Partie A

La droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point d'abscisse x_n. Elle admet pour équation l'expressions suivante :

$(d)\,:\ y = f'(x_n)\cdot(x - x_n) + f(x_n)$

Recherchons la valeur de x pour laquelle cette expression s'annule :

$$0 = f'(x_n)\cdot(x - x_n) + f(x_n)$$
$$-f(x_n) = f'(x_n)\cdot(x - x_n)$$
$$x - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Par définition du nombre x_{n+1}, on a la caractérisation suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Partie B

1. b. Il semble que la suite (x_n) converge vers $\sqrt{2}$.

2. a. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$f'(x) = 2\cdot x$.

Le nombre x_{n+1} est défini relativement à x_n par la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2\cdot x_n} = \frac{2\cdot x_n^2}{2\cdot x_n} - \frac{x_n^2 - 2}{2\cdot x_n}$$
$$= \frac{2\cdot x_n^2 - (x_n^2 - 2)}{2\cdot x_n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x_n^2 + 2}{x_n} = \frac{1}{2}\cdot\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big)$$

b. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :

$\mathcal{P}_n$: "$x_n \geqslant \sqrt{2}$"

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  Pour $n=0$, on a la relation : $x_0 \geqslant \sqrt{2}$.
  Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $x_n \geqslant \sqrt{2}$.
  La fonction g dont l'expression est :
  $$g(x) = \frac{1}{2}\cdot\Big(x + \frac{2}{x}\Big)$$
  Elle admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :
  $$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\Big(1 - \frac{2}{x^2}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2 - 2}{x^2}$$
  Or, si un quotient est nul alors son numérateur est nul. Ainsi, la dérivée s'annule en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$.
  On a les deux images de la fonction f :
  - $g(-\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}\cdot\Big(-\sqrt{2} + \dfrac{2}{-\sqrt{2}}\Big)$
    $= \dfrac{1}{2}\cdot\Big(-\sqrt{2} - \sqrt{2}\Big) = -\sqrt{2}$
  - $g(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}\cdot\Big(\sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\Big) = \dfrac{1}{2}\cdot\Big(\sqrt{2} + \sqrt{2}\Big) = \sqrt{2}$

  En admettant les limites aux bornes de cette fonction, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	↗	$-\sqrt{2}$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

  On observe que l'image de l'intervalle $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$ est ' :
  $f\Big(\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[\Big) = \big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$.
  Ainsi, si $x_n \geqslant \sqrt{2}$ alors on a $x_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$
  La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

c. Etudions la différence suivante :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\cdot\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big) - x_n$$
$$= \frac{1}{2}\cdot x_n + \frac{1}{x_n} - x_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\cdot x_n$$

On a les deux comparaisons suivantes :

$x_n \geqslant \sqrt{2}$	$x_n \geqslant \sqrt{2}$
$\dfrac{1}{x_n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}\cdot x_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$0 < \dfrac{1}{x_n} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}\cdot x_n \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\cdot x_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x_{n+1} - x_n \leqslant 0$$

La différence entre deux termes consécutifs est négative ; on en déduit que la suite (x_n) est décroissante.

d. D'après les résultats des questions précédente, la suite (x_n) est une suite décroissante et minorée. D'après les théorèmes de convergences des suites monotones, on en déduit que la suite (x_n) est décroissante.

Notons ℓ la limite de la suite (x_n). On a la relation suivante :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big)$$
$$\ell = \frac{1}{2}\cdot\Big(\ell + \frac{2}{\ell}\Big)$$
$$2\cdot\ell = \ell + \frac{2}{\ell}$$
$$\ell = \frac{2}{\ell}$$
$$\ell^2 = 2$$

Cette équation admet deux solutions : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Or, les termes de la suite appartenant à l'intervalle $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$, on en déduit la valeur de la limite de la suite (x_n) :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} x_n = \sqrt{2}.$$