Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant des valeurs entières dans l'intervalle $\big[0\,;\,n\big]$.

Considérons les deux entiers a et b tels que :

- a est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
  $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025$
- b est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
  $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

On a la probabilité suivante : $\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}95$

Démonstration :

On rappelle que la variable aléatoire prend des valeurs positives. Soit a et b les deux plus petits entiers naturels vérifiant les inégalités :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025 \quad ; \quad \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

On a la réunion suivante des ensembles :
$\big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\} = \big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big\} \cup \big\{a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\}$
où les deux ensembles de la réunion sont disjoints entre eux :
$\big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big\} \cap \big\{a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\} = \varnothing$

Ainsi, on a la probabilité suivante :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) + \mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big)$

On en déduit l'égalité :

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big)$$

L'entier a est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025$
L'entier $a-1$ étant inférieur à a, on en déduit qu'il ne vérifie par cette inégalité ; on en déduit :

$$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \leqslant 0{,}025$$

$$-\,\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant -0{,}025$$

Par la minoration de $\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big)$:

$$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant 0{,}975 - 0{,}025$$

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant 0{,}95$$

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}95$$

Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant des valeurs entières dans l'intervalle $\big[0\,;\,n\big]$.

Considérons les deux entiers a et b tels que :

- a est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
  $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025$
- b est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
  $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

On a la probabilité suivante : $\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}95$

Démonstration :

On rappelle que la variable aléatoire prend des valeurs positives. Soit a et b les deux plus petits entiers naturels vérifiant les inégalités :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025 \quad ; \quad \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

On a la réunion suivante des ensembles :
$\big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\} = \big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big\} \cup \big\{a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\}$
où les deux ensembles de la réunion sont disjoints entre eux :
$\big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big\} \cap \big\{a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\} = \varnothing$

Ainsi, on a la probabilité suivante :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) + \mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big)$

On en déduit l'égalité :

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big)$$

L'entier a est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025$
L'entier $a-1$ étant inférieur à a, on en déduit qu'il ne vérifie par cette inégalité ; on en déduit :

$$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \leqslant 0{,}025$$

$$-\,\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant -0{,}025$$

Par la minoration de $\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big)$:

$$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant 0{,}975 - 0{,}025$$

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant 0{,}95$$

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}95$$

Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant des valeurs entières dans l'intervalle $\big[0\,;\,n\big]$.

Considérons les deux entiers a et b tels que :

- a est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
  $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025$
- b est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
  $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

On a la probabilité suivante : $\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}95$

Démonstration :

On rappelle que la variable aléatoire prend des valeurs positives. Soit a et b les deux plus petits entiers naturels vérifiant les inégalités :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025 \quad ; \quad \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

On a la réunion suivante des ensembles :
$\big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\} = \big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big\} \cup \big\{a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\}$
où les deux ensembles de la réunion sont disjoints entre eux :
$\big\{0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big\} \cap \big\{a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big\} = \varnothing$

Ainsi, on a la probabilité suivante :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) + \mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big)$

On en déduit l'égalité :

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big)$$

L'entier a est le plus petit entier vérifiant l'inégalité :
$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025$
L'entier $a-1$ étant inférieur à a, on en déduit qu'il ne vérifie par cette inégalité ; on en déduit :

$$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \leqslant 0{,}025$$

$$-\,\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant -0{,}025$$

Par la minoration de $\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big)$:

$$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant 0{,}975 - 0{,}025$$

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a-1\big) \geqslant 0{,}95$$

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}95$$