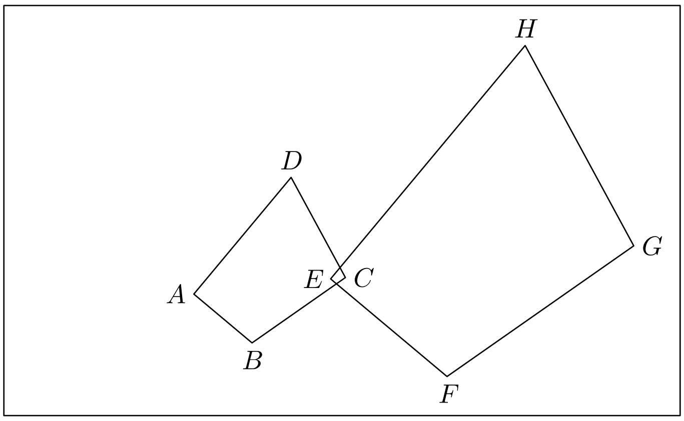
Hors programme lycée / Transformations

1. Isométrie

E.1 La figure ci-dessous représente deux quadrilatères $ABCD$ et $EFGH$:



(1) Effectuer les mesures nécessaires pour compléter le tableau ci-dessous :

	AB	BC	CD	DA
Mesure *(en cm)*				

	EF	FG	GH	HE
Mesure *(en cm)*				

(2) (a) Tracer les droites (AE), (BF), (CG) et (DH). Que remarquez-vous?

(b) Nommer O le point d'intersection de ces droites.

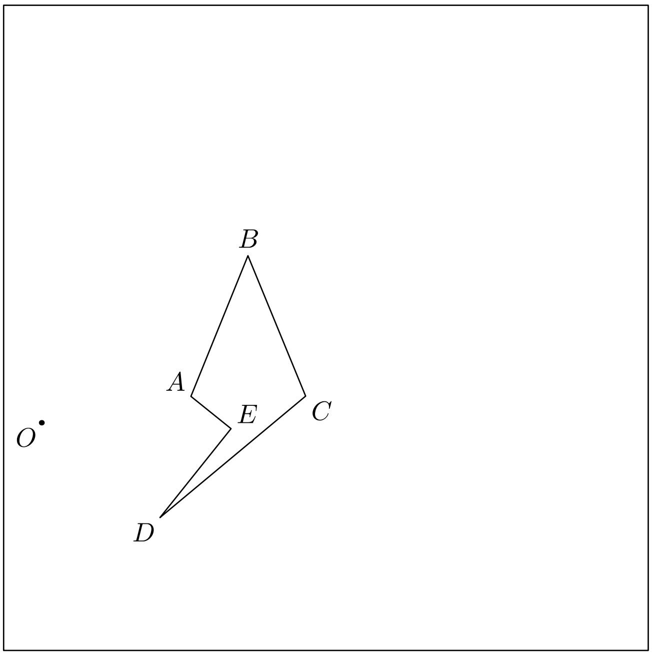
(c) Compléter les tableaux ci-dessous :

	OA	OB	OC	OD
Mesure *(en cm)*				

	OE	OF	OG	OH
Mesure *(en cm)*				

(d) Que remarquez-vous?

E.2 On considère le polygone $ABCDE$ ci-dessous et O un point du plan.



(1) (a) Placer le point A' sur la demi-droite $[OA)$ tel que : $OA' = 2 \cdot OA$

(b) Placer le point B' sur la demi-droite $[OB)$ tel que : $OB' = 2 \cdot OB$

(c) Faire de même avec les points C, D et E.

(d) Tracer le polygone $A'B'C'D'E'$

(2) (a) Effectuer les mesures suivantes :

	AB	BC	CD	DE	EA
Mesure *(en cm)*					

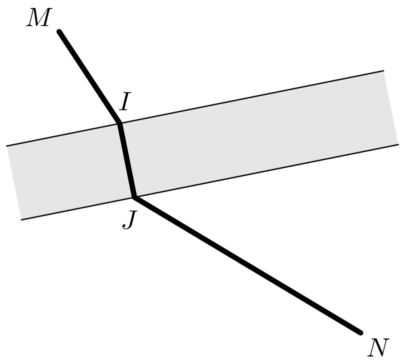
	$A'B'$	$B'C'$	$C'D'$	$D'E'$	$E'A'$
Mesure *(en cm)*					

(b) Que pouvez-vous dire de ces deux polygones?

(3) (a) Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les droites (AB) et $(A'B')$?

(b) Quel théorème permet de confirmer votre conjecture?

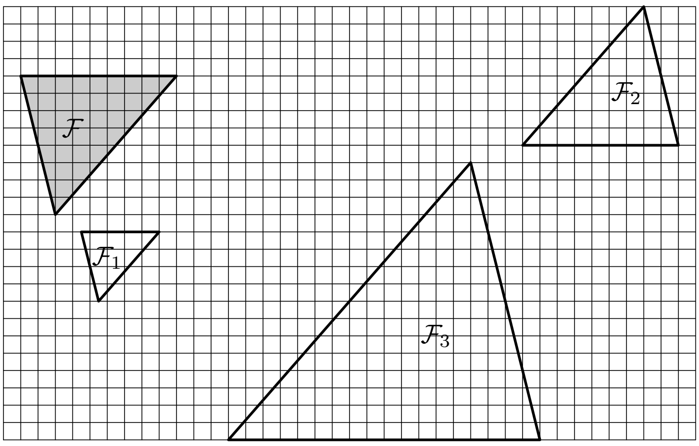
E.3 On doit construire une route passant de la ville M à la ville N.
Cette route doit passer au-dessus d'une rivière : le pont sera perpendiculaire au lit de la rivière.



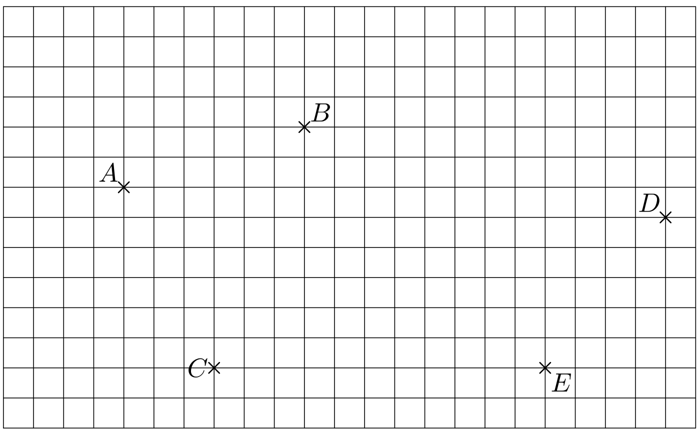
Placer le pont *(plus précisément les points I et J)* afin que la longueur de la route soit minimale.

Indication : penser à l'inégalité triangulaire.

E.4 La figure $\mathcal{F}$ a subi trois homothéties distinctes ; pour chacune d'entre elles, déterminer son centre et son rapport de l'homothétie :

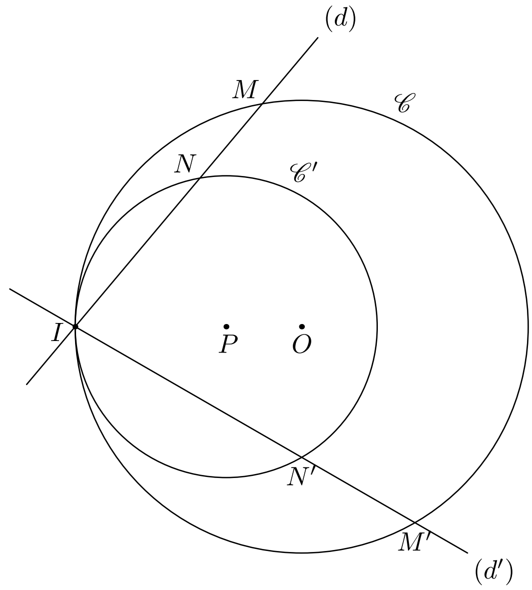


E.5 On considère les cinq point du plan représenté ci-dessous :



1. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie transformant A en C et B en D.
2. Déterminer le centre de l'homothétie de rapport $\dfrac{3}{2}$ transformant le point B en le point A.
3. Justifier qu'il n'existe pas d'homothéties transformant B en C et D en E.

E.6 On considère deux points du plan O et P séparés de $1\,cm$; le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre le point O et un rayon de $3\,cm$; le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre P et son rayon est de $2\,cm$.
Soit I le point d'intersection de la droite (OP) avec le cercle $\mathscr{C}$.
La droite (d) passant par I intercepte les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement en M et en N. La droite (d') passant par I est sécante au cercle $\mathscr{C}$ en M' et coupe également le cercle $\mathscr{C}'$ en N'.



1. Montrer que le point I appartient également au cercle $\mathscr{C}'$.
Que pouvez-vous de la position relative des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
2. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie transformant le cercle $\mathscr{C}$ en le cercle $\mathscr{C}'$.
3. En déduire que les droites (NN') et (MM') sont parallèles.

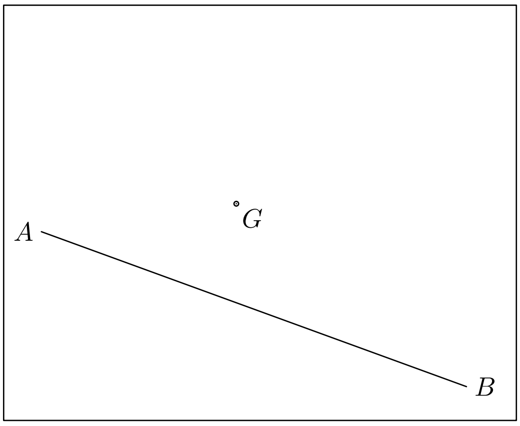
E.7 Soit A et B deux points du plan et M un point du plan n'appartenant pas à (AB).

Placer le point C tel que H soit l'orthocentre du triangle ABC.

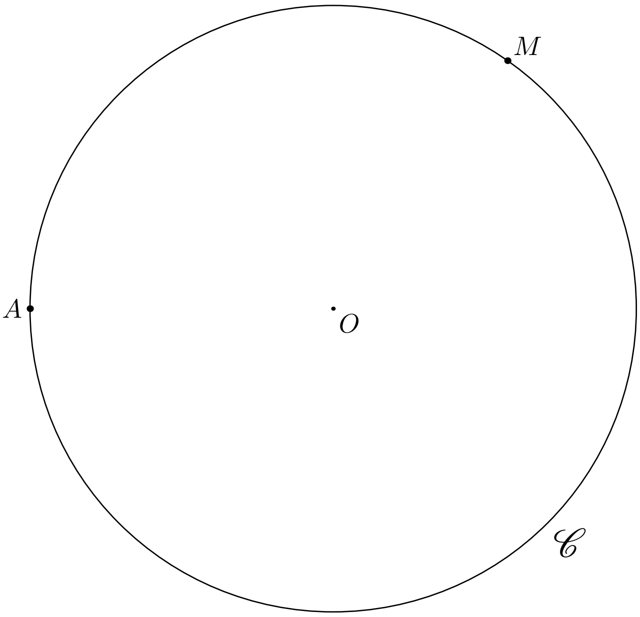
E.8 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point du cercle.
On considère le point M parcourant le cercle $\mathscr{C}$ et I le milieu du segment $[OM]$

Que décrit le point I lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

E.9 Construire, dans la figure ci-dessous, le point C tel que ABC ait pour centre du cercle inscrit *(le point d'intersection des bissectrices)* le point G.



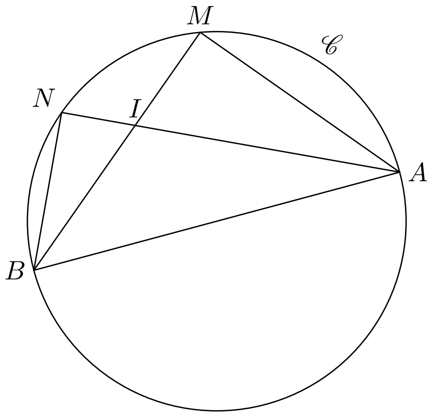
E.10 On considère un cercle $\mathscr{C}$, un point $A \in \mathscr{C}$ et un point M qui décrit le cercle : c'est-à-dire que la position de M est variable et il parcourra le cercle $\mathscr{C}$.
On considère le point I milieu de $[AM]$.



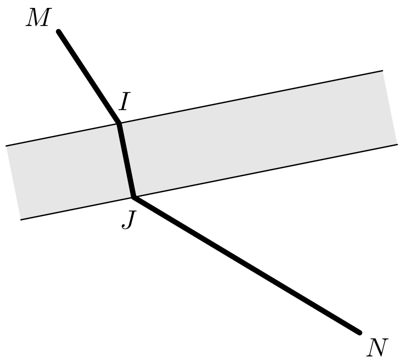
1. Placer le point I sur la figure ci-dessus.
2. a. Placer le point M diamétralement opposé au point A. Où se trouve alors le point I.
   b. Si le point M se trouve en A, où se trouve le point I.
   c. Placer le point M à quatre autres endroits possibles et construire à chaque fois le point I associé
3. Lorsque le point M décrit l'intégralité du cercle $\mathscr{C}$ quel ensemble décrit le point I.

E.11 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. Soit M et N deux points de $\mathscr{C}$ distinct de A et B.

1. Placer sur la figure ci-dessus le point J intersection des droites (NB) et (MA).
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à (BA).



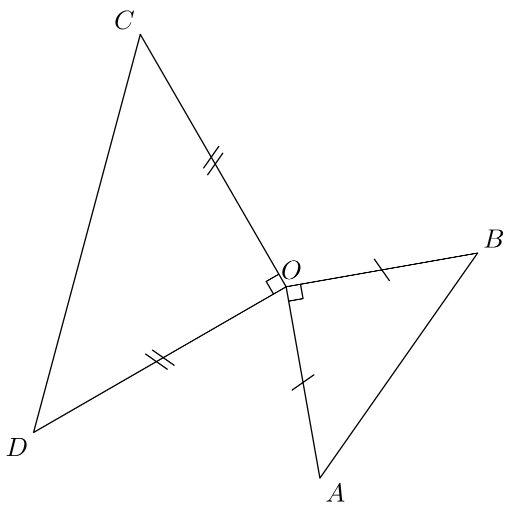
E.12 On doit construire une route passant de la ville M à la ville N.
Cette route doit passer au-dessus d'une rivière : le pont sera perpendiculaire au lit de la rivière.



Placer le pont *(plus précisément les points I et J)* afin que la longueur de la route soit minimale.

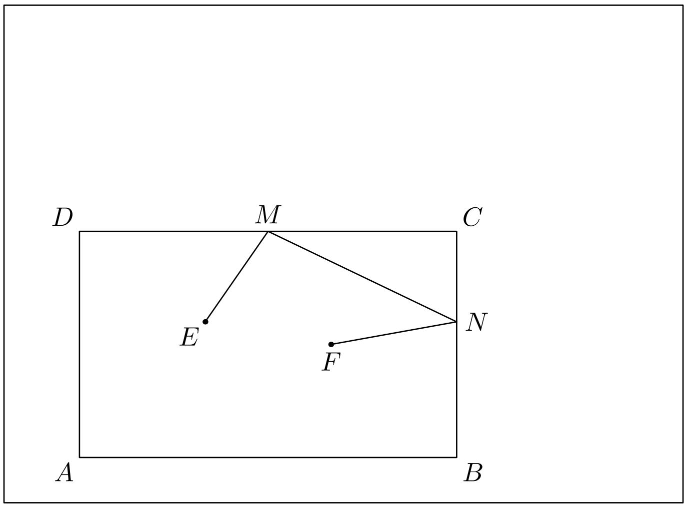
Indication : on pensera à l'inégalité triangulaire.

E.13 On considère les deux triangles OCD et OAB rectangles isocèles en O



A l'aide d'une rotation, dont on indiquera ses caractéristiques, montrer que les segments $[CA]$ et $[DB]$ ont même longueur.

E.14 On considère un rectangle $ABCD$, M un point de $[DC]$ et N un point de $[BC]$.



Déterminer, sur la figure ci-dessus, le positionnement des points M et N de sorte que le chemin passant par les points E, M, N et F soient le plus courts possible.

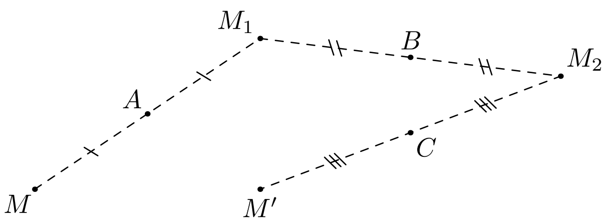
(aucune justification n'est demandée).

2. *Composée d'isométrie*

E.15 Soit A, B, C trois points distincts deux à deux du plan et M un point quelconque du plan.

La figure ci-contre représente l'image M' de M par la transformation $S_C \circ S_B \circ S_A$ où :

$$S_A(M) = M_1 \quad ; \quad S_B(M_1) = M_2 \quad ; \quad S_C(M_2) = M'$$



Déterminer, s'ils existent, les invariants de la transformation $S_C \circ S_B \circ S_A$.

E.16 On considère dans le plan un carré $ABCD$. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Simplifier l'écriture de la transformation suivante :

$$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CA}} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$$

2. Établir la relation suivante :

$$t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_I \circ S_B = t_{\overrightarrow{BD}}$$

3. Déterminer le point M vérifiant la relation suivante :

$$S_I \circ S_B = S_M \circ S_C$$