Hors programme lycée / Suites

1. Suites quelconques

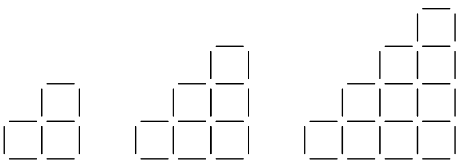
E.1 Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ (b) $u_{n+1} = 2\cdot u_n - 2$; $u_0 = 3$

(c) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$ (d) $u_{n+1} = 2\cdot u_n - 2$; $u_0 = 1$

(e) $u_n = \dfrac{n-2}{n+1}$ (f) $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{u_n+1}$; $u_0 = 2$

E.2 On construit les figures ci-dessous à l'aide de petites baguettes de bois.



1^{er} étape 2^{e} étape 3^{e} étape

Pour n un entier strictement positif $(n\in\mathbb{N}^*)$, on note u_n le nombre de baguettes nécessaires à la construction lors de l'étape n. On a donc :

$$u_1 = 10 \quad ; \quad u_2 = \dots \quad ; \quad u_3 = \dots \quad ; \quad u_4 = \dots$$

E.3 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + \frac{n}{n+1}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.4

(1) Voici des exemples de suites de nombres :

(a) $(\ 2 \ ; \ 5 \ ; \ 8 \ ; \ 11 \ ; \ 14 \ ; \ \dots)$

(b) $(\ 2 \ ; \ 6 \ ; \ 18 \ ; \ 54 \ ; \ 162 \ ; \ \dots)$

(c) $(\ 6 \ ; \ -6 \ ; \ 6 \ ; \ -6 \ ; \ 6 \ ; \ \dots)$

(d) $(\ 1 \ ; \ 3 \ ; \ 7 \ ; \ 15 \ ; \ 31 \ ; \ \dots)$

Pour chacune de ces suites des nombres ; trouver la relation qui permet d'obtenir une valeur en fonction des valeurs précédentes.

(2) Voici d'autres exemples de suites numériques :

(a) $(\ 0 \ ; \ 2 \ ; \ 4 \ ; \ 6 \ ; \ 8 \ ; \ \dots)$

(b) $(\ 1 \ ; \ 6 \ ; \ 11 \ ; \ 16 \ ; \ 21 \ ; \ \dots)$

(c) $(\ 1 \ ; \ 2 \ ; \ 4 \ ; \ 8 \ ; \ 16 \ ; \ 32 \ ; \ \dots)$

(d) $(\ 1 \ ; \ \sqrt{2} \ ; \ \sqrt{3} \ ; \ 2 \ ; \ \sqrt{5} \ ; \ \sqrt{6} \ ; \ \dots)$

(e) $\left(\ 2 \ ; \ \dfrac{3}{2} \ ; \ \dfrac{4}{3} \ ; \ \dfrac{5}{4} \ ; \ \dfrac{6}{5} \ ; \ \dots \right)$

Pour chacune de ces suites des nombres trouver la relation qui permet d'obtenir une valeur en fonction de sa position dans la suite.

E.5 On considère les suites définies ci-dessous par la valeur de leur premier terme et d'une relation de récurrence où l'entier n désigne un entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:

(a) $u_0 = 5$; $u_{n+1} = u_n + 2$ (b) $v_0 = 3$; $v_{n+1} = 2\cdot v_n$

(c) $w_0 = 2$; $w_{n+1} = -w_n$ (d) $x_0 = 4$; $x_{n+1} = 2\cdot x_n - 2$

(d) $y_0 = 1$; $y_1 = 1$; $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$

Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

E.6 On considère les deux algorithmes ci-dessous :

Algorithme 1

```
u ← 4
Pour i allant de 1 à 53
    u ← u+3
Fin Pour
```

Algorithme 2

```
u ← 1
Pour i allant de 1 à 4
    u ← 2× u+1
Fin Pour
```

Pour chacun des algorithmes, donner la valeur contenue dans la variable **u** après l'exécution de l'algorithme.

E.7

(1) Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:

$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n - 2$

(2) Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:

$v_n = \dfrac{n+1}{2\cdot n+1}$

E.8 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$ par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n + \frac{1}{n+1}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.9

(1) Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:

$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = 3 - 2\cdot u_n$

(2) Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:

$v_n = \dfrac{2\cdot n - 1}{n+3}$

E.10 On considère les suites numériques définies ci-dessous, où leur rang n est un entier positif ou nul $(n\in\mathbb{N})$:

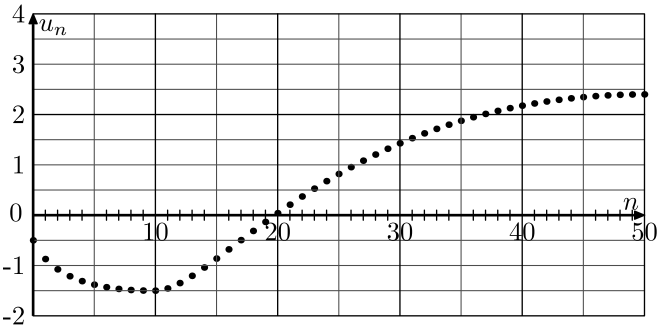
(a) $u_n = 2n$ (b) $v_n = 3n - 4$

(c) $w_n = n^2 + 3$ (d) $x_n = 2^n$

Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

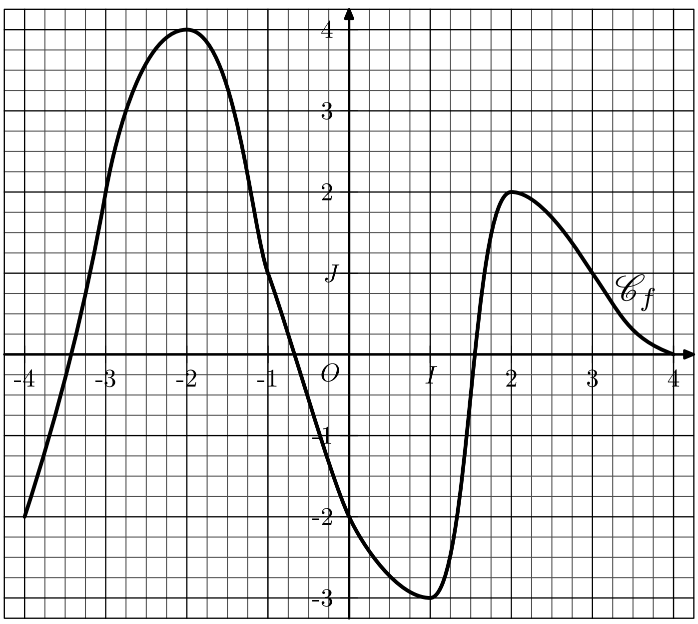
2. *Suites quelconques et lecture graphique*

E.11 On considère une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n positif ou nul $(n \in \mathbb{N})$. Dans un repère sont représentés les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ pour n compris entre 0 et 50 :



1. Donner les valeurs exactes de u_0 et u_{10}.
2. Donner des valeurs approchées de u_5, u_{30} et u_{40}.
3. Que peut-on dire des valeurs des termes u_n lorsque la valeur de n augmente?

E.12 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations :

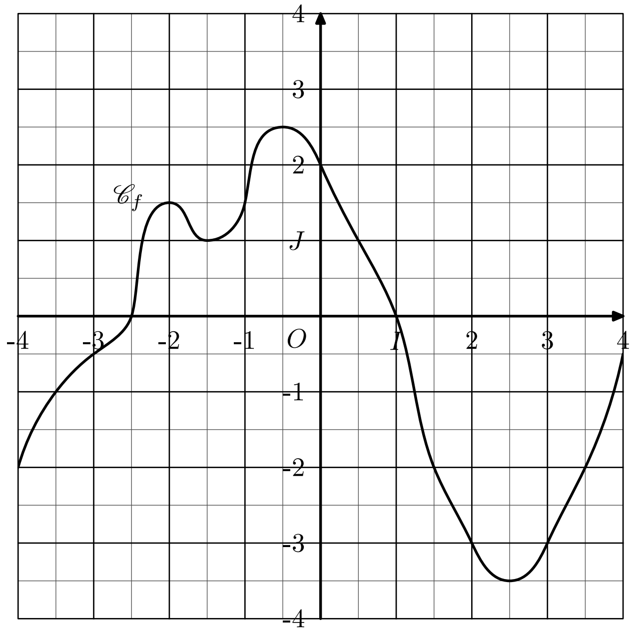
$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad v_{n+1} = f(v_n)$$

vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$u_0 = -1 \quad ; \quad v_0 = -4$$

Déterminer les 100 premiers termes de chacune de ces deux suites.

E.13 On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que le terme u_1 est égal à -3.
2. Justifier les égalités suivantes :

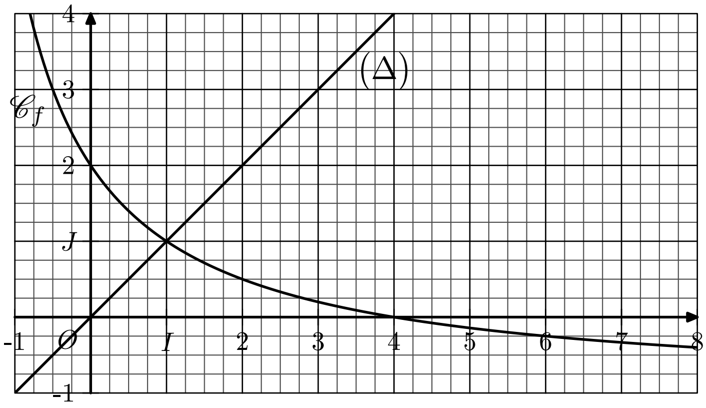
   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$

3. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

E.14 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{-x+4}{x+2}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad u_0 = 8$$

1. Sur l'axe des abscisses, présenter les valeurs des six premiers termes de la suite.
2. Déterminer, par le calcul, les trois premiers termes de la suite (u_n).

3. *Somme de termes*

E.15

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\frac{2}{3}$
   - a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   - b. Déterminer le rang de la suite (u_n) ayant pour valeur 38.
   - c. Déterminer la somme des termes :
     $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}$.
2. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 4 et de raison $\frac{2}{3}$
   - a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n).
   - b. Déterminer la somme des termes :
     $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

E.16

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$
   - a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   - b. Déterminer le rang du terme u_n ayant pour valeur $\frac{77}{6}$.
   - c. Déterminer la somme des termes :
     $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}$.
2. On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$
   - a. Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n).
   - b. Déterminer la somme des termes :
     $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

E.17

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme 5 et de raison 3.
   Déterminer la valeur de la somme S des 100 premiers termes de cette suite.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{4}$.
   Déterminer la valeur de la somme S' des 100 permiers termes de cette suite.

E.18 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot u_n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie par :
   $$v_n = u_n - \frac{2}{3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   - a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
   - b. Établir que pour tout entier naturel n, on a :
     $v_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot v_n$
   - c. Donner la nature et les valeurs des éléments caractéristiques de la suite (v_n).
3. - a. Déterminer la valeur de la somme S' définie par :
     $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{14}$
   - b. Déterminer la valeur de la somme S définie par :
     $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14}$
4. - a. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.
   - b. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

E.19

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.
Déterminer la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.
Déterminer une expression de la somme S définie par :
$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{12}$
Donner la valeur approchée de S au centième près.

E.20 Les termes de chaque somme sont les termes d'une suite géométrique. Déterminer la valeur de ces deux sommes :

1. $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024}$
2. $S_2 = 2 + \sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{8}$

E.21 On considère la somme S définie par :
$S = 5 + 2 - 1 - 4 - \cdots - 37$

En déduire la valeur de S.

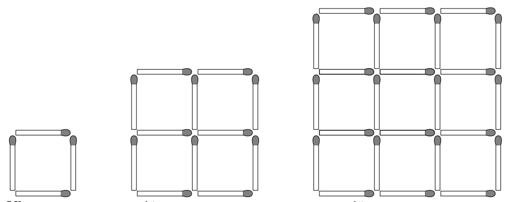
E.22 On considère la somme S définie par :
$S = 1 + \frac{5}{2} + 4 + \frac{11}{2} + \cdots + 100$

On admet que les termes de la somme S sont les premiers termes successifs d'une suite (u_n) arithmétique définie sur $\mathbb{N}$.

1. Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) et déterminer le rang du terme de la suite ayant 100 pour valeur.
2. En déduire la valeur de la somme S.

4. *Rappes sur les suites*

E.23 On considère les constructions suivantes :



1^{er} étape $2^{\text{ième}}$ étape $3^{\text{ième}}$ étape

On note (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ où u_n représente le nombre d'allumettes nécessaire à la construction de la $n^{\text{ième}}$ étape.

Parmi les définitions proposées ci-dessous, laquelle permet de définir la suite (u_n) présentée ci-dessus :

a. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\cdot u_n \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4\cdot n \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4\cdot(n+1) \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4\cdot u_n + n \end{cases}$

E.24 On considère les suites numériques, ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$ par récurrence : c'est à dire en fonction de leur valeur initiale et d'une relation avec les termes précédents.

1. $u_0 = 5$; $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_0 = 3$; $v_{n+1} = 2\cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_0 = 2$; $w_{n+1} = -w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $x_0 = 4$; $x_{n+1} = 2\cdot x_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. $x_0 = 1$; $x_1 = 1$; $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

5. *Exercices non-classés*

E.25 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence suivante :
$u_0 = 0$; $u_{n+1} = u_n - 2n + 11$

1. a. À l'aide du logiciel de votre choix, tracer le nuage de points associé au 15 premiers termes de cette suite.
   b. Faire une conjecture quant à la nature de la courbe passant par ces points.
2. a. Déterminer la fonction f définie par un polynôme du second degré, vérifiant les relations :
   $u_0 = f(0)$; $u_1 = f(1)$; $u_{11} = f(11)$
   b. Donner l'expression réduite de l'expression :
   $f(x+1) - f(x)$.
   c. Établir l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.

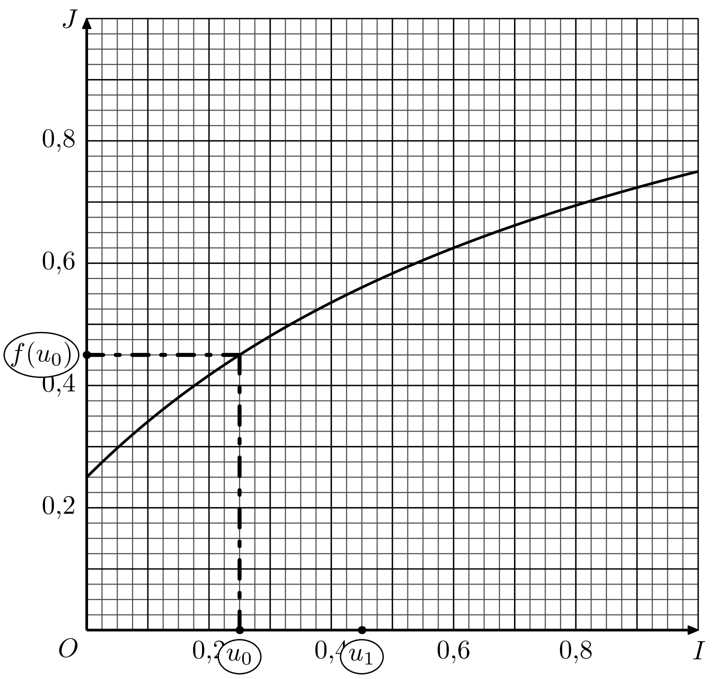
E.26 On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{5}{4} - \frac{1}{x+1}$$

1. a. Etablir les valeurs suivantes :
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{20} \quad ; \quad (f \circ f)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{65}{116}$$

   b. Déterminer la valeur de : $\quad (f \circ f \circ f)\left(\frac{1}{4}\right)$

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



2. a. Donner les valeurs approchées au millième près des nombres suivants :
   - $u_0 = \dfrac{1}{4} = \ldots\ldots$
   - $u_1 = \dfrac{9}{20} \approx \ldots\ldots$
   - $u_2 = \dfrac{65}{116} \approx \ldots\ldots$
   - $u_3 = \dfrac{441}{724} \approx \ldots\ldots$

   b. Placer les valeurs u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

   c. Placer les valeurs $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ sur l'axe des ordonnées.

3. a. Tracer le segment reliant les deux points $A_1(u_1\,;0)$ et $B_1(0\,;f(u_0))$.
Quelle est la nature du triangle OA_1B_1?

   b. Pour i allant de 1 à 3, on définit les points :
$A_i(u_i\,;0)$ et $B_i\big(0\,;f(u_{i-1})\big)$
De quelles natures sont les triangles OA_iB_i?

   c. Placer les nombres u_4 et u_5 sur l'axe des abscisses définis par les relations :
$f(u_3) = u_4 \quad ; \quad f(u_4) = u_5$

4. *Génération des termes de la suite :*

   a. Saisir et exécuter ce programme dans le langage de programmation de votre choix.

```
x ← 0,25
Pour i allant de 0 à 100
    x ← 5/4 − 1/(x+1)
Fin Pour
```

En fin d'exécution, quelle est la valeur de la variable `x`?

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur les termes de cette suite?

E.27 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot u_{n-1} + \frac{6}{n} \quad \text{pour } n\in\mathbb{N}^*$$

1. a. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

   b. Faire une conjecture sur la nature de la suite (d_n) définie par :
$d_n = u_{n+1} - u_n$

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = 4n^2 + 12n + 5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

   a. Donner l'expression simplifiée de l'expression v_{n+1} en fonction de n.

   b. Simplifier l'expression de : $\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)\cdot v_n + \dfrac{6}{n+1}$.
(On utilisera la factorisation :
$4x^3 + 24x^2 + 41x + 21 = (x+1)(4x^2+20x+21)$*)*

   c. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n).

