Limites et fractions rationnelles

- ***Limites en $-\infty$ ou en $+\infty$:***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^5-2{\cdot}x^2}{x^6+x}$

On factorise par les monômes de plus haut degrés, puis on simplifie.

$$\frac{x^5-2{\cdot}x^2}{x^6+x} = \frac{x^5\Big(1-\dfrac{2}{x^3}\Big)}{x^6\Big(1+\dfrac{1}{x^5}\Big)} = \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{x\Big(1+\dfrac{1}{x^5}\Big)}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} 1-\frac{2}{x^3} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x\Big(1+\frac{1}{x^5}\Big) = +\infty$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^5-2{\cdot}x^2}{x^6+x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{x\Big(1+\dfrac{1}{x^5}\Big)} = 0$$

- ***Limites en 0^- ou 0^+ :***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{5{\cdot}x^4-x^3}{x^2+x}$

On factorise par les monômes de plus bas degrés, puis on simplifie.

$$\frac{5{\cdot}x^4-x^3}{x^5+x^4} = \frac{x^3\Big(5{\cdot}x-1\Big)}{x^4\Big(x+1\Big)} = \frac{5{\cdot}x-1}{x(x+1)}$$

On a les deux limite suivantes :

$$\lim_{x\mapsto0^+} 5{\cdot}x-1 = -1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^+} x(x+1) = 0^+$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto0^+} \frac{5{\cdot}x^4-x^3}{x^5+x^4} = \lim_{x\mapsto0^+} \frac{5{\cdot}x-1}{x(x+1)} = -\infty$$

- ***Limites en a^+ ou a^- avec limite nulle du dénominateur :***

  - ***Avec limite nulle du numérateur :***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{2x^2-3x-2}{-x^2+5x-6}$

On factorise le numérateur et le dénominateur, puis on simplifie :

$$\frac{2x^2-3x-2}{-x^2+5x-6} = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(3-x)} = \frac{2x+1}{3-x}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto2^+} 2x+1 = 5 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto2^+} 3-x = 1$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto2^+} \frac{2x^2-3x-2}{-x^2+5x-6} \lim_{x\mapsto2^+} \frac{2x+1}{3-x} = \frac{5}{1} = 5$$

  - ***Avec limite non-nulle du numérateur :***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{x-5}{-x^2+3x-2}$

On étudie le signe du numérateur et du dénominateur :

Le numérateur est négatif en 2^+ et le dénominateur admet le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto2^+} x-5 = -3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto2^+} -x^2+3x-2 = 0^-$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto2^+} \frac{x-5}{-x^2+3x-2} = +\infty$$

Limites et fractions rationnelles

- ***Limites en $-\infty$ ou en $+\infty$:***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^5-2{\cdot}x^2}{x^6+x}$

On factorise par les monômes de plus haut degrés, puis on simplifie.

$$\frac{x^5-2{\cdot}x^2}{x^6+x} = \frac{x^5\Big(1-\dfrac{2}{x^3}\Big)}{x^6\Big(1+\dfrac{1}{x^5}\Big)} = \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{x\Big(1+\dfrac{1}{x^5}\Big)}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} 1-\frac{2}{x^3} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x\Big(1+\frac{1}{x^5}\Big) = +\infty$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^5-2{\cdot}x^2}{x^6+x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1-\dfrac{2}{x^3}}{x\Big(1+\dfrac{1}{x^5}\Big)} = 0$$

- ***Limites en 0^- ou 0^+ :***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{5{\cdot}x^4-x^3}{x^2+x}$

On factorise par les monômes de plus bas degrés, puis on simplifie.

$$\frac{5{\cdot}x^4-x^3}{x^5+x^4} = \frac{x^3\Big(5{\cdot}x-1\Big)}{x^4\Big(x+1\Big)} = \frac{5{\cdot}x-1}{x(x+1)}$$

On a les deux limite suivantes :

$$\lim_{x\mapsto0^+} 5{\cdot}x-1 = -1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^+} x(x+1) = 0^+$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto0^+} \frac{5{\cdot}x^4-x^3}{x^5+x^4} = \lim_{x\mapsto0^+} \frac{5{\cdot}x-1}{x(x+1)} = -\infty$$

- ***Limites en a^+ ou a^- avec limite nulle du dénominateur :***

  - ***Avec limite nulle du numérateur :***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{2x^2-3x-2}{-x^2+5x-6}$

On factorise le numérateur et le dénominateur, puis on simplifie :

$$\frac{2x^2-3x-2}{-x^2+5x-6} = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(3-x)} = \frac{2x+1}{3-x}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto2^+} 2x+1 = 5 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto2^+} 3-x = 1$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto2^+} \frac{2x^2-3x-2}{-x^2+5x-6} \lim_{x\mapsto2^+} \frac{2x+1}{3-x} = \frac{5}{1} = 5$$

  - ***Avec limite non-nulle du numérateur :***

Déterminons la limite $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{x-5}{-x^2+3x-2}$

On étudie le signe du numérateur et du dénominateur :

Le numérateur est négatif en 2^+ et le dénominateur admet le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto2^+} x-5 = -3 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto2^+} -x^2+3x-2 = 0^-$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto2^+} \frac{x-5}{-x^2+3x-2} = +\infty$$

