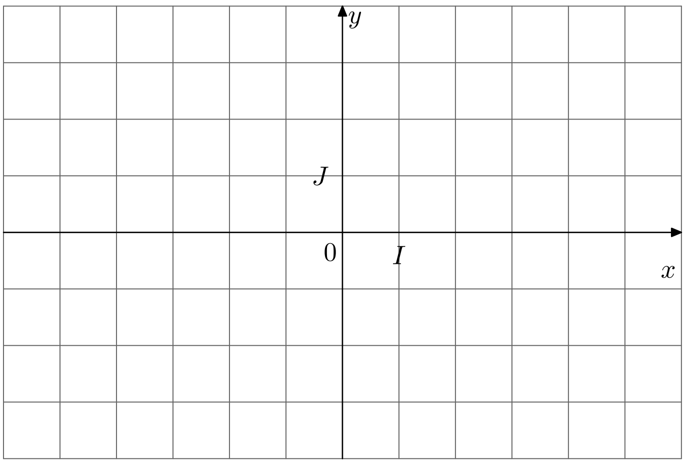
Hors programme lycée / Valeurs absolues

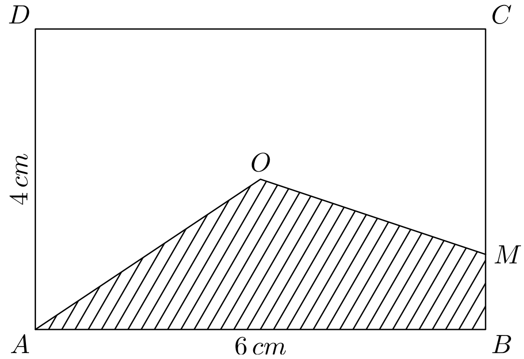
1. Fonctions affines par morceaux

E.1 Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} f(x) = 2x+8 & \text{si } x \in [-5\,;-2] \\ f(x) = -0.5x+3 & \text{si } x \in]-2\,;2] \\ f(x) = -2x+6 & \text{si } x \in]2\,;4] \end{cases}$$



E.2 Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ de longueur $5\,cm$ et de largeur $3\,cm$. Un point M parcourt le contour de ce rectangle ; on repère ce point par le nombre x représentant la distance parcourue par ce point en partant de A et en parcourant le rectangle dans le sens direct.



On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie hachurée lorsque M est repéré par le nombre x.

1. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est une fonction affine par morceaux en fonction de x définie par le système :

$$\begin{cases} x & \text{pour } x \in [0\,;\,6] \\ \frac{3}{2}x-3 & \text{pour } x \in [6\,;\,10] \\ x+2 & \text{pour } x \in [10\,;\,16] \\ \frac{3}{2}\cdot x-6 & \text{pour } x \in [16\,;\,20] \end{cases}$$

2. Déterminer la valeur de x pour laquelle on a : $\mathcal{A}(x) = 20\,cm^2$

2. Valeur absolue - équation

E.3

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x+1$							
$2\cdot x-1$							

2. Parmi les valeurs étudiées dans la question précédente, existe-t-il des solutions de l'équation : $|x+1| = |2x-1|$

E.4 Résoudre les équations suivantes :

a. $|2-x| = 2{,}5$ b. $|x+100| = 1$

c. $3\times|x+2| = 1$ d. $|2-x|\times 2 = 1$

e. $3\times|x+5|+3 = 9$ f. $2\times|2-x|+4 = 1$

E.5 Résoudre les équations suivantes :

a. $|2x-1| = |-x+1|$ b. $|3x-1| = |3x+1|$

c. $|x-2| = 5$ d. $|x+2| = 6$

E.6 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$f(x) = x - |2\cdot x-1|$; $g(x) = x-2$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. a. Établir l'équivalence : $f(x)=g(x) \iff |2\cdot x-1|=|2|$

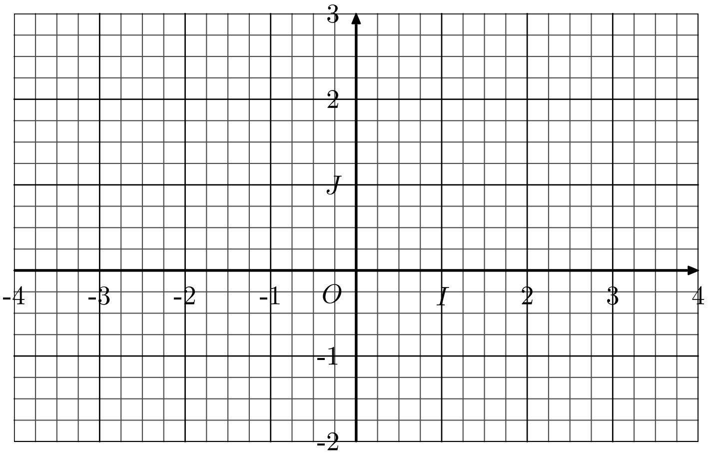
 b. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. Valeur absolue - un peu plus loin

E.7 Résoudre les équations suivantes :

(a) $|x+3| - |2x+1| = 2$ (b) $|x| + 3\cdot|4x-1| = x+1$

E.8 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:



et les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x+2| \quad ; \quad g(x) = |x| - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans ce repère.

1. (a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessus.
   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.
2. (a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-dessus.
   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leqslant 0$.

E.9 On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : \ |x+1| + |x-1| \leqslant 5$$

On considère les trois intervalles suivants :

$$I =]-\infty\,;-1] \quad ; \quad J = [-1\,;1] \quad ; \quad K = [1\,;+\infty[$$

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f : x \longmapsto |x+1| + |x-1|$$
   Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles I, J et K.
2. (a) Résoudre l'inéquation (E) sur chacun des trois intervalles I, J et K.
   (b) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4. *Valeur absolue - étude de fonctions*

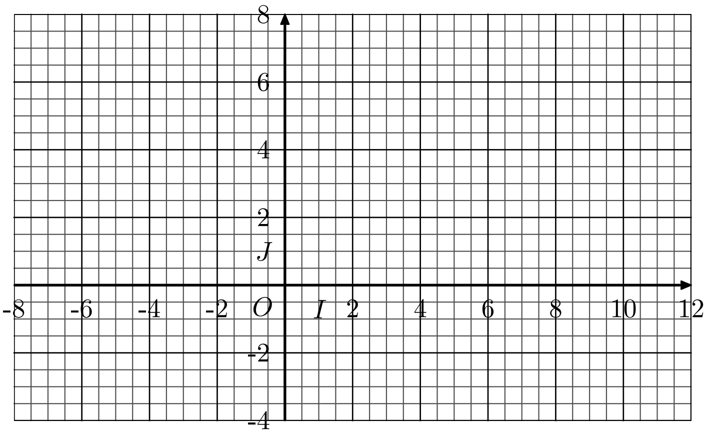
E.10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot|x+2| + \frac{3}{4}\cdot|x-4|$$

1. (a) Simplifier chaque expression en fonction de l'intervalle étudié :

x	$-\infty$ $\qquad$ -2	4	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$			
$\lvert x-4\rvert$			

   (b) Donner l'expression simplifiée de la fonction f sur chacun des trois intervalles suivants :
   $$I =]-\infty\,;-2] \quad ; \quad J = [-2\,;4] \quad ; \quad K = [4\,;+\infty[$$
2. On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé donné ci-dessous :



3. D'après la représentation graphique, tracer le tableau de variations de la fonction f.

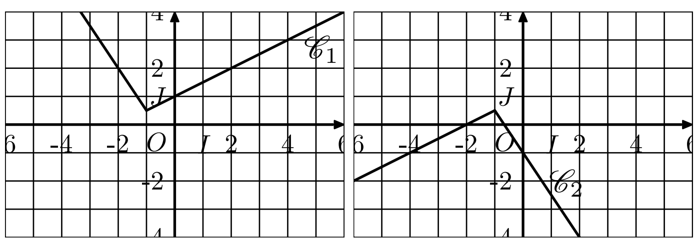
E.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = |x+1| - \frac{1}{2}\cdot x$$

1. Simplifier l'écriture des expressions algébriques sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[-1\,;+\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		
$f(x)$		

2. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, sont les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Laquelle de ces deux courbes est la représentation de la fonction f :



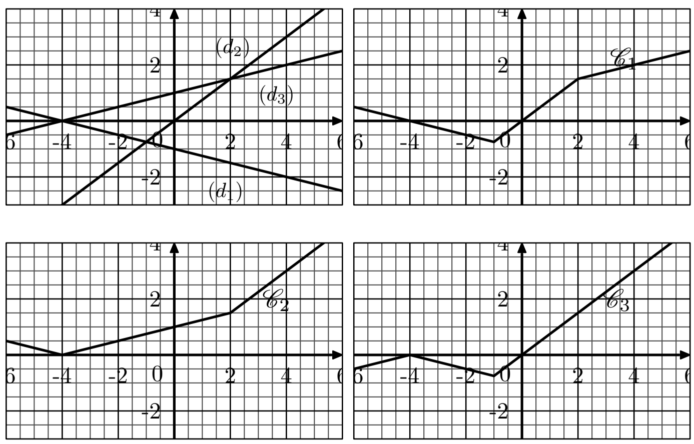
E.12 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{4}\cdot x - \frac{1}{2}\right|$$

1. Simplifier les expressions algébriques sur les trois intervalles $]-\infty\,;-1]$, $[-1\,;2]$ et $[2\,;+\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 2	2 $\quad$ $+\infty$
$\left\lvert\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\right\rvert$			
$\left\lvert\frac{1}{4}\cdot x - \frac{1}{2}\right\rvert$			
$f(x)$			

2. Dans un repère orthonormé, des courbes sont représentées ci-dessous :



a. Par lecture graphique et sans justification, donner les équations réduites des droites (d_1), (d_2) et (d_3).

b. Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, quelle est la représentation de la fonction f ?

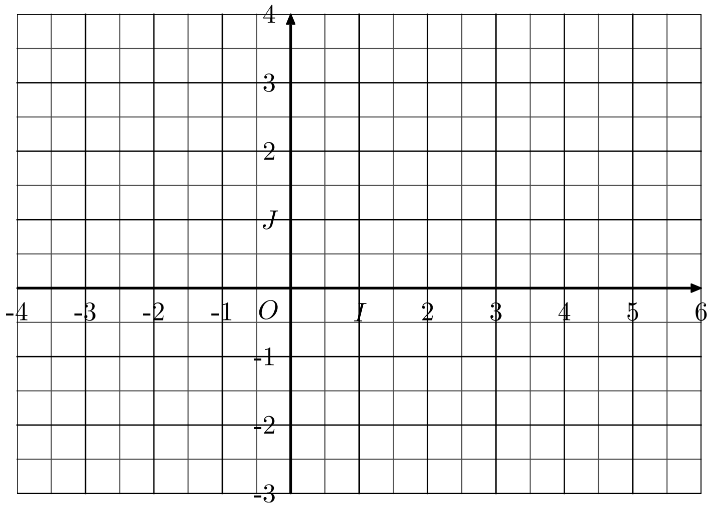
E.13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \left|\frac{3}{4}\cdot x - \frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\right|$$

1. Déterminer l'image de -4 et de 0 par la fonction f.

2. Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles ci-dessous :
$I =]-\infty\,;-1]$; $J = [-1\,;2]$; $K = [2\,;+\infty[$

3. On munit le plan du repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous. Effectuer dans ce repère le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



4. a. Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -1$.

b. Algébriquement, justifier que l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.

5. *Un peu plus loin - propriétés algébriques de la valeur absolue*

E.14 On souhaite établir l'égalité suivante pour tous nombres réels x et y :

$$|x\times y| = |x|\times|y|$$

Pour cela, on raisonne par disjonction de cas sur la valeur de x et sur la valeur de y. Établir cette relation dans chacun des cas suivants :

a. $x\in\mathbb{R}_+$ et $y\in\mathbb{R}_+$ $\qquad$ b. $x\in\mathbb{R}_+$ et $y\in\mathbb{R}_-$

c. $x\in\mathbb{R}_-$ et $y\in\mathbb{R}_+$ $\qquad$ d. $x\in\mathbb{R}_-$ et $y\in\mathbb{R}_-$

E.15

1. Pour tous nombres réels x et y, établir l'inégalité :
$$|x+y|^2 \leqslant \big(|x|+|y|\big)^2$$

2. En déduire, pour tous réels x et y, la comparaison suivante :
$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$

6. *Exercices non-classés*

E.16 Traduire les équations ou inéquations suivantes en termes de distance, puis les résoudre :

a. $|x-2| = 1{,}5$ $\qquad$ b. $|x+1| = 1$ $\qquad$ c. $|2x-1| = 3$

d. $|x-3| \leqslant 2$ $\qquad$ e. $|x+4| \leqslant 1$ $\qquad$ f. $|x-3| \geqslant 1$

