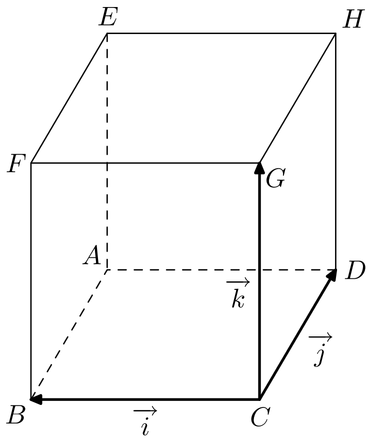
# Hors programme lycée / Surfaces

## 1. Surface usuelle

**E.1** Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre $O$.




On munit le plan du repère orthonormé $\left(C\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CG}\right)$

Déterminer les équations des plans suivants :

a) $(BCD)$ b) $(GHD)$ c) $(FEH)$

d) $(ABF)$ e) $(ABG)$ f) $(BDG)$

## 2. Intersection d'une surface et d'un plan

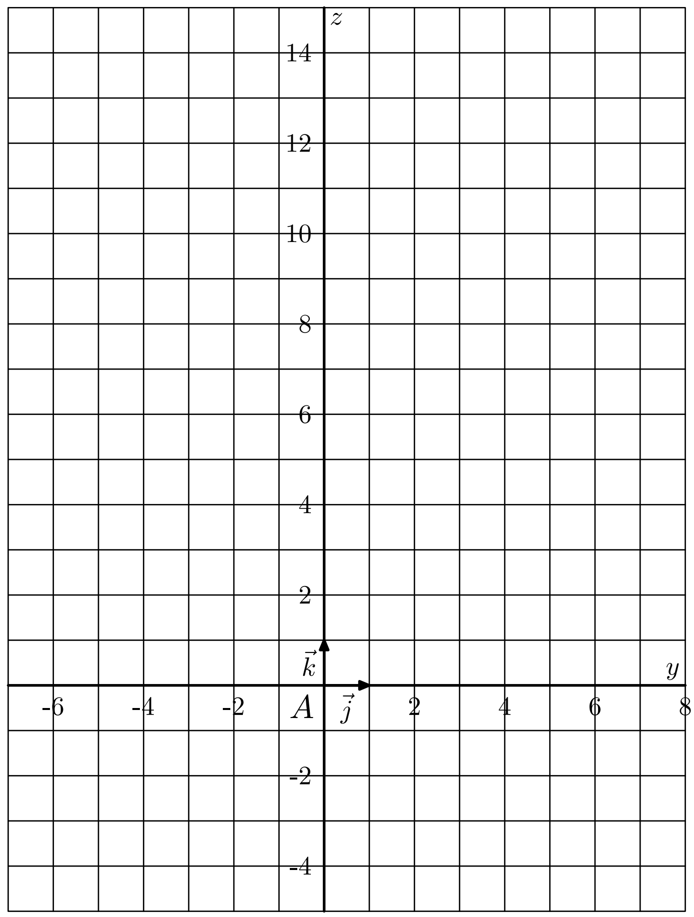
**E.2** L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. On considère les surfaces $S_1$ et $S_2$ d'équations respectives :

$$z = x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x{\cdot}y + 2x$$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x{=}2$, $E_1$ l'intersection de la surface $S_1$ et du plan $\mathcal{P}$ et $E_2$ l'intersection de la surface $S_2$ et du plan $\mathcal{P}$.

En **annexe**, le plan $\mathcal{P}$ est représenté muni du repère $\left(A\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ où $A$ est le point de coordonnées $\left(2\,;0\,;0\right)$.

1. a) Déterminer la nature de l'ensemble $E_1$.
   b) Déterminer la nature de l'ensemble $E_2$.
2. a) Représenter les ensembles $E_1$ et $E_2$ sur la feuille annexe.
   b) Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection $B$ et $C$ des ensembles $E_1$ et $E_2$.




**E.3** Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on note $S$ la surface d'équation :

$$z = x^2 + 2{\cdot}x + y^2 + 1$$

Dire si, oui ou non, "*la section de $S$ avec le plan d'équation $z{=}5$ est un cercle de centre $A$ de coordonnées $\left(-1\,;0\,;5\right)$ et de rayon 5*".

E.4 Pour chacune des questions suivantes, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

1. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient l'équation :
   $z=x^2+y^2$.
   On note $\mathcal{S}$ la section de $\mathcal{E}$ par le plan d'équation $y=3$.

   **Affirmation :** $\mathcal{S}$ est un cercle.

2. $\mathcal{P}$ est la surface d'équation $x^2+y^2=3{\cdot}z^2$

   **Affirmation :** $O$ est le seul point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan $(yOz)$ à coordonnées entières.

E.5 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

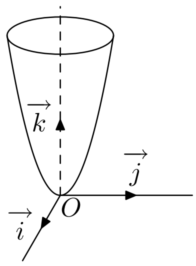
On considère la surface $\mathscr{S}$ dont une équation est :
$z=4{\cdot}x{\cdot}y$

Montrer que la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z=0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

## 3. *Volume*

E.6 *Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vrqie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. La surface $\Sigma$ ci-contre a pour équation :
$z=x^2+y^2$




1. La section de la surface $\Sigma$ et du plan d'équation $x=\lambda$, où $\lambda$ est un réel, est une hyperbole.

2. Le plan d'équation $z=\dfrac{9{\cdot}\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par $\Sigma$ et le plan d'équation $z=9$ en deux solides de même volume.

*Rappel . Soit $V$ le volume du solide délimité par $\Sigma$ et les plans d'équations $z=a$ et $z=b$ où $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 9$.*

*$V$ est donné par la formule $V=\displaystyle\int_a^b S(k)dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z=k$ où $k\in\left[a\,;b\right]$.*

## 4. *Annales - Etude de surfaces*

E.7 L'espace $(E)$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. On considère les points :
$A\left(0\,;5\,;5\right)$ ; $B\left(0\,;0\,;10\right)$

1. Dans cette question, on se place dans le plan $P_0$ d'équation $x=0$ rapporté au repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
   On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $B$ et passant par $A$.
   Démontrer que la droite $(OA)$ est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(Oz)$ et $\Gamma$ le cône engendré par la rotation de la droite $(OA)$ autour de l'axe $(Oz)$.

   a. Démontrer que le cône $\Gamma$ admet pour équation :
      $x^2+y^2=z^2$

   b. Déterminer l'intersection du cône $\Gamma$ et de la sphère $\mathscr{S}$. Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

   c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône $\Gamma$ par le plan $P_1$ d'équation $x=1$.
   Dans $P_1$, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
   Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

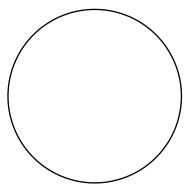


Figure n$^o$1

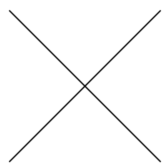


Figure n$^o$2

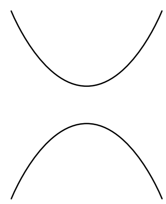


Figure n$^o$3

4. Soit $M\,(x\,;y\,;z)$ un point du cône $\Gamma$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que $x$ et $y$ ne peuvent pas être simultanément impairs.

# 5. Annales - Surfaces et arithmetiques

E.8 **Partie A**

On considère, dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}$ d'équation :
$z = (x-y)^2$

1. On note $\mathcal{E}_1$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z=0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_1$.
2. On note $\mathcal{E}_2$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x=1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_2$.

**Partie B**

On considère, dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}'$ d'équation :
$z = x{\cdot}y$

1. On note $\mathcal{E}_3$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z=0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_3$.
2. On note $\mathcal{E}_4$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $z=1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_4$.

**Partie C**

On note $\mathcal{E}_5$ l'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathcal{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O\,(0\,;0\,;0)$.

On suppose qu'il existe un point $M$ appartenant à $\mathcal{E}_5$ et dont les coordonnées $x$, $y$ et $z$ sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x=0$, alors le point $M$ est le point $O$
2. On suppose dorénavant que l'entier $x$, $y$ et $z$ vérifient :
$x^2 - 3{\cdot}x{\cdot}y + y^2 = 0.$
En déduire qu'il existe alors des entiers naturels $x'$ et $y'$ premiers entre eux tels que :
$x'^2 - 3{\cdot}x'{\cdot}y' + y'^2 = 0$
3. Montrer que $x'$ divise $y'^2$, puis que $x'$ divise $y'$.
4. Établir que $y'$ vérifie la relation :
$1 - 3{\cdot}y' + y'^2 = 0$
5. Conclure.

E.9 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(1\,;3\,;2)$ et $B\,(4\,;6\,;-4)$ et le cône $(\Gamma)$ d'axe $\left(O\,;\,\vec{k}\right)$, de sommet $O$ et contenant le point $A$.

**Partie A**

1. Montrer qu'une équation de $(\Gamma)$ est : $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}{\cdot}z^2$
2. Soit $(P)$ le plan parallèle au plan $(xOy)$ et contenant le point $B$,
   a. Déterminer une équation de $(P)$.
   b. Préciser la nature de l'intersection $(C_1)$ de $(P)$ et de $(\Gamma)$.
3. Soit $(Q)$ le plan d'équation $y=3$. On note $(C_2)$ l'intersection de $(\Gamma)$ et de $(Q)$. Sans justification, reconnaître la nature de $(C_2)$ parmi les propositions suivantes :
   a. deux droites parallèles ;
   b. deux droites sécantes ;
   c. une parabole ;
   d. une hyperbole ;
   e. un cercle.

**Partie B**

Soient $x$, $y$ et $z$ trois entiers relatifs et $M$ le point de coordonnées $(x\,;y\,;z)$. Les ensembles $(C_1)$ et $(C_2)$ sont les sections définies dans la partie $A$.

1. On considère l'équation $(E) : x^2+y^2=40$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   a. Résoudre l'équation $(E)$.
   b. En déduire l'ensemble des points de $(C_1)$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. a. Démontrer que si le point $M$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ où $x$, $y$ et $z$ désignent des entiers relatifs est un point de $(\Gamma)$ alors $z$ est divisible par 2 et $x^2+y^2$ est divisible par 10.
   b. Montrer que si $M$ est un point de $(C_2)$, intersection de $(\Gamma)$ et de $(Q)$, alors :
   $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$
   c. Déterminer un point de $(C_2)$, distinct de $A$, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

**E.10** L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. On nomme $(S)$ la surface d'équation :

$x^2+y^2-z^2=1$

1. Montrer que la surface $(S)$ est symétrique par rapport au plan $(xOy)$.

2. On nomme $A$ et $B$ les points de coordonnées respectives : $\left(3\,;1\,;-3\right)$ ; $\left(-1\,;1\,;1\right)$

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(D)$ passant par les points $A$ et $B$.

   b. Démontrer que la droite $(D)$ est incluse dans la surface $(S)$.

3. Déterminer la nature de la section de la surface $(S)$ par un plan parallèle au plan $(xOy)$.

4. a. On considère la courbe $(C)$, intersection de la surface $(S)$ et du plan d'équation $z=68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

   b. $M$ étant un point de $(C)$, on désigne par $a$ son abscisse et par $b$ son ordonnée.

   On se propose de montrer qu'il existe un seul point $M$ de $(C)$ tel que $a$ et $b$ soient des entiers naturels vérifiant :

   $a<b$ ; $ppcm(a\,;\,b)=440$

   C'est-à-dire tel que $(a\,;b)$ soit solution du système :

$$(1):\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ ppcm(a\,;\,b)=440 \end{cases}$$

   Montrer que si $(a\,;b)$ est solution de $(1)$ alors $pgcd(a\,;\,b)$ est égal à 1 ou à 5. Conclure.

   *Dans cette question toute trqce de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

## 6. *Annales - Volume*

**E.11** L'espace $(E)$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. On considère la surface $T$ d'équation :

$x^2\cdot y=z$ avec $-1\leqslant x\leqslant 1$ et $-1\leqslant y\leqslant 1$.

La figure ci-contre est une représentation de la surface $T$ dans le cube de centre $O$ et de côté 2.

1. Eléments de symétrie de la surface $T$.

   a. Montrer que si le point $M\,(x\,;y\,;z)$ appartient à $T$, alors le point $M'\,(-x\,;y\,;z)$ appartient aussi à $T$. En déduire un plan de symétrie de $T$.

   b. Montrer que l'origine $O$ du repère est centre de symétrie de $T$.

2. Intersections de la surface $T$ avec des plans parallèles aux axes.

   a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de $T$ avec les plans parallèles au plan $(xOz)$.

   b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de $T$ avec les plans parallèles au plan $(yOz)$.

3. Intersections de la surface $T$ avec les plans parallèles au plan $(xOy)$ d'équations $z=k$, avec $k\in\left[0\,;1\right]$.

   a. Déterminer l'intersection de la surface $T$ et du plan d'équation $z=0$.

   b. Pour $k>0$, on note $K$ le point de coordonnées $\left(0\,;0\,;k\right)$. Déterminer, dans le repère $\left(K\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, l'équation de la courbe d'intersection de $T$ et du plan d'équation $z=k$.

   c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $\left(K\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note $(D)$ le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface $T$ :

$$(D)=\left\{M(x\,;y\,;z)\in(E)\;\middle|\;0\leqslant x\leqslant 1\,;\,0\leqslant y\leqslant 1\,;\,0\leqslant z\leqslant x^2\cdot y\right\}$$

   a. Pour $0<k\leqslant 1$, le plan d'équation $z=k$ coupe le domaine $(D)$ selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question 3 c.

   C'est l'ensemble des points $M$ du cube d'unité de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que :

   $y\geqslant \dfrac{k}{x^2}$ et $z=k$.

   Calculer en fonction de $k$ l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire de cette surface.

   b. On pose $S(0)=1$ ; calculer en unités de volume, le volume $V$ du domaine $(D)$.

   On rappelle que : $V=\displaystyle\int_0^1 S(k)dk$.

E.12 **Partie A : Restitution organisée de connaissances**

1. Pré-requis : tout nombre entier $n$ strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

   Démontrer que tout nombre entier $n$ strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers *(on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).*

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

**Partie B**

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les surfaces $\Gamma$ et $C$ d'équations respectives :

$\Gamma :\ z = x{\cdot}y \quad ; \quad C :\ x^2+z^2=1$

1. Donner la nature de la surface $C$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces $\Gamma$ et $C$.

   a. Démontrer que les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ des points d'intersection de $\Gamma$ et de $C$ sont telles que :
   $x^2{\cdot}\left(1+y^2\right)=1$

   b. En déduire que $\Gamma$ et $C$ ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. Points d'intersection à coordonnées entières de $\Gamma$ et d'un plan.
   Pour tout nombre entier naturel non nul $n$, on désigne par $P_n$ le plan d'équation $z=n^4+4$

   a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\Gamma$ et du plan $P_1$ dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

   pour la suite de l'exercice, on suppose $n\geqslant 2$.

   b. Vérifier que :
   $\left(n^2-2{\cdot}n+2\right)\left(n^2+2{\cdot}n+2\right)=n^4+4$

   c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n\geqslant 2$, l'entier $n^4+4$ n'est pas premier.

   d. En déduire que le nombre de points d'intersection de $\Gamma$ et du plan $P_n$ dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

   e. Déterminer les points d'intersection de $\Gamma$ et du plan $P_5$ dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.