Correction 1

Partie A

2. On peut conjecturer que la suite (a_n) *(resp.* (b_n)*)* est strictement décroissante *(resp. strictement croissante)* sur $\mathbb{N}$.

   On peut conjecturer que ces deux suites converges vers un même nombre : 2,924018 à 10^{-6} près.

3. Il semble que la suite (c_n) converge vers le nombre 25. Ainsi, on peut conjecturer que la suite (a_n) convergera vers $\sqrt[3]{25}$.

4. Par définition de la suite (b_n), la convergence de la suite (a_n) entrainera la convergence de cette suite et sa limite aura pour valeur :
$$\frac{25}{\left(\sqrt[3]{25}\right)} = \frac{\left(\sqrt[3]{25}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{25}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{25}\right)^{3-2} = \left(\sqrt[3]{25}\right)^1 = \sqrt[3]{25}$$

Partie B

1. On a les transformations algébriques suivantes :
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2{\cdot}a_n + b_n}{3} - a_n$$
$$= \frac{2{\cdot}a_n + b_n - 3{\cdot}a_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3}$$
On admet que : $b_n^3 \leqslant a_n^3$.
En utilisant la croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$, deux nombres et leurs cubes sont ordonnées dans le même sens.
On en déduit la comparaison suivante : $b_n \geqslant a_n$.

   On en déduit les comparaisons suivantes :
$$b_n \geqslant a_n$$
$$b_n - a_n \geqslant 0$$
$$\frac{b_n - a_n}{3} \geqslant 0$$
$$a_{n+1} - a_n \geqslant 0$$
$$a_{n+1} \geqslant a_n$$
On en déduit que la suite (a_n) est décroissante.

   La suite est une suite décroissante d'après la remarque précédente et ses termes sont strictements positifs car d'après l'énoncé, on a $25 \leqslant a_n^3$. On a les comparaisons suivantes :
$$0 < a_{n+1} < a_n$$
Deux nombres positifs et leurs carrés sont ordonnés dans le même ordre :
$$0 < a_{n+1}^2 < a_n^2$$
Deux nombres positifs et leurs inverses sont ordonnés dans le sens contraire :
$$\frac{1}{a_{n+1}^2} > \frac{1}{a_n^2}$$
$$\frac{25}{a_{n+1}^2} > \frac{25}{a_n^2}$$
$$b_{n+1} > b_n$$
On en déduit que la suite (b_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

2. La suite (a_n) est une suite décroissante et minorée par $\sqrt[3]{25}$.
Si une suite est décroissante et minorée alors cette suite converge.
On en déduit que la suite (a_n) converge.

   La suite (b_n) est une suite croissante et majorée par $\sqrt[3]{25}$.
Si une suite est croissante et majorée alors cette suite converge.
On en déduit que la suite (b_n) converge.

3. - Utilisons la relation obtenue pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3}$$
Par passage à la limite, on obtient :
$$\ell - \ell = \frac{\ell' - \ell}{3}$$
$$0 = \frac{\ell' - \ell}{3}$$
$$0 = \ell' - \ell$$
$$\ell = \ell'$$
On déduit de cette dernière égalité que les deux suites (a_n) et (b_n) ont même limite.
   - Déterminons la valeur de la limite ℓ :
On a l'égalité suivante :
$$b_{n+1} = \frac{25}{a_n^2}$$
Par passage à la limite, on a :
$$\ell = \frac{25}{\ell^2}$$
$$\ell^3 = 25$$
$$\ell = \sqrt[3]{25}$$
Ainsi, ces deux suites convergent vers $\sqrt[3]{25}$.

