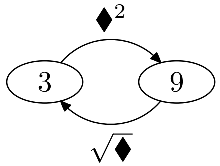
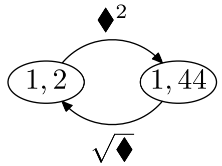
Les racines carrées

A. Présentation :

- Pour certain nombre, entier ou décimaux, il est facile de répondre à la question :
  - ➪ Quel est le nombre dont le carré vaut 9?
  - ➪ Quel est le nombre dont le carré vaut 1,44?
- **Définition :**
  Pour tout nombre positif a, on appelle **racine carré du nombre** a l'unique nombre positif dont le carré vaut a.
  Ce nombre se note $\sqrt{a}$.

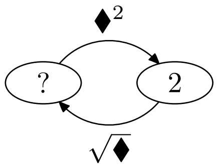




Ainsi, on note :
$\sqrt{9}=3 \quad ; \quad \sqrt{1{,}44}=1{,}2 \quad ; \quad \sqrt{16}=4$

Prendre la racine carré d'un nombre est l'opération inverse de prendre le carré d'un nombre.

- Par contre le nombre réalisant le diagramme ci-contre est ni un nombre entier, ni un nombre décimaux, ni un quotient. La seule notation possible de ce nombre est $\sqrt{2}$.



- Soit l'équation (E) : $x^2=a$:
  - ➪ pour $a<0$: (E) n'a pas de solution : $\mathcal{S}=\varnothing$.
  - ➪ pour $a=0$: (E) a une seule solution : $\mathcal{S}=\{0\}$.
  - ➪ pour $a>0$: (E) a deux solutions : $\mathcal{S}=\{-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}\}$.

B. Propriétés :

- De la définition, on a les deux propriétés :
  $\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad ; \quad \sqrt{a^2}=a$
- Pour tous nombres a et b positifs avec $b\neq 0$, on a les deux propriétés :

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées
$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	La racine d'un quotient est égale au quotient des racines

- Par contre, aucune formule n'existe pour des additions ou des soustractions se trouvant sous la racine carrée :
  $\sqrt{1+1}\neq\sqrt{1}+\sqrt{1} \quad ; \quad \sqrt{9-4}\neq\sqrt{9}-\sqrt{4}$

C. Simplifications :

- Pour simplifier une racine carrée, il faut trouver dans le nombre sous la racine carrée le plus de facteur sous la forme d'un carré :
  $18=9\times2 \quad ; \quad 72=9\times4\times2$
- On utilise maintenant la propriété sur la racine carrée d'un produit :
  - ➪ $\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
  - ➪ $\sqrt{72}=\sqrt{9\times4\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}$
- On utilise maintenant la propriété $\sqrt{a^2}=a$:
  - ➪ $\sqrt{18}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
  - ➪ $\sqrt{72}=\sqrt{9\times4\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}$
    $=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}=3\times2\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$
- Pour supprimer les radicaux aux dénominateurs d'une fraction, les deux règles suivantes :
  $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\times k}{b\times k} \quad ; \quad \left(\sqrt{at}\right)^2=a$

Voici un exemple :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- Pour aller un peu plus loin, si le dénominateur d'un quotient est la racine carré d'un nombre, voici comment transformer ce quotient avec un entier au dénominateur :

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

D. Dans des calculs :

Les racines carrés étant aussi des nombres, on peut utiliser sur eux la distributivité, la double distributivité et les identiés remarquables

- La **multiplication** des radicaux :
  Il faut simplifier chaque racine carrées, puis multiplier les facteurs de même nature : les entiers entre eux et les racines carrées entre elles :
  $2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=(2\times4)\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3})=8\times3=24$
- L'**addition** de racines carrés :
  il faut commencer à simplifier chacune des racines carrées, puis de simplifier en identifiant les termes ayant les mêmes facteur :
  $\sqrt{8}+3\sqrt{2}+7\sqrt{18}=\sqrt{2^2\times2}+3\sqrt{2}+7\sqrt{3^2\times2}$
  $=2\times\sqrt{2}+3\sqrt{2}+7\times3\times\sqrt{2}$
  $=(2+3+21)\times\sqrt{2}=36\sqrt{2}$
- La **double-distributivité** :
  $\left(5+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)=5-5\sqrt{2}+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^2$
  $=5-5\sqrt{2}+\sqrt{2}-2=3-4\sqrt{2}$
- Les **identités remarquables** :
  - ➪ $\left(3+\sqrt{2}\right)^2=9+6\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=11+6\sqrt{2}$
  - ➪ $9x^2-3=(3x)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(3x+\sqrt{3}\right)\left(3x-\sqrt{3}\right)$