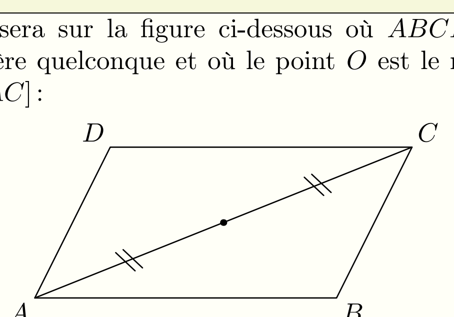
Proposition :

1. Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles
   Alors il possède un centre de symétrie.

2. Si un quadrilatère possède un centre de symétrie
   Alors ses côtés opposés sont parallèles.

Preuve :

On se basera sur la figure ci-dessous où $ABCD$ est un quadrilatère quelconque et où le point O est le milieu du sement $[AC]$:



1. Prenons pour hypothèse de départ que les côtés opposés du quadrilatère $ABCD$ sont parallèles entre elles.

   O étant le milieu du segment $[AC]$, on en déduit que l'image du point A par la symétrie centrale de centre O est le point C.

   - Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ étant opposées : les droites (AB) et (DC) sont parallèles.
     Or, l'image de la droite (AB) est une droite passant par C et parallèle à (AB) : on en déduit que l'image de la droite (AB) est la droite (CD).
   - Les côtés $[CB]$ et $[AD]$ étant opposés : les droites (CB) et (AD) sont parallèles.
     Or, l'image de la droite (CB) est une droite passant par A et parallèle à (CB) : on en déduit que l'image de la droite (CB) est la droite (AD).

   Le point B étant l'intersection des droites (AB) et (CB), on en déduit que l'image du point B est l'intersection des droites (CD) et (AD) : c'est le point D.

   Le quadrilatère $ABCD$ admet le point O pour centre de symétrie.

2. Prenons pour hypothèse de départ que le quadrilatère $ABCD$ possède le point O pour centre de symétrie.

   Sachant que l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle, on en déduit que les couples de droites suivants sont parallèles :
   (AD) et (CB) ; (AB) et (CD)

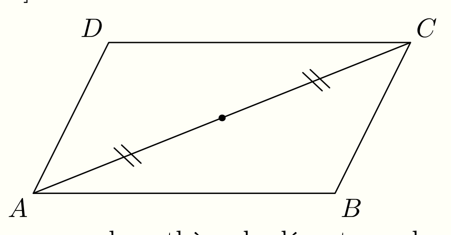
Proposition :

1. Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueurs Alors il possède un centre de symétrie.

2. Si un quadrilatère possède un centre de symétrie Alors ses côtés opposés sont de même longueur.

Preuve :

On se basera sur la figure ci-dessous où $ABCD$ est un quadrilatère quelconque et où le point O est le milieu du sement $[AC]$:



1. Prenons pour hypothèse de départ que les côtés opposés du quadrilatère $ABCD$ sont de même mesure entre elles. Notons :
   $r = AB = CD$; $r' = AD = CB$

   O étant le milieu du segment $[AC]$, on en déduit que l'image du point A par la symétrie centrale de centre O est le point C.

   - Le point B est l'intersection des cercles du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r et du cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon r'.
   - Le cercle $\mathscr{C}$ admet pour symétrique le cercle $\mathscr{C}'$ de centre C et de rayon r. Le cercle $\mathcal{C}$ admet pour symétrique le cercle $\mathcal{C}'$ de centre B et de rayon r'
   - Le symétrique du point B est l'un des points d'intersection des cercles $\mathscr{C}'$ et $\mathcal{C}'$. Le point D est l'un de ses points d'intersection. Par la position du point D relativement à la droite (AC), on en déduit que le point B a pour symétrique le point D.

   On vient d'établir que le quadrilatère $ABCD$ admet un centre de symétrie.

2. Prenons pour hypothèse de départ que le quadrilatère $ABCD$ possède le point O pour centre de symétrie.

   Sachant que la symétrie centrale conserve les distances, on en déduit que les couples de côtés opposés du quadrilatère $ABCD$ ont même longueur :
   $AB = DC$; $AD = CB$