Exercice

On souhaite montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
C'est à dire que le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ irréductible où a et b seraient deux entiers.
On notera alors $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Nous allons faire un raisonnement par l'**absurde**.

On suppose l'existence de deux entiers a et b vérifiant l'égalité $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ et tels que cette fraction soit irréductible.

Et nous allons développer notre raisonnement jusqu'à aboutir une contradiction mettant ainsi en échec notre hypothèse de départ.

1. Montrer que a et b vérifie l'égalité : $a^2 = 2b^2$
2. En déduire que a est un nombre pair.

Ainsi, il existe un entier c tel que : $a = 2\times c$.

3. En utilisant la question 1., en déduire la parité de b.
4. Est ce que la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible ?

Nous venons d'aboutir à une contradiction. Notre raisonnement étant correct, nous devons remettre en cause notre hypothèse de départ : le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

Correction

1. De l'égalité $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, on a la relation :
$$\sqrt{2}\times b = a$$
Deux nombres égaux ont leurs carrés égaux
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\times b\right)^2 &= a^2\\ \left(\sqrt{2}\right)^2\times b^2 &= a^2\\ 2\times b^2 &= a^2\end{aligned}$$

2. Le nombre $2\times b^2$ étant pair. De l'égalité de la question 1., on en déduit que le nombre a^2 est pair.

   D'après l'indication, on en déduit que le nombre a est pair.

3. a étant un nombre pair, il admet l'écriture : $a = 2\times c$ où c entier.

   De l'égalité de la question 1., on a :
$$\begin{aligned}a^2 &= 2\times b^2\\ (2\times c)^2 &= 2\times b^2\\ 2^2\times c^2 &= 2\times b^2\\ 4\times c^2 &= 2\times b^2\\ 2\times c^2 &= b^2\end{aligned}$$
   De la dernière égalité, on en déduit que le nombre b^2 est pair ; de l'indication de la question 2., on en déduit que le nombre b est pair.

4. D'après la question 2. et 3., les nombres a et b sont pair. On en déduit que la fraction $\dfrac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

Notre hypothèse de départ est donc fausse.

Exercice

On souhaite montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
C'est à dire que le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ irréductible où a et b seraient deux entiers.
On notera alors $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Nous allons faire un raisonnement par l'**absurde**.

On suppose l'existence de deux entiers a et b vérifiant l'égalité $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ et tels que cette fraction soit irréductible.

Et nous allons développer notre raisonnement jusqu'à aboutir une contradiction mettant ainsi en échec notre hypothèse de départ.

1. Montrer que a et b vérifie l'égalité : $a^2 = 2b^2$
2. En déduire que a est un nombre pair.

Ainsi, il existe un entier c tel que : $a = 2\times c$.

3. En utilisant la question 1., en déduire la parité de b.
4. Est ce que la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible ?

Nous venons d'aboutir à une contradiction. Notre raisonnement étant correct, nous devons remettre en cause notre hypothèse de départ : le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

Correction

1. De l'égalité $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, on a la relation :
$$\sqrt{2}\times b = a$$
Deux nombres égaux ont leurs carrés égaux
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\times b\right)^2 &= a^2\\ \left(\sqrt{2}\right)^2\times b^2 &= a^2\\ 2\times b^2 &= a^2\end{aligned}$$

2. Le nombre $2\times b^2$ étant pair. De l'égalité de la question 1., on en déduit que le nombre a^2 est pair.

   D'après l'indication, on en déduit que le nombre a est pair.

3. a étant un nombre pair, il admet l'écriture : $a = 2\times c$ où c entier.

   De l'égalité de la question 1., on a :
$$\begin{aligned}a^2 &= 2\times b^2\\ (2\times c)^2 &= 2\times b^2\\ 2^2\times c^2 &= 2\times b^2\\ 4\times c^2 &= 2\times b^2\\ 2\times c^2 &= b^2\end{aligned}$$
   De la dernière égalité, on en déduit que le nombre b^2 est pair ; de l'indication de la question 2., on en déduit que le nombre b est pair.

4. D'après la question 2. et 3., les nombres a et b sont pair. On en déduit que la fraction $\dfrac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

Notre hypothèse de départ est donc fausse.

Définition :

Un entier a est dit pair s'il est divisible par 2.

Proposition :

Tout nombre paire s'écrit sous la forme :
$2\times k$ où k est un entier.

Preuve :

a est divisible par 2. Notons k le quotient de a par 2. La division euclidienne de a par 2 s'écrit :

$a = 2\times k + 0$

$a = 2\times k$

Définition :

Un entier a est dit impair s'il n'est pas pair

.

Proposition :

Tout nombre impair s'écrit sous la forme :
$2\times k+1$ où k est un entier.

Preuve :

Par la division euclidienne par 2, le reste ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. L'entier a n'étant pas divisible par 2, on en déduit l'écriture de la division euclidienne :
$a = 2\times q + 1$ où q est le quotient.

Proposition :

- La somme de deux entiers pair est un entier pair.
- La somme de deux entiers impair est un entier pair.
- La somme d'un entier impair est un entier pair.

Preuve :

- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k'$
  `A faire!`
- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k' + 1$
  $$\begin{aligned} a + b &= \big(2\times k\big) + \big(2\times k' + 1\big) \\ &= 2\times\big(k + k'\big) + 1 \\ &= 2\times K + 1 \end{aligned}$$
  $A+b$ est un entier impair.
- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k' + 1$
  `A faire!`

Proposition :

- Le produit de deux entiers pairs est un entier pair.
- Le produit de deux entiers impairs est un entier impair.
- Le produit d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair.

Preuve :

- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k'$
  `A faire!`
- $a = 2\times k + 1$ et $b = 2\times k' + 1$
  $$\begin{aligned} a\times b &= \big(2\times k + 1\big)\times\big(2\times k' + 1\big) \\ &= 2\times\big(2\times k\times k' + k + k'\big) + 1 \\ &= 2\times K + 1 \end{aligned}$$
  $a\times b$ est un entier impair.
- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k' + 1$
  `A faire!`

Définition :

Un entier a est dit pair s'il est divisible par 2.

Proposition :

Tout nombre paire s'écrit sous la forme :
$2\times k$ où k est un entier.

Preuve :

a est divisible par 2. Notons k le quotient de a par 2. La division euclidienne de a par 2 s'écrit :

$a = 2\times k + 0$

$a = 2\times k$

Définition :

Un entier a est dit impair s'il n'est pas pair

.

Proposition :

Tout nombre impair s'écrit sous la forme :
$2\times k+1$ où k est un entier.

Preuve :

Par la division euclidienne par 2, le reste ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. L'entier a n'étant pas divisible par 2, on en déduit l'écriture de la division euclidienne :
$a = 2\times q + 1$ où q est le quotient.

Proposition :

- La somme de deux entiers pair est un entier pair.
- La somme de deux entiers impair est un entier pair.
- La somme d'un entier impair est un entier pair.

Preuve :

- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k'$
  `A faire!`
- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k' + 1$
  $$\begin{aligned} a + b &= \big(2\times k\big) + \big(2\times k' + 1\big) \\ &= 2\times\big(k + k'\big) + 1 \\ &= 2\times K + 1 \end{aligned}$$
  $A+b$ est un entier impair.
- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k' + 1$
  `A faire!`

Proposition :

- Le produit de deux entiers pairs est un entier pair.
- Le produit de deux entiers impairs est un entier impair.
- Le produit d'un entier pair et d'un entier impair est un entier impair.

Preuve :

- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k'$
  `A faire!`
- $a = 2\times k + 1$ et $b = 2\times k' + 1$
  $$\begin{aligned} a\times b &= \big(2\times k + 1\big)\times\big(2\times k' + 1\big) \\ &= 2\times\big(2\times k\times k' + k + k'\big) + 1 \\ &= 2\times K + 1 \end{aligned}$$
  $a\times b$ est un entier impair.
- $a = 2\times k$ et $b = 2\times k' + 1$
  `A faire!`

