\cdot}n + 8$
   b. En étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$, montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n$ positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par la relation :
   $v_n = -2{\cdot}n^2 + n + 2$
   a. Établir que le terme de rang $n+1$ admet pour expression :
      $v_{n+1} = -2{\cdot}n^2 - 3{\cdot}n + 1$
   b. Établir que la différence consécutive de deux termes de la suite $(v_n)$ a pour expression : $v_{n+1}-v_n = -4{\cdot}n-1$
   c. En déduire que la suite $(v_n)$ est une suite décroissante sur $\mathbb{N}$.

**E.14** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$$f(x) = \frac{6x-2}{2x+1}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ :




La droite Δ est la première bissectrice du plan ; son équation cartésienne est $y=x$.

1. a. Établir l'égalité :
      $f(x) - x = \dfrac{-2x^2+5x-2}{2x+1}$
   b. Déterminer le tableau de signes de l'expression $f(x)-x$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   c. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et Δ sur $[0\,;+\infty[$.
2. On considère la suite $(u_n)$ définie par :
   $u_0 = 6 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$
   a. Représenter, sur l'axe des abscisses du repère, les six premiers termes de la suite $(u_n)$ *(on laissera apparent les traits de construction)*.
   b. Déterminer la valeur des trois premiers termes de la suite $(u_n)$
   c. On admet que tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à 2. En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**E.15** Pour chaque question, déterminer, en étudiant la différence $u_{n+1}-u_n$, le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie par :

a. $u_n = 3n^2 + n + 1$

b. $u_n = 2^n + 3n - 1$

c. $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ ; $u_0 = -2$

d. $u_{n+1} = u_n - n + 5$ ; $u_0 = 2$

**E.16** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang $n$ est donné par la formule :
$u_n = n^2 - 7n + 1$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | | | | | | |

2. Après avoir donné le tableau de variations de la fonction $f$ dont l'image de $x$ est défini par :
   $f(x) = x^2 - 7x + 1$
   Établir que la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang 4.

## 2. *Suites et recherche d'un seuil*

**E.17** Un commerçant venant d'ouvrir une boutique remarque que son chiffre d'affaires à commencer à 25 000 euros par mois et à progresser tous les mois de 2 %.

Il décide de modéliser la progression de son chiffre d'affaires par la suite $(u_n)$ où $u_0$ représente le chiffre d'affaires lors d'ouverture de la boutique.

1. Donner la nature et les caractéristiques de la suite $(u_n)$.
2. a. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de mois, son chiffre d'affaires dépassera 30 000 euros.

   b. Compléter l'algorithme afin qu'à la fin de son exécution, la variable `n` ait pour valeur le nombre de mois à attendre pour que son chiffre d'affaires dépassera 30 000 euros.

```
n ← 0
u ← 25 000
Tant que  ... faire
     n ← ...
     u ← ...
Fin Tant que
```

**E.18** On considère la suite géométrique $(u_n)$, de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 50$.

1. a. Recopier et compéter l'algorithme afin, qu'à la fin de son exécution, la variable `U` ait pour valeur $25^e$ terme de cette suite, c'est-à-dire $u_{24}$ :

```
U ← ...
Pour N allant de 1 à 24
    U ← ...
Fin Pour
```

   b. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

   c. Calculer $u_{24}$ et donner une valeur approchée du résultat à $10^{-3}$ près.

2. Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que : $u_n < 0{,}01$.

**E.19** Un magasin propose une carte de fidélité afin de profiter d'avantages lors d'achats. La première année, la carte de fidélité a été offerte à 200 clients.
On observe que le nombre de clients possédant la carte de fidélité augmente de 6 % par an.

On modélise le nombre de possesseurs de la carte de fidélité par une suite $(u_n)$ où $n$ désigne le nombre d'années depuis l'ouverture du magasin.

1. Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$ et donner le résultat arrondi à l'unité.
2. Donner la nature de la suite et ses éléments caractéristiques. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la valeur du terme de rang 6 arrondie à l'unité.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le nombre de possesseurs de la carte de fidélité dépasse 400 personnes.

## 3. *Suites auxiliaires : variations*

**E.20** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On définit la suite $(v_n)$ sur $\mathbb{N}$ par la relation :
   $v_n = 2\cdot u_n + 12$

   a. Démontrer la relation : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. Donner l'expression des termes de la suite $(v_n)$ en fonction de $n$. Justifier votre démarche.

2. a. Justifier que pour tout entier naturel $n$, on a :
   $u_n = 14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 6$

   b. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$