

# Hors programme lycée / Système d'équations

## 1. Résolution de systèmes

E.1  

① On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'inverse de la matrice  $A$ .

② On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

a Traduire ce système d'équation par une relation matricielle.

b En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

E.2  



① On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

② Résoudre les systèmes suivants d'équations :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = -9 \\ 2x + z = -8 \end{cases} ; \begin{cases} x + 2y - 2z = -2 \\ 2x + 5y - 6z = -7 \\ -2x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$$

E.3   On considère la matrice  $A$  définie par :  $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

① a Effectuer le calcul :  $4 \cdot A - A^2$

b En déduire l'expression de la matrice inverse de la matrice  $A$ .

c Donner l'expression de la matrice :  $B = \frac{4}{5} \cdot I_2 - \frac{1}{5} \cdot A$ .



② On considère les deux matrices  $X$  et  $Y$  définies par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la question ①, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2 \cdot x + 3 \cdot y = 1 \end{cases}$$

## 2. Introduction



E.4   On considère l'équation  $(E)$  à deux inconnues :

$$(E) : 2x - y = 3$$

① Parmi les couples ci-dessous, lesquels vérifient l'équation :

a  $(2; 1)$       b  $(-4; 2)$       c  $(3; 3)$

② Donner deux autres couples vérifiant cette égalité.


E.5   On considère le système  $(E)$  de deux équations à deux inconnues :

$$(E) : \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Parmi les couples ci-dessous, lesquels sont solutions du système  $(E)$  :

tème  $(E)$  :

a  $(1; -2)$       b  $(2; 1)$       c  $(-3; 6)$

E.6    Justifier chacune de vos réponses.

①  $-2$  est-il solution de l'inéquation :  $3x + 12 < 4 - 2x$ ?

②  $-2$  est-il solution de l'équation :  $(x-2)(2x+1) = 0$ ?

③  $-2$  est-il solution de l'équation :  $x^3 + 8 = 0$ ?

④ Le couple  $(-2; 1)$  est-il solution du système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

## 3. Résolution par combinaisons linéaires

E.7   Un collégien effectue deux achats :

- 3 crayons et 2 stylos noirs pour 10,80 pesos
- 1 crayon et 1 stylo noir pour 4,80 pesos.

① a Quel aurait été le prix de 3 crayons et de 3 stylos noirs?

b En déduire le prix d'un stylo noir.

② Déterminer le prix d'un crayon.

③ Vérifier que les prix trouvés vérifient les conditions de l'énoncé.

E.8   On considère le système  $(S)$  défini par :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

Résoudre le système  $(S)$ .

## 4. Résolution par substitution

E.9    Un classeur coûte 1,80€ de plus qu'un cahier.

## 5. Résolution de systèmes

E.10    

1 Résoudre le système :  $(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 66 \\ x + 3y = 57 \end{cases}$

2 Vérifier que, pour la solution  $(x; y)$  trouvée, on a  $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ .

E.11    

1 Résoudre le système :

$$(S) : \begin{cases} 10x - 3y = 35 \\ 5x - 4y = -20 \end{cases}$$

2 Montrer que les valeurs trouvées pour  $x$  et  $y$  vérifient la condition suivante :

## 6. Résolution et modélisation

E.13    

1 Résoudre le système  $(S) : \begin{cases} x + 3y = 2250 \\ 2x + y = 2750 \end{cases}$

2 Pour l'achat d'un tee-shirt et de 3 casquettes, André a payé 2250 F. Pour l'achat de 2 tee-shirts et d'une casquette, Maeva a payé 2750 F. Déterminer le prix d'un tee-shirt et d'une casquette.

Remarque : les prix sont donnés en francs polynésiens (FP). Pour information 1 euro vaut environ 119,33 FP

E.14    

1 Résoudre le système suivant :




$$(S) : \begin{cases} x + y = 104 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

2 Matéo et Simon, qui ont 8 ans d'écart, additionnent leurs âges et trouvent 104 ans. Sachant que Matéo est le plus jeune, calculer l'âge de chacune de ces deux personnes.

E.15    

1 Résoudre le système suivant :  $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$

2 Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros. Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros. Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants?

E.16   

1 Résoudre le système :  $\begin{cases} 6x + 5y = 25 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

Sachant que 3 classeurs et 2 cahiers coûtent 11,40€, donner le prix d'un classeur et d'un cahier.

$$8 \left( \frac{x-5}{y-5} \right) = 3 \left( \frac{x+20}{y+20} \right)$$

E.12   

1 Résoudre par la méthode de combinaisons linéaires le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

2 Résoudre par la méthode de la substitution le système suivant :

$$(T) : \begin{cases} 3x + y = 16 \\ 8x - 5y = 12 \end{cases}$$

2 Pierre et Jules achètent des poissons rouges et des poissons jaunes dans le même magasin spécialisé. Pour l'achat de 6 poissons rouges et de 5 poissons jaunes, Pierre dépense 25 euros. Pour l'achat de 2 poissons rouges et de 3 poissons jaunes, Jules dépense 11 euros.

- a Quel est le prix d'un poisson rouge?  
b Quel est le prix d'un poisson jaune?

La démarche suivie sera expliquée sur la copie.

E.17    

1 Résoudre le système :  $\begin{cases} 3x + 2y = 50,30 \\ x + 3y = 32,75 \end{cases}$

2 A la pépinière "Fruitfleur", un client achète 3 orangers et 2 citronniers pour 50,30 euros. Un autre client paye 32,75 euros pour 1 oranger et 3 citronniers. On désigne par  $x$  le prix d'un oranger et  $y$  celui d'un citronnier.

- a Écrire un système de deux équations qui traduit le problème.  
b Calculer le prix d'un oranger et le prix d'un citronnier.

E.18    

1 Résoudre le système suivant :  $\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$

2 Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros.

Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros.

Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants?

## 7. Systèmes d'équations avec nombres relatifs et rationnels

E.19 On considère le système suivant : (S) :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 5x + 10y = 20 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

E.20 On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + y = -7 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

E.21 On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

E.22 On considère le système (S) d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

Résoudre le système (S).

## 8. Modélisation et résolution

E.23 Une élève de CP fait des courses pour ses camarades :

- la première fois, elle achète 5 crayons et 2 gommes pour 10,90 euros ;
- la seconde fois, elle achète 8 crayons et 3 gommes pour 17,20 euros.

En utilisant un système d'équations, aider l'élève de CP à retrouver le prix de chaque article.

E.24 Un client d'une quincaillerie regarde les deux tickets de caisse suivant :

- 6 kilogrammes de vernis et 4 litres de cire ont coûté 95 €.
- 3 kilogrammes de vernis et 3 litres de cire ont coûté 55,50 €.

Déterminer le prix d'un kilogramme de vernis et le prix d'un litre de cire.

E.25 Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives identiques et de dix wagons-citernes du même modèle et ce train mesure alors 152 m de long.

Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes vides.

Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160 de long.

On cherche la longueur  $x$  d'une locomotive et la longueur  $y$  d'un wagon-citerne.

- 1 Écrire un système de deux équations à deux inconnues représentant la situation.
- 2 Résoudre le système : 
$$\begin{cases} x + 5y = 76 \\ x + 12y = 160 \end{cases}$$
- 3 En déduire la longueur en mètre d'une locomotive et celle d'un wagon-citerne.

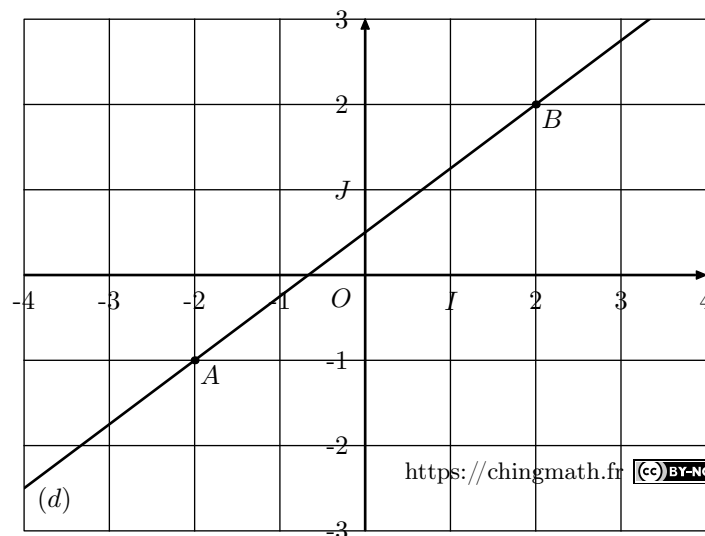
## 9. Résolution graphique

E.26 Résoudre graphiquement le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = 0,5x + 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

## 10. Fonctions et systèmes d'équations

E.27 Dans le repère  $(O; I; J)$  ci-dessous, est donnée la droite  $(d)$  représentative d'une fonction affine  $f$ .



L'expression algébrique de la fonction affine  $f$  est de la forme :

$$f(x) = a \times x + b$$

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs des deux nombres  $a$  et  $b$ .





- 1 Donner les coordonnées des points  $A$  et  $B$ .

**Première méthode :**

- 2 À l'aide des points  $A$  et  $B$ , déterminer le coefficient directeur de la fonction affine  $f$ .
- 3 À l'aide des coordonnées du point  $A$  ou du point  $B$ , déterminer la valeur du nombre  $b$ .  
Écrire l'expression complète de la fonction  $f$ .

**Seconde méthode :**

- 4 Justifier que les deux nombres  $a$  et  $b$  vérifient les deux équations ci-dessous :  
$$-2a + b = -1 \quad ; \quad 2a + b = 2$$
- 5 Résoudre le système d'équations :  
$$\begin{cases} -2a + b = -1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$
  
Écrire l'expression complète de la fonction  $f$ .

**E.28**     Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$ .  
L'unité de longueur est le centimètre.

- 1 Soit  $f$  une fonction affine vérifiant :  
$$f(4) = -2 \quad ; \quad f(0) = 6$$
  - a Déterminer l'expression de la fonction  $f$ .
  - b Effectuer le tracé de la représentation graphique de la fonction  $f$ .
- 2 Soit  $g$  la fonction affine définie par :  $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ .
  - a Construire la droite  $(d)$  représentant graphiquement la fonction  $g$ .
  - b Montrer que  $C(-4; -1)$  appartient à  $(d)$  et placer le point  $C$ .
- 3
  - a Résoudre par le calcul le système d'équations suivant :  
$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$
  - b Expliquer comment on peut trouver graphiquement le résultat.

## 11. Un peu plus loin

**E.29**     Trouver deux nombres, connais-

sant leur somme 2003 et leur différence 51

## 12. Système d'équations linéaires

**E.30**   




- 1 Résoudre le système : 
$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 7x + 5y = 104 \end{cases}$$
- 2 Une bibliothèque achète 7 DVD et 5 livres. Le prix total est de 104 euros. Un livre coûte 8 euros de moins qu'un DVD.
  - a Quel est le prix d'un DVD?
  - b Quel est le prix d'un livre?

**E.31**   

- 1 Résoudre le système suivant :  
$$\begin{cases} 8x + 3y = 39,5 \\ 7x + 9y = 50,5 \end{cases}$$
- 2 Une balade d'une heure en mer est proposée à deux groupes de touristes.  
Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 39,50 euros. Le second, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 50,50 euros. Quel est donc le prix d'un ticket pour un adulte? Pour un enfant?

**E.32**   

- 1 Résoudre le système suivant : 
$$\begin{cases} 4x + 3y = 206 \\ 2x + 2y = 114 \end{cases}$$
- 2 Lors d'un spectacle, la famille  $A$ , composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros.  
Pour le même spectacle, la famille  $B$ , composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros.  
Combien payera la famille  $C$ , sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants?

**E.33**    Un élève achète dans une papeterie deux stylos et un cahier pour un montant total de 3,5€.

Il retourne une seconde fois dans ce magasin pour acheter pour 1 stylo et 3 cahiers, du même modèle et du même prix, pour un coût global de 6,75€.

Déterminez le prix d'un stylo et d'un cahier dans cette papeterie.

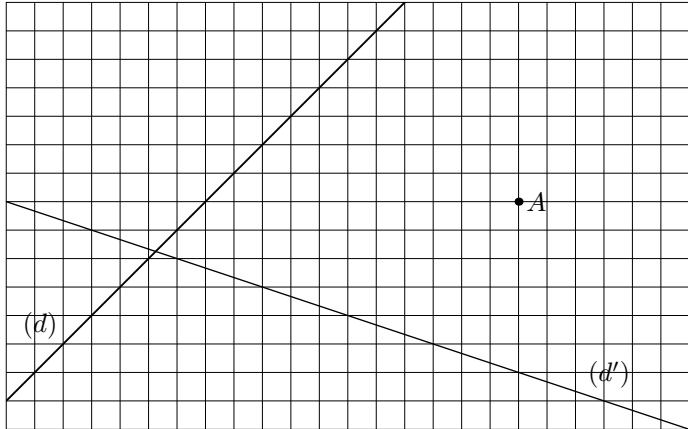
**E.34** 🚪 📖 🎒 Sur la ligne de train Lyon-Marseille :

- Un TGV part de Lyon à destination de Marseille à 9h 30 et roule à la vitesse constante de  $300 \text{ km/h}$ .
- Un train Grande-Ligne part de Marseille pour relier Lyon à 9h et roule à la vitesse constante de  $150 \text{ km/h}$ .

À quelle heure les deux trains vont se croiser? (La distance Lyon-Marseille est de 255 km)

### 13. Projeté orthogonal

**E.35** 📖 🎒 Dans le quadrillage ci-dessous, on considère les deux droites  $(d)$  et  $(d')$  et un point  $A$  :



### 14. Exercices non-classés

**E.36** 🚪 📖 🎒 ⚠️ Arthur vide sa tirelire et constate qu'il possède 21 billets.

Il a des billets de 5€ et de billets de 10€ pour une somme totale de 125€.

Combien de billets de chaque sorte possède-t-il?

*Si le travail n'est pas terminé, laisse tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.*

**E.37** 🚪 📖 🎒 ⚠️

① -2 est-il solution de l'inéquation :  $3x+12 < 4-2x$ ? Justifier.

② -2 est-il solution de l'équation :  $(x-2)(2x+1)=0$ ? Justifier.

③ -2 est-il solution de l'équation :  $x^3+8=0$ ? Justifier.

④ Le couple  $(-2; 1)$  est-il solution du système :  

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

**E.38** 📖 🎒 ⚠️

① Résoudre le système :  

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y = 4,5 \end{cases}$$

**Indication :**

- On note  $x$  le temps écoulé en heures à partir de 9h 30.
- On note  $L(x)$  la distance parcourue par le train partant de Lyon rejoignant Marseille à l'instant  $x$ .
- On note  $M(x)$  la distance à l'instant  $x$  restant à parcourir par le train partant de Marseille et reliant Lyon.

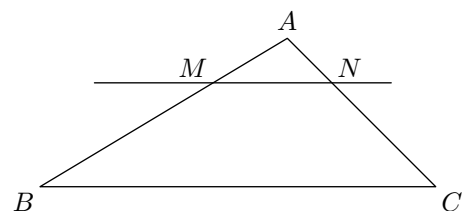
① Placer le point  $M$  projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(d)$ .

② Placer le point  $N$  projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(d')$ .

② Dans le triangle  $ABC$  ci-dessous, on donne :  
 $AB=6 \text{ cm}$  ;  $BC=9 \text{ cm}$

$M$  est le point de  $[AB]$  tel que :  $AM=2 \text{ cm}$ .

La droite parallèle à  $(BC)$  passant par  $M$  coupe  $[AC]$  en  $N$ .



ⓐ Calculer  $MN$ .

ⓑ Donner la valeur de  $\frac{AN}{AC}$

③ On suppose que  $[NC]$  mesure  $4,5 \text{ cm}$  et l'on pose  $AN=y$  et  $AC=x$ .

ⓐ Établir les égalités :  $x-y=4,5$  ;  $x-3y=0$

ⓑ Calculer  $AN$  et  $AC$ , en utilisant éventuellement les questions ① et ③ ⓐ.

**Remarque :** les calculs sont possibles même si les questions ① et ③ ⓐ n'ont pas été traités.