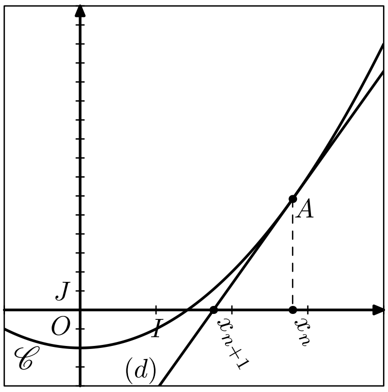
L'algorithme de Newton

Partie A : étude d'un pas de l'algorithme

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit x_n un nombre réel tel que $f'(x_n) \neq 0$. On note :

- A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_n.
- (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
- x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection des deux droites (d) et (OI).



Justifier que les nombres x_n et x_{n+1} sont liés par la relation :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Partie B : un cas particulier

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^2 - 2$$

L'algorithme de Newton permet de construire une suite (x_n) de nombres réels ; utilisons la condition initiale : $x_0 = 5$

1. A l'aide d'un logiciel tableur :
   a. Donner les valeurs approchées des 20 premiers termes de la suite (x_n).
   b. Emettre une conjecture sur la convergence de la suite (x_n).

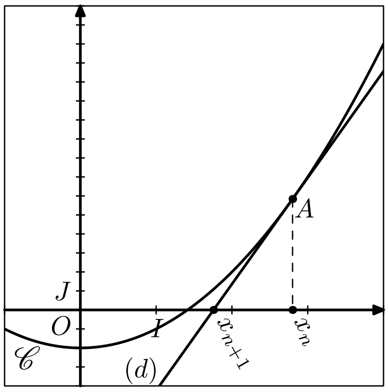
2. a. Etablir l'égalité suivante :
   $$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$
   b. A l'aide de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ et d'un raisonnement par récurrence, établir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :
   $$x_n \geqslant \sqrt{2}$$
   c. En déduire le sens de variation de la suite (x_n).
   d. Justifier que la suite (x_n) est une suite convergente.
   e. Déterminer la limite de la suite (x_n).

L'algorithme de Newton

Partie A : étude d'un pas de l'algorithme

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit x_n un nombre réel tel que $f'(x_n) \neq 0$. On note :

- A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_n.
- (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
- x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection des deux droites (d) et (OI).



Justifier que les nombres x_n et x_{n+1} sont liés par la relation :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Partie B : un cas particulier

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^2 - 2$$

L'algorithme de Newton permet de construire une suite (x_n) de nombres réels ; utilisons la condition initiale : $x_0 = 5$

1. A l'aide d'un logiciel tableur :
   a. Donner les valeurs approchées des 20 premiers termes de la suite (x_n).
   b. Emettre une conjecture sur la convergence de la suite (x_n).

2. a. Etablir l'égalité suivante :
   $$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$
   b. A l'aide de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ et d'un raisonnement par récurrence, établir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :
   $$x_n \geqslant \sqrt{2}$$
   c. En déduire le sens de variation de la suite (x_n).
   d. Justifier que la suite (x_n) est une suite convergente.
   e. Déterminer la limite de la suite (x_n).