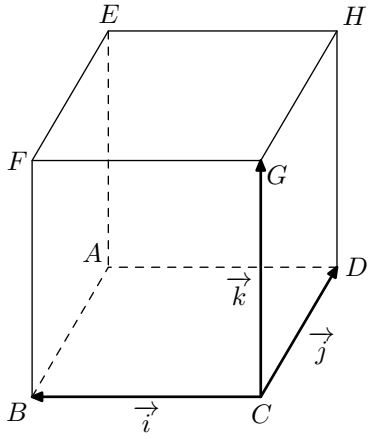
Hors programme lycée / Surfaces

1. Surface usuelle

E.1 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre O.



On munit le plan du repère orthonormé $\left(C\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG}\right)$

Déterminer les équations des plans suivants :

a (BCD) b (GHD) c (FEH)

d (ABF) e (ABG) f (BDG)

2. Intersection d'une surface et d'un plan

E.2 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. On considère les surfaces S_1 et S_2 d'équations respectives :

$$z = x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x{\cdot}y + 2x$$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x=2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan $\mathcal{P}$ et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan $\mathcal{P}$.

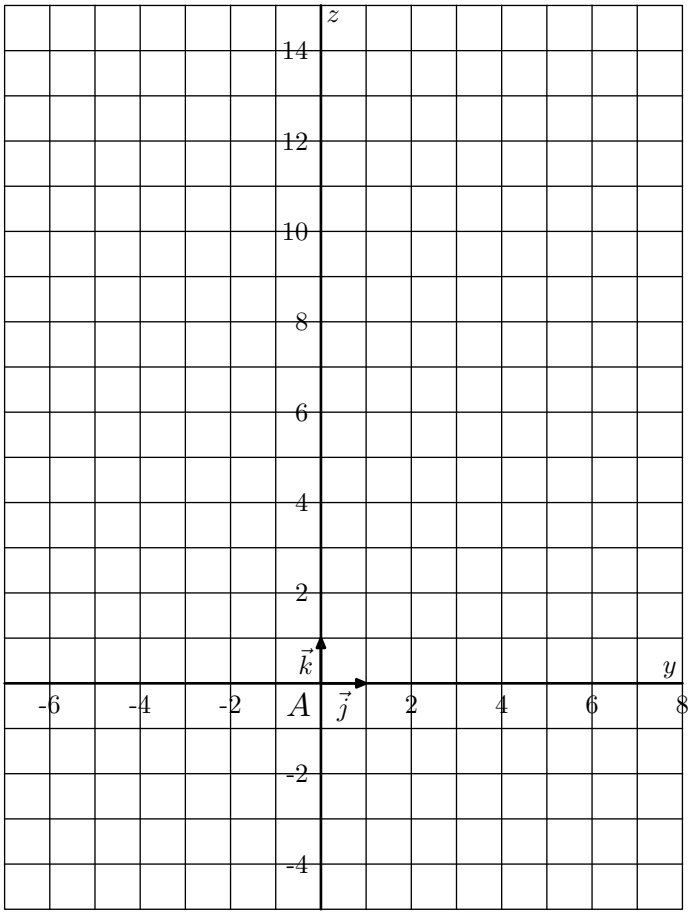
En **annexe**, le plan $\mathcal{P}$ est représenté muni du repère $\left(A\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ où A est le point de coordonnées $(2\,;0\,;0)$.

1 a Déterminer la nature de l'ensemble E_1.

b Déterminer la nature de l'ensemble E_2.

2 a Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille annexe.

b Dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.



E.3 Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on note S la surface d'équation :

$z = x^2 + 2{\cdot}x + y^2 + 1$

Dire si, oui ou non, "*la section de S avec le plan d'équation $z=5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\,;0\,;5)$ et de rayon 5*".

E.4 Pour chacune des questions suivantes, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

1. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient l'équation :

   $z = x^2 + y^2$.

   On note $\mathcal{S}$ la section de $\mathcal{E}$ par le plan d'équation $y = 3$.

   Affirmation : $\mathcal{S}$ est un cercle.

2. $\mathcal{P}$ est la surface d'équation $x^2+y^2=3{\cdot}z^2$

   Affirmation : O est le seul point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan (yOz) à coordonnées entières.

E.5 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère la surface $\mathscr{S}$ dont une équation est :

$z = 4{\cdot}x{\cdot}y$

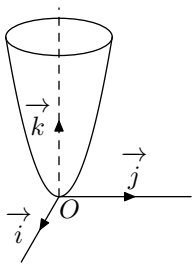
Montrer que la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z=0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

3. Volume

E.6 *Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. La surface Σ ci-contre a pour équation :

$z = x^2 + y^2$



1. La section de la surface Σ et du plan d'équation $x=\lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole.

2. Le plan d'équation $z=\dfrac{9{\cdot}\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z=9$ en deux solides de même volume.

Rappel . Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z=a$ et $z=b$ où $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 9$.

V est donné par la formule $V=\displaystyle\int_a^b S(k)dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z=k$ où $k\in[a\,;b]$.

4. Annales - Etude de surfaces

E.7 L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. On considère les points :

$A\,(0\,;5\,;5)$; $B\,(0\,;0\,;10)$

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
   On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B et passant par A.
   Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).

   a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation :
      $x^2 + y^2 = z^2$

   b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
      Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

   c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x=1$.
   Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
   Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

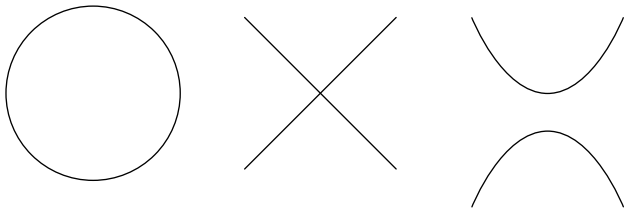


Figure n°1 Figure n°2 Figure n°3

4. Soit $M\,(x\,;y\,;z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

E.8 **Partie A**

On considère, dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$z = (x-y)^2$

1. On note $\mathcal{E}_1$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z=0$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_1$.
2. On note $\mathcal{E}_2$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x=1$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_2$.

Partie B

On considère, dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}'$ d'équation :

$z = x{\cdot}y$

1. On note $\mathcal{E}_3$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z=0$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_3$.
2. On note $\mathcal{E}_4$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $z=1$.
   Déterminer la nature de $\mathcal{E}_4$.

Partie C

On note $\mathcal{E}_5$ l'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathcal{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O\left(0\,;0\,;0\right)$.

On suppose qu'il existe un point M appartenant à $\mathcal{E}_5$ et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x=0$, alors le point M est le point O
2. On suppose dorénavant que l'entier x, y et z vérifient :
   $x^2 - 3{\cdot}x{\cdot}y + y^2 = 0.$
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que :
   $x'^2 - 3{\cdot}x'{\cdot}y' + y'^2 = 0$
3. Montrer que x' divise y'^2, puis, que x' divise y'.
4. Établir que y' vérifie la relation :
   $1 - 3{\cdot}y' + y'^2 = 0$
5. Conclure.

E.9 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère les points $A\left(1\,;3\,;2\right)$ et $B\left(4\,;6\,;-4\right)$ et le cône (Γ) d'axe $\left(O\,;\,\vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est : $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}{\cdot}z^2$
2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B,
   a. Déterminer une équation de (P).
   b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).
3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q). Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :
   a. deux droites parallèles ;
   b. deux droites sécantes ;
   c. une parabole ;
   d. une hyperbole ;
   e. un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x\,;y\,;z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation $(E) : x^2+y^2=40$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Résoudre l'équation (E).
   b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.
   b. Montrer que si M est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors :
   $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$
   c. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

E.10 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. On nomme (S) la surface d'équation :

$x^2+y^2-z^2=1$

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives :
   $(3\,;1\,;-3)$; $(-1\,;1\,;1)$
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
   b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z=68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
   b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
   On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant :
   $a<b$; $ppcm(a\,;b)=440$.
   C'est-à-dire tel que $(a\,;b)$ soit solution du système :
   $$(1):\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ ppcm(a\,;b)=440 \end{cases}$$
   Montrer que si $(a\,;b)$ est solution de (1) alors $pgcd(a\,;b)$ est égal à 1 ou à 5. Conclure.
   Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

6. Annales - Volume

E.11 L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. On considère la surface T d'équation :

$x^2\cdot y=z$ avec $-1\leqslant x\leqslant 1$ et $-1\leqslant y\leqslant 1$.

La figure ci-contre est une représentation de la surface T dans le cube de centre O et de côté 2.

1. Éléments de symétrie de la surface T.
   a. Montrer que si le point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à T, alors le point $M'(-x\,;y\,;z)$ appartient aussi à T. En déduire un plan de symétrie de T.
   b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de T.
2. Intersections de la surface T avec des plans parallèles aux axes.
   a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de T avec les plans parallèles au plan (xOz).
   b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de T avec les plans parallèles au plan (yOz).
3. Intersections de la surface T avec les plans parallèles au plan (xOy) d'équations $z=k$, avec $k\in[0\,;1]$.
   a. Déterminer l'intersection de la surface T et du plan d'équation $z=0$.
   b. Pour $k>0$, on note K le point de coordonnées $(0\,;0\,;k)$. Déterminer, dans le repère $(K\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, l'équation de la courbe d'intersection de T et du plan d'équation $z=k$.
   c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.
4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface T :
   $$(D)=\left\{M(x\,;y\,;z)\in(E)\;\middle|\;0\leqslant x\leqslant 1\,;0\leqslant y\leqslant 1\,;0\leqslant z\leqslant x^2\cdot y\right\}$$
   a. Pour $0<k\leqslant 1$, le plan d'équation $z=k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question 3 c.
   C'est l'ensemble des points M du cube d'unité de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que :
   $y\geqslant\dfrac{k}{x^2}$ et $z=k$.
   Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire de cette surface.
   b. On pose $S(0)=1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).
   On rappelle que : $V=\displaystyle\int_0^1 S(k)dk$.

E.12 **Partie A : Restitution organisée de connaissances**

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

   Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers *(on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition)*.

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives :

$\Gamma :\ z = x{\cdot}y \quad ; \quad C :\ x^2 + z^2 = 1$

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C.

   a. Démontrer que les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que :
   $x^2{\cdot}\left(1+y^2\right) = 1$

   b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan.
   Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$

   a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

   pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geqslant 2$.

   b. Vérifier que :
   $\left(n^2 - 2{\cdot}n + 2\right)\left(n^2 + 2{\cdot}n + 2\right) = n^4 + 4$

   c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n \geqslant 2$, l'entier $n^4 + 4$ n'est pas premier.

   d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

   e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.