Hors programme lycée / Suites et variations

1. Etude des variations

E.1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul par :
$u_n = -8{\cdot}n^2 + 5{\cdot}n + 7$

1. Établir que le terme de rang $n+1$ de la suite (u_n) admet pour expression :
$u_{n+1} = -8{\cdot}n^2 - 11{\cdot}n + 4$
2. En étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est décroissante.

E.2 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul par :
$u_n = -7{\cdot}n^2 + 6{\cdot}n + 1$

1. Établir que le terme de rang $n+1$ de la suite (u_n) admet pour expression :
$u_{n+1} = -7{\cdot}n^2 - 8{\cdot}n$
2. En étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est décroissante.

E.3 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif par : $u_n = \dfrac{3{\cdot}n-1}{(n-1)^2}$

En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

E.4 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif par : $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$

En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

E.5 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 3{\cdot}n^2 - 2{\cdot}n + 4$

1. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de n.
2. En étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est croissante.

E.6 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :
$u_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$

1. Déterminer la valeur exacte des cinq premiers termes de la suite (u_n).

   Puis, compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs approchées aux centièmes près :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. Pour tout entier naturel n, montrer que :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2 + 5{\cdot}n + 3}{(n+2)(n+3)}$
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.7 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 400 \times 0{,}8^n + 30$

1. Établir, pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$, on a la relation :
$u_{n+1} - u_n = -80 \times 0{,}8^n$
2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.8 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :
$u_n = 1{,}2^n + 30$

1. Établir, pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$, on a la relation :
$u_{n+1} - u_n = 0{,}2 \times 1{,}2^n$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

E.9 L'espèce des éléphants d'Asie sont en voie de disparition. On estime la population en 2017 à 415 000 individus. On estime que le nombre d'éléphants diminue de 3 % par an.

On note u_n le nombre d'éléphants d'Asie à l'année $2017+n$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
2. a. Donner la formule explicite du terme de rang n de la suite (u_n).
   b. Donner le nombre d'éléphants d'Asie en 2020, arrondi à l'unité près.
3. a. Donner le sens de variation de la suite (u_n). Justifier votre réponse.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le nombre d'éléphants d'Asie sera inférieure à 200 000.

E.10 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :

$$u_n = \frac{1}{2 \cdot n + 1}$$

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Établir l'identité pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2 \cdot n + 1)(2 \cdot n + 3)}$$
   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.11 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par la relation :

$$u_n = \frac{n+3}{n+1}$$

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Établir l'identité pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$$
   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.12

Rappels : pour tous nombres réels a et b et pour tous entiers relatifs n et m, on a :

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ $(b \neq 0)$

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :
$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
Montrer que (u_n) est strictement décroissante.
2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$v_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
Montrer que (v_n) est strictement croissante.

E.13 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$v_{n+1} = v_n - {v_n}^2 - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et la condition initiale $v_0 = 2$.

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (v_n) est décroissante.

E.14 Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1. La suite (u_n) est définie par la formule explicite :
$$u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
2. La suite (v_n) est définie par la formule explicite :
$$v_n = \frac{3}{2^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

E.15 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule :

$$u_n = n^2 - 7n + 1$$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donné le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est défini par :
$$f(x) = x^2 - 7x + 1$$
Établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

E.16 Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
$$u_n = -32n + 102$$
Montrer que cette suite est décroissante.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
$$v_n = \sqrt{2n - 1}$$
Montrer que cette suite est croissante.
3. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
$$w_n = 2n - \frac{25}{n}$$
Montrer que la suite (w_n) est croissante.

E.17 On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

E.18 On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 24 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n).
2. Exprimer la valeur du terme v_n en fonction de son rang n.
3. Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

E.19 Une entreprise décide de rentrer en bourse. Lors de son entrée en bourse, le prix d'une action est de 50 €.
Elle espère que le prix de son action augmente de 5 % par an.

On note u_0 le prix de l'action lors de son entrée en bourse et u_n, pour tout entier n strictement positif, le prix de l'action au bout de n années.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
2. a. Donner la formule explicite du terme de rang n de la suite (u_n).
   b. Donner le prix de l'action au bout de 10 ans
3. a. Donner le sens de variation de la suite (u_n). Justifier votre réponse.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le prix de l'action dépassera 100 €.

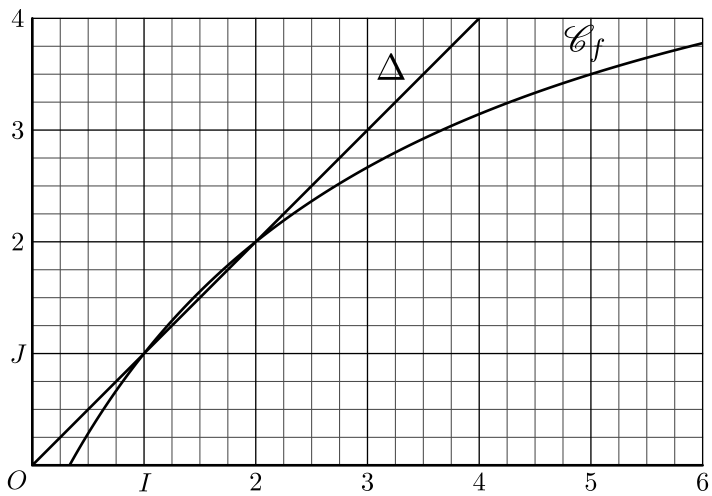
E.20

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul *($n \in \mathbb{N}$)* par la relation :
   $u_n = 3 \cdot n + 5$
   a. Établir que le terme de rang $n+1$ admet pour expression :
   $u_{n+1} = 3 \cdot n + 8$
   b. En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n positif ou nul *($n \in \mathbb{N}$)* par la relation :
   $v_n = -2 \cdot n^2 + n + 2$
   a. Établir que le terme de rang $n+1$ admet pour expression :
   $v_{n+1} = -2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$
   b. Établir que la différence consécutive de deux termes de la suite (v_n) a pour expression : $v_{n+1} - v_n = -4 \cdot n - 1$
   c. En déduire que la suite (v_n) est une suite décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{6x - 2}{2x + 1}$$

Dans le repère $(O ; I ; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



La droite Δ est la première bissectrice du plan ; son équation cartésienne est $y = x$.

1. a. Établir l'égalité :
   $$f(x) - x = \frac{-2x^2 + 5x - 2}{2x + 1}$$
   b. Déterminer le tableau de signes de l'expression $f(x) - x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   c. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et Δ sur $[0 ; +\infty[$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :
   $u_0 = 6 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$
   a. Représenter, sur l'axe des abscisses du repère, les six premiers termes de la suite (u_n) *(on laissera apparent les traits de construction)*.
   b. Déterminer la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n)
   c. On admet que tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à 2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

E.22 Pour chaque question, déterminer, en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$, le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n = 3n^2 + n + 1$

b. $u_n = 2^n + 3n - 1$

c. $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \; ; \; u_0 = -2$

d. $u_{n+1} = u_n - n + 5 \; ; \; u_0 = 2$

E.23 Pour chaque question, utiliser la calculatrice pour effectuer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ définie par :

a. $u_n = n^3 - 2n^2 - 3n$

b. $u_n = \dfrac{5^n}{n+2}$

c. $u_n = 3\big[1 + (-1)^n\big] + 4$

d. $u_n = \dfrac{2n^2 + 1}{2n + 5}$

E.24 Pour chacune des questions suivantes, déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

a. $u_n = \dfrac{1}{2}n - \dfrac{1}{4}$

b. $u_n = 3 - 2n$

c. $u_n = -2n^2 - 3n + 2$

d. $u_n = 3n^2 - 7n + 4$

2. *Suites et recherche d'un seuil*

E.25 Un commerçant venant d'ouvrir une boutique remarque que son chiffre d'affaires à commencer à 25 000 euros par mois et à progresser tous les mois de 2 %.

Il décide de modéliser la progression de son chiffre d'affaires par la suite (u_n) où u_0 représente le chiffre d'affaires lors d'ouverture de la boutique.

1. Donner la nature et les caractéristiques de la suite (u_n).

2. a. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de mois, son chiffre d'affaires dépassera 30 000 euros.

   b. Compléter l'algorithme afin qu'à la fin de son exécution, la variable `n` ait pour valeur le nombre de mois à attendre pour que son chiffre d'affaires dépassera 30 000 euros.

```
n ← 0
u ← 25 000
Tant que  ... faire
    n ← ...
    u ← ...
Fin Tant que
```

E.26 Afin de lutter contre la pollution de l'air, un département a contraint dès l'année 2013 certaines entreprises à diminuer chaque année la quantité de produits polluants qu'elles rejettent dans l'air.

Ces entreprises ont rejeté 410 tonnes de ces polluants en 2013 et 332 tonnes en 2015. On considère que le taux de diminution annuel de la masse de polluants rejetés est constant.

1. Justifier qu'on peut considérer que l'évolution d'une année sur l'autre correspond à une diminution de 10 %.

2. On admet que ce taux de 10 % reste constant pour les années à venir.

   a. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la quantité de polluants rejetés par ces entreprises ne dépassera plus le seuil de 180 tonnes fixé par le conseil départemental.

   b. Compléter l'algorithme ci-dessous afin que la variable `n` ait, à la fin de son exécution, pour valeur l'année à laquelle la quantité de polluants rejetés ne dépassera pas 180 tonnes.

```
n ← 0
u ← 410
Tant que ...
    n ←  n+1
    u ←  u×0;9
Fin Tant que
n ←  n+...
```

E.27 On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Considérons le code :

```
Fonction f(n)
    u ← 1
    Pour i allant de 1 à n
        u ← 2× u
    Fin Pour
    Renvoyer u
```

L'appel à la fonction `f(n)` renvoie au programme la valeur du terme de la suite (u_n) de rang n.

Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

n	0	1	2	10	20
u_n					

E.28 Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.
Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %.

On modélise le nombre de films proposés par une suite (u_n) où n désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité près.

2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n). Exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la valeur du terme de rang 6 arrondie à l'unité.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de mois le nombre de films proposés dépasse 800 films proposés.

E.29 Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate qu'entre les vélos inutilisables, car perdus, volés ou détériorés et les nouveaux vélos acquis, le nombre de vélos utilisables augmente de 5 % chaque année.

Le 1^{er} janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.

On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier nature n, u_n est le nombre de vélos le 1^{er} janvier de l'année $2017+n$.
Ainsi, $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n$.

1. a. Justifier le coefficient 1,05 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

   b. Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1^{er} janvier 2018?

2. La municipalité a décidé d'arrêter l'achat de nouveaux vélos dès que son stock dépassera 500 unités.
   En quelle année, le stock du service municipal sera supérieur à 500 vélos pour la première fois?

E.30 On considère la suite géométrique (u_n), de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 50$.

1. a. Recopier et compéter l'algorithme afin, qu'à la fin de son exécution, la variable `U` ait pour valeur 25^e terme de cette suite, c'est-à-dire u_{24} :

```
U ← ...
Pour N allant de 1 à 24
    U ← ...
Fin Pour
```

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

   c. Calculer u_{24}, puis donner sa valeur arrondie à 10^{-3} près.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
   $u_n < 0{,}01$.

E.31 Un magasin propose une carte de fidélité afin de profiter d'avantages lors d'achats. La première année, la carte de fidélité a été offerte à 200 clients.
On observe que le nombre de clients possédant la carte de fidélité augmente de 6 % par an.

On modélise le nombre de possesseurs de la carte de fidélité par une suite (u_n) où n désigne le nombre d'années depuis l'ouverture du magasin.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité.

2. Donner la nature de la suite et ses éléments caractéristiques. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la valeur du terme de rang 6, arrondie à l'unité près.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le nombre de possesseurs de la carte de fidélité dépasse 400 personnes.

3. *Suites auxiliaires : variations*

E.32 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 7 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \text{ pour tout entier } n\in\mathbb{N}$$

1. On considère la suite (v_n) définie par la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $v_n = u_n - 6$

   a. Établir l'égalité ci-dessous pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot v_n$

   b. Donner le premier terme de la suite (v_n).

   c. Donner le sens de variation de la suite (v_n).

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

E.33 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot u_n - 3 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par la relation :
   $v_n = 2\cdot u_n + 12$

   a. Démontrer la relation : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   b. Donner l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n. Justifier votre démarche.

2. a. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 6$

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

E.34 Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n - n + 1 \quad$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $v_n = u_n - n$

   a. Justifier que pour tout entier naturel n, on a la relation :
   $v_{n+1} = 2\cdot v_n$.

   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (v_n).

3. a. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 3\times 2^n + n$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. *Exercices non-classés*

E.35 On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{n\cdot u_n + 1}{2(n+1)} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

On définit une suite auxiliaire (v_n) par :
$v_n = n\cdot u_n - 1 \quad$ pour tout entier $n \geqslant 1$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a :
   $u_n = \frac{1 + (0{,}5)^n}{n}$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a :
   $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0{,}5n)\cdot(0{,}5)^n}{n\cdot(n+1)}$
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).