Proposition:

Soit \mathcal{X} une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0;1)$. Pour tout nombre réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_{α} tel que :

$$\mathcal{P}(-u_{\alpha} \leqslant \mathcal{X} \leqslant u_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

Démonstration :

On considère une variable aléatoire $\mathcal X$ suivant une loi normale centrée réduite $(\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0;1))$.

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle]0;1[On souhaite montrer que léquation en x ci-dessous admet une unique solution:

$$\mathcal{P}(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x) = 1 - \alpha$$

On remarque que l'équation impose à l'inconnue x à prendre des valeurs positive.

En considérant la fonction G définie par :

$$G(x) = \mathcal{P}(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x) \quad \text{sur } \mathbb{R}_+,$$

l'équation devient : $G(x) = 1 - \alpha$.

La fonction G admet pour expression :

$$G(x) = \mathcal{P}(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t) dt$$

où f représente la densité de la loi normale centrée réduite. Notons F la primitive de la fonction f ($m\hat{e}me\ si$ on ne peut déterminer son expression, on connait son existence):

$$=F(x)-F(-x)$$

La fonction G admet pour dérivée :

$$G'(x) = F'(x) - \left[-1 \times F'(-x) \right] = F'(x) + F'(-x)$$
$$= f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}}$$

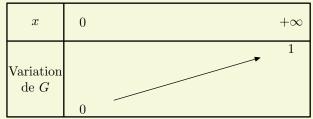
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On en déduit que la fonction G' est positive sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, la fonction G est croissante sur \mathbb{R}_+ .

On a les deux valeurs particulières de la fonction G:

- $G(0) = \mathcal{P}(0 \le \mathcal{X} \le 0) = \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0) = 0$ car \mathcal{X} suit une loi continue.
- $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathcal{P}(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x) = \mathcal{P}(\mathcal{X} \in \mathbb{R}) = 1$ qui est la probabilité de l'univers.

On obtient le tableau de variation de la fonction G:



Le nombre α appartenant à l'intervalle]0;1[, on en déduit que $1-\alpha$ appartient également à l'intervalle [0;1[. Ainsi, pour toute valeur de α , le nombre $1-\alpha$ appartient à l'image de l'intervalle \mathbb{R}_+ par la fonction G.

La fonction g est continue et strictement monotone sur l'intervalle \mathbb{R}_+ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un unique nombre x_0 réalisation l'égalité :

$$G(x_0) = 1 - \alpha$$

$$\mathcal{P}(-x_0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant x_0) = 1 - \alpha$$

Le nombre u_{α} recherché est ce nombre x_0 .

Proposition:

Soit \mathcal{X} une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0;1)$. Pour tout nombre réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_{α} tel que :

$$\mathcal{P}(-u_{\alpha} \leqslant \mathcal{X} \leqslant u_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

Démonstration :

On considère une variable aléatoire \mathcal{X} suivant une loi normale centrée réduite $(\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0; 1))$.

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle]0;1[. On souhaite montrer que léquation en x ci-dessous admet une unique solution:

$$\mathcal{P}(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x) = 1 - \alpha$$

On remarque que l'équation impose à l'inconnue x à prendre des valeurs positive.

En considérant la fonction G définie par :

$$G(x) = \mathcal{P}(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x) \quad \text{sur } \mathbb{R}_+,$$

l'équation devient : $G(x) = 1 - \alpha$.

La fonction G admet pour expression :

$$G(x) = \mathcal{P}(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t) dt$$

où f représente la densité de la loi normale centrée réduite. Notons F la primitive de la fonction f ($m\hat{e}me\ si$ on ne peut déterminer son expression, on connait son existence):

$$= F(x) - F(-x)$$

La fonction G admet pour dérivée :

$$G'(x) = F'(x) - \left[-1 \times F'(-x)\right] = F'(x) + F'(-x)$$

$$= f(x) + f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}}$$

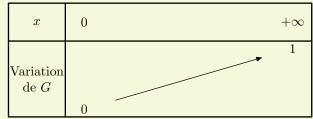
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On en déduit que la fonction G' est positive sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, la fonction G est croissante sur \mathbb{R}_+ .

On a les deux valeurs particulières de la fonction G:

- $G(0) = \mathcal{P}(0 \le \mathcal{X} \le 0) = \mathcal{P}(\mathcal{X} = 0) = 0$ car \mathcal{X} suit une loi continue.
- $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathcal{P}\left(-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant x\right) = \mathcal{P}\left(\mathcal{X} \in \mathbb{R}\right) = 1$ qui est la probabilité de l'univers.

On obtient le tableau de variation de la fonction G:



Le nombre α appartenant à l'intervalle]0;1[, on en déduit que $1-\alpha$ appartient également à l'intervalle]0;1[. Ainsi, pour toute valeur de α , le nombre $1-\alpha$ appartient à l'image de l'intervalle \mathbb{R}_+ par la fonction G.

La fonction g est continue et strictement monotone sur l'intervalle \mathbb{R}_+ . D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un unique nombre x_0 réalisation l'égalité :

$$G(x_0) = 1 - \alpha$$

$$\mathcal{P}(-x_0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant x_0) = 1 - \alpha$$

Le nombre u_{α} recherché est ce nombre x_0 .