

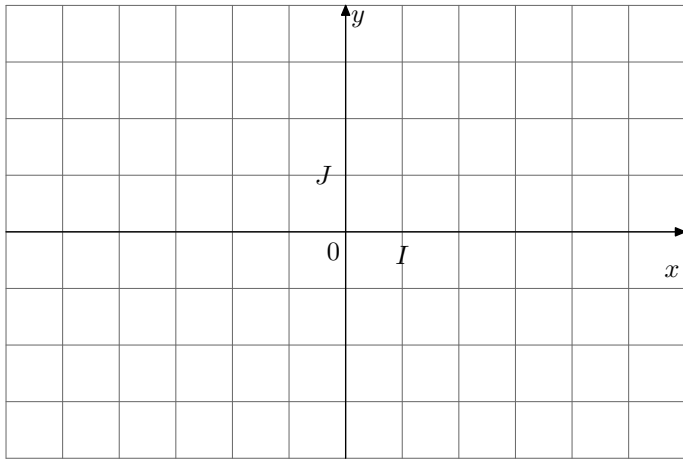




Hors programme lycée / Valeurs absolues

1. Fonctions affines par morceaux

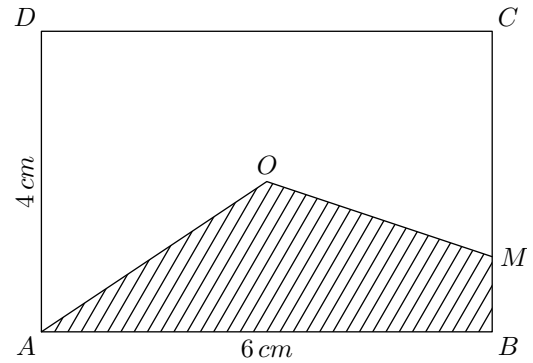
E.1   Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} f(x) = 2x + 8 & \text{si } x \in [-5; -2] \\ f(x) = -0.5x + 3 & \text{si } x \in [-2; 2] \\ f(x) = -2x + 6 & \text{si } x \in [2; 4] \end{cases}$$



E.2   Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ de longueur 5 cm et de largeur 3 cm . Un point M parcourt le contour de ce rectangle ; on repère ce point par le nombre x représentant la distance parcourue par ce point en

partant de A et en parcourant le rectangle dans le sens direct.



On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie hachurée lorsque M est repéré par le nombre x .

① Justifier que la fonction \mathcal{A} est une fonction affine par morceaux en fonction de x définie par le système :

$$\begin{cases} x & \text{pour } x \in [0; 6] \\ \frac{3}{2}x - 3 & \text{pour } x \in [6; 10] \\ x + 2 & \text{pour } x \in [10; 16] \\ \frac{3}{2} \cdot x - 6 & \text{pour } x \in [16; 20] \end{cases}$$

② Déterminer la valeur de x pour laquelle on a : $\mathcal{A}(x) = 20\text{ cm}^2$

2. Valeur absolue - équation

E.3  

① Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x+1$							
$2 \cdot x - 1$							

② Parmi les valeurs étudiées dans la question précédente, existe-t-il des solutions de l'équation :


$$|x + 1| = |2x - 1|$$

E.4   Résoudre les équations suivantes :

- a $|2 - x| = 2,5$ b $|x + 100| = 1$
 c $3 \times |x + 2| = 1$ d $|2 - x| \times 2 = 1$
 e $3 \times |x + 5| + 3 = 9$ f $2 \times |2 - x| + 4 = 1$

E.5   Résoudre les équations suivantes :

- a $|2x - 1| = |-x + 1|$ b $|3x - 1| = |3x + 1|$
 c $|x - 2| = 5$ d $|x + 2| = 6$

E.6   On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par les relations :

$$f(x) = x - |2 \cdot x - 1| \quad ; \quad g(x) = x - 2$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g .

- ① À l'aide de la calculatrice, déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
 ② a Établir l'équivalence : $f(x) = g(x) \iff |2 \cdot x - 1| = |2|$
 b En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

3. Valeur absolue - un peu plus loin

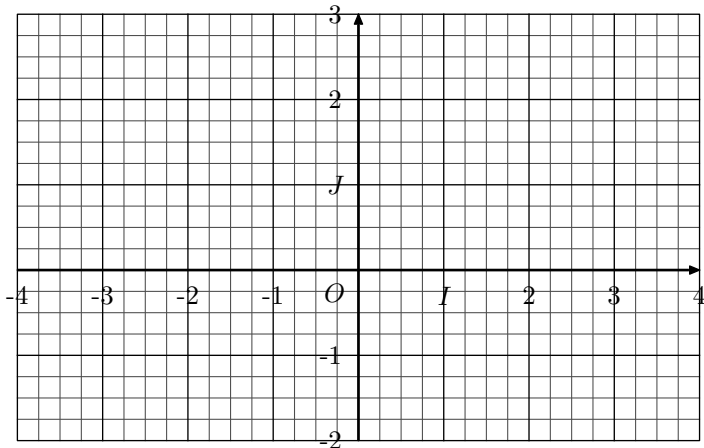
E.7   Résoudre les équations suivantes :

a) $|x+3| - |2x+1| = 2$ b) $|x| + 3 \cdot |4x-1| = x+1$



E.8   On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = |x+2| \quad ; \quad g(x) = |x| - 1$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g :



4. Valeur absolue - étude de fonctions

E.10   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot |x+2| + \frac{3}{4} \cdot |x-4|$$

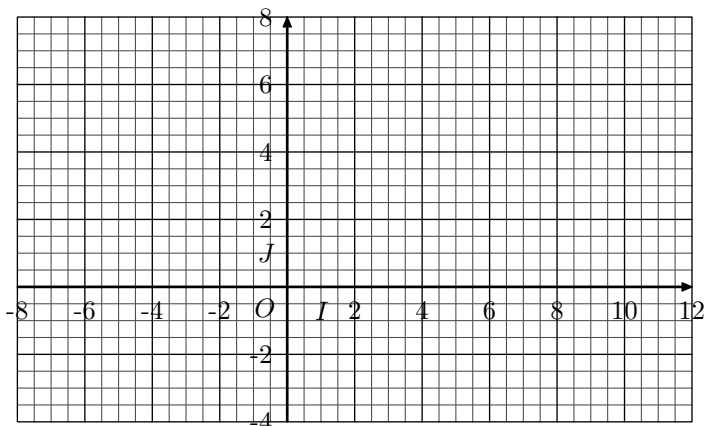
1) a) Simplifier chaque expression en fonction de l'intervalle étudié :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$ x+2 $				
$ x-4 $				

b) Donner l'expression simplifiée de la fonction f sur chacun des trois intervalles suivants :

$$I =]-\infty; -2] \quad ; \quad J = [-2; 4] \quad ; \quad K = [4; +\infty[$$

2) On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé donné ci-dessous :





1) a) Tracer la courbe \mathcal{C}_f dans le repère ci-dessus.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1$.

2) a) Tracer la courbe \mathcal{C}_g dans le repère ci-dessus.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq 0$.

E.9   On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : |x+1| + |x-1| \leq 5$$

On considère les trois intervalles suivants :

$$I =]-\infty; -1] \quad ; \quad J = [-1; 1] \quad ; \quad K = [1; +\infty[$$

1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :



$$f: x \mapsto |x+1| + |x-1|$$

Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles I , J et K .

2) a) Résoudre l'inéquation (E) sur chacun des trois intervalles I , J et K .

b) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

3) D'après la représentation graphique, tracer le tableau de variations de la fonction f .

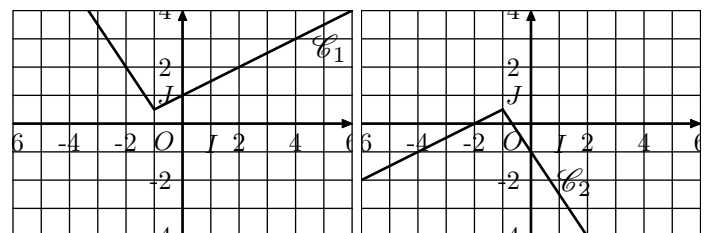
E.11   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = |x+1| - \frac{1}{2} \cdot x$$

1) Simplifier l'écriture des expressions algébriques sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $[-1; +\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$ x+1 $			
$f(x)$			

2) Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, sont les deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Laquelle de ces deux courbes est la représentation de la fonction f :



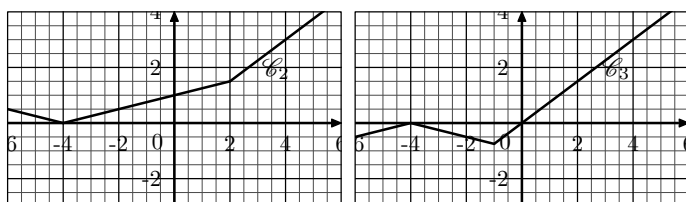
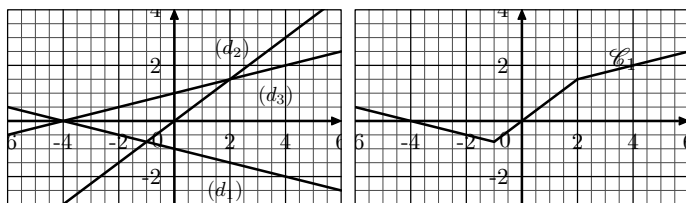
E.12 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \left| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \right| - \left| \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2} \right|$$

1) Simplifier les expressions algébriques sur les trois intervalles $]-\infty; -1]$, $[-1; 2]$ et $[2; +\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\left \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \right $				
$\left \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2} \right $				
$f(x)$				

2) Dans un repère orthonormé, des courbes sont représentées ci-dessous :



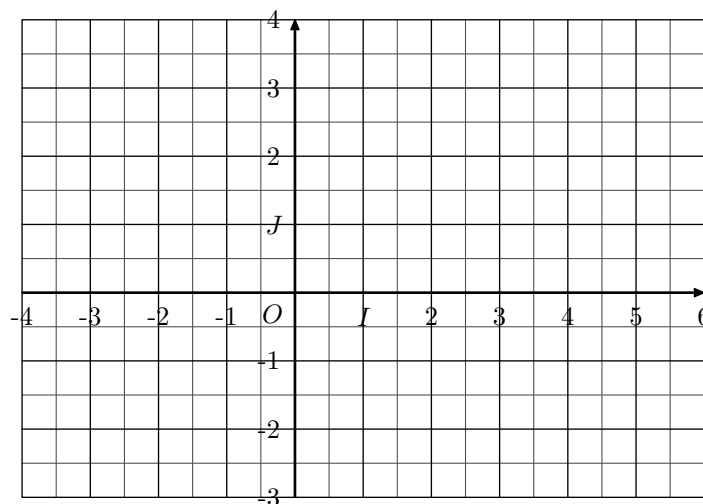
a) Par lecture graphique et sans justification, donner les équations réduites des droites (d_1) , (d_2) et (d_3) .

b) Parmi les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 , quelle est la représentation de la fonction f ?

E.13 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \left| \frac{3}{4} \cdot x - \frac{3}{2} \right| - \left| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \right|$$

- Déterminer l'image de -4 et de 0 par la fonction f .
- Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles ci-dessous :
 $I =]-\infty; -1]$; $J = [-1; 2]$; $K = [2; +\infty[$
- On munit le plan du repère $(O; I; J)$ ci-dessous. Effectuer dans ce repère le tracé de la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



- a) Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -1$.
 b) Algébriquement, justifier que l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.

5. Un peu plus loin - propriétés algébriques de la valeur absolue

E.14 On souhaite établir l'égalité suivante pour tous nombres réels x et y :

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

Pour cela, on raisonne par disjonction de cas sur la valeur de x et sur la valeur de y . Établir cette relation dans chacun des cas suivants :

- a) $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$ b) $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$
 c) $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_+$ d) $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_-$

E.15

1) Pour tous nombres réels x et y , établir l'inégalité :

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

2) En déduire, pour tous réels x et y , la comparaison suivante :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

6. Exercices non-classés

E.16 Traduire les équations ou inéquations suivantes en termes de distance, puis les résoudre :

- a) $|x - 2| = 1,5$ b) $|x + 1| = 1$ c) $|2x - 1| = 3$
 d) $|x - 3| \leq 2$ e) $|x + 4| \leq 1$ f) $|x - 3| \geq 1$