Démonstration :

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}_n$ suivant une loi binomiale de paramètre n et p $(\mathcal{X}_n \sim \mathcal{B}(n\,;p))$.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. On a les transformations suivantes :

$$a \leqslant \frac{\mathcal{X}_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \leqslant b$$

$$\begin{array}{rrcl}
\Longleftrightarrow & a\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \leqslant & \mathcal{X}_n - n\cdot p & \leqslant b\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \\
\Longleftrightarrow & a\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p \leqslant & \mathcal{X}_n & \leqslant b\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{a\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p}{n} \leqslant & \dfrac{\mathcal{X}_n}{n} & \leqslant \dfrac{b\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p}{n} \\
\Longleftrightarrow & a\cdot\dfrac{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n} + p \leqslant & F_n & \leqslant b\cdot\dfrac{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n} + p \\
\Longleftrightarrow & p + a\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant & F_n & \leqslant p + b\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}
\end{array}$$

Ainsi, on a l'égalité des probabilités :

$$\mathcal{P}\left(p + a\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + b\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{P}\left(a \leqslant \frac{\mathcal{X}_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \leqslant b\right)$$

Ces deux membres étant égaux pour tout n, leurs limites sont égales :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(p + a\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + b\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(a \leqslant \frac{\mathcal{X}_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \leqslant b\right)$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, on a

$$= \lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(p + a\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + b\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{P}\big(a \leqslant \mathcal{Z} \leqslant b\big) \qquad \text{où } \mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$$

Or, pour tout réel $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, il existe un unique réel u_α positif réalisant l'égalité : $\mathcal{P}\big(-u_\alpha \leqslant \mathcal{Z} \leqslant u_\alpha\big) = 1-\alpha$

On en déduit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(p - u_\alpha\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + u_\alpha\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{P}\big(-u_\alpha \leqslant \mathcal{Z} \leqslant u_\alpha\big) = 1-\alpha$$

Démonstration :

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}_n$ suivant une loi binomiale de paramètre n et p $(\mathcal{X}_n \sim \mathcal{B}(n\,;p))$.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. On a les transformations suivantes :

$$a \leqslant \frac{\mathcal{X}_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \leqslant b$$

$$\begin{array}{rrcl}
\Longleftrightarrow & a\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \leqslant & \mathcal{X}_n - n\cdot p & \leqslant b\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \\
\Longleftrightarrow & a\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p \leqslant & \mathcal{X}_n & \leqslant b\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{a\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p}{n} \leqslant & \dfrac{\mathcal{X}_n}{n} & \leqslant \dfrac{b\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} + n\cdot p}{n} \\
\Longleftrightarrow & a\cdot\dfrac{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n} + p \leqslant & F_n & \leqslant b\cdot\dfrac{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n} + p \\
\Longleftrightarrow & p + a\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant & F_n & \leqslant p + b\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}
\end{array}$$

Ainsi, on a l'égalité des probabilités :

$$\mathcal{P}\left(p + a\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + b\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{P}\left(a \leqslant \frac{\mathcal{X}_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \leqslant b\right)$$

Ces deux membres étant égaux pour tout n, leurs limites sont égales :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(p + a\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + b\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(a \leqslant \frac{\mathcal{X}_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} \leqslant b\right)$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, on a

$$= \lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(p + a\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + b\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{P}\big(a \leqslant \mathcal{Z} \leqslant b\big) \qquad \text{où } \mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$$

Or, pour tout réel $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, il existe un unique réel u_α positif réalisant l'égalité : $\mathcal{P}\big(-u_\alpha \leqslant \mathcal{Z} \leqslant u_\alpha\big) = 1-\alpha$

On en déduit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \mathcal{P}\left(p - u_\alpha\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + u_\alpha\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{P}\big(-u_\alpha \leqslant \mathcal{Z} \leqslant u_\alpha\big) = 1-\alpha$$