Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}\left(0\,;1\right)$. Pour tout nombre réel $\alpha\in\left]0\,;1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :

$$\mathcal{P}\left(-u_\alpha\leqslant\mathcal{X}\leqslant u_\alpha\right)=1-\alpha$$

Démonstration :

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale centrée réduite *(*$\mathcal{X}\sim\mathcal{N}\left(0\,;1\right)$*)*.

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

On souhaite montrer que léquation en x ci-dessous admet une unique solution :

$$\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)=1-\alpha$$

On remarque que l'équation impose à l'inconnue x à prendre des valeurs positive.

En considérant la fonction G définie par :

$$G(x)=\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)\qquad\text{sur }\mathbb{R}_+,$$

l'équation devient : $\quad G(x)=1-\alpha$.

La fonction G admet pour expression :

$$G(x)=\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)=\int_{-x}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f représente la densité de la loi normale centrée réduite. Notons F la primitive de la fonction f *(même si on ne peut déterminer son expression, on connait son existence)* :

$$=F(x)-F(-x)$$

La fonction G admet pour dérivée :

$$G'(x)=F'(x)-\left[-1\times F'(-x)\right]=F'(x)+F'(-x)$$

$$=f(x)+f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On en déduit que la fonction G' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la fonction G est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a les deux valeurs particulières de la fonction G :

- $G(0)=\mathcal{P}\left(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 0\right)=\mathcal{P}\left(\mathcal{X}=0\right)=0$
  car $\mathcal{X}$ suit une loi continue.
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}G(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)=\mathcal{P}\left(\mathcal{X}\in\mathbb{R}\right)=1$
  qui est la probabilité de l'univers.

On obtient le tableau de variation de la fonction G :

x	0		$+\infty$
Variation de G	0	$\nearrow$	1

Le nombre α appartenant à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$, on en déduit que $1-\alpha$ appartient également à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$. Ainsi, pour toute valeur de α, le nombre $1-\alpha$ appartient à l'image de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par la fonction G.

La fonction g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un unique nombre x_0 réalisation l'égalité :

$$G(x_0)=1-\alpha$$

$$\mathcal{P}\left(-x_0\leqslant\mathcal{X}\leqslant x_0\right)=1-\alpha$$

Le nombre u_α recherché est ce nombre x_0.

Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}\left(0\,;1\right)$. Pour tout nombre réel $\alpha\in\left]0\,;1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :

$$\mathcal{P}\left(-u_\alpha\leqslant\mathcal{X}\leqslant u_\alpha\right)=1-\alpha$$

Démonstration :

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale centrée réduite *(*$\mathcal{X}\sim\mathcal{N}\left(0\,;1\right)$*)*.

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

On souhaite montrer que léquation en x ci-dessous admet une unique solution :

$$\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)=1-\alpha$$

On remarque que l'équation impose à l'inconnue x à prendre des valeurs positive.

En considérant la fonction G définie par :

$$G(x)=\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)\qquad\text{sur }\mathbb{R}_+,$$

l'équation devient : $\quad G(x)=1-\alpha$.

La fonction G admet pour expression :

$$G(x)=\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)=\int_{-x}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f représente la densité de la loi normale centrée réduite. Notons F la primitive de la fonction f *(même si on ne peut déterminer son expression, on connait son existence)* :

$$=F(x)-F(-x)$$

La fonction G admet pour dérivée :

$$G'(x)=F'(x)-\left[-1\times F'(-x)\right]=F'(x)+F'(-x)$$

$$=f(x)+f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On en déduit que la fonction G' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la fonction G est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a les deux valeurs particulières de la fonction G :

- $G(0)=\mathcal{P}\left(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 0\right)=\mathcal{P}\left(\mathcal{X}=0\right)=0$
  car $\mathcal{X}$ suit une loi continue.
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}G(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\mathcal{P}\left(-x\leqslant\mathcal{X}\leqslant x\right)=\mathcal{P}\left(\mathcal{X}\in\mathbb{R}\right)=1$
  qui est la probabilité de l'univers.

On obtient le tableau de variation de la fonction G :

x	0		$+\infty$
Variation de G	0	$\nearrow$	1

Le nombre α appartenant à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$, on en déduit que $1-\alpha$ appartient également à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$. Ainsi, pour toute valeur de α, le nombre $1-\alpha$ appartient à l'image de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par la fonction G.

La fonction g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un unique nombre x_0 réalisation l'égalité :

$$G(x_0)=1-\alpha$$

$$\mathcal{P}\left(-x_0\leqslant\mathcal{X}\leqslant x_0\right)=1-\alpha$$

Le nombre u_α recherché est ce nombre x_0.