Correction 1

1. Il semble que la suite $\left(u_n\right)$ converge vers 1,64494.

2. D'après la feuille de calcul représentant la suite $\left(v_n\right)$, ona :
   a. L'inégalité $v_{n+1}-v_n\leqslant 10^{-3}$ semble vérifier à partir du rang 32 ;
   b. L'inégalité $v_{n+1}-v_n\leqslant 10^{-5}$ semble vérifier à partir du rang 317.

3. La représentation graphique fait penser que ces deux suites sont deux suites adjacentes.

4. a. • Montrons que la suite $\left(v_n\right)$ est croissante :

$$v_{n+1}-v_n=\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\Big)-\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\Big)$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}\geqslant 0$$

La suite $\left(v_n\right)$ est croissante.

• Montrons que la suite $\left(x_n\right)$ est décroissante :

$$x_{n+1}-x_n=\Big(v_{n+1}+\frac{1}{n+1}\Big)-\Big(v_n+\frac{1}{n}\Big)$$
$$=\Big(v_{n+1}-v_n\Big)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{n}{n{\cdot}(n+1)^2}+\frac{n{\cdot}(n+1)}{n{\cdot}(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n{\cdot}(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n{\cdot}(n+1)-(n+1)^2}{n{\cdot}(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n{\cdot}(n+1)^2}$$
$$=\frac{-1}{n{\cdot}(n+1)^2}<0$$

• Etudions la limite de x_n-v_n :
On a les égalités suivantes :

$$x_n-v_n=\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\Big)-\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\Big)$$
$$=\frac{1}{n}$$

On en déduit la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}x_n-v_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$$

Des trois propriétés précédentes, on en déduit que les deux suites $\left(x_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont adjacentes.

   b. En utilisant la propriété suivante :

   Si deux suites sont adjacentes alors ces deux suites convergent et elles ont la même limite.

   On en déduit que la suite $\left(v_n\right)$ converge.

Correction 1

1. Il semble que la suite $\left(u_n\right)$ converge vers 1,64494.

2. D'après la feuille de calcul représentant la suite $\left(v_n\right)$, ona :
   a. L'inégalité $v_{n+1}-v_n\leqslant 10^{-3}$ semble vérifier à partir du rang 32 ;
   b. L'inégalité $v_{n+1}-v_n\leqslant 10^{-5}$ semble vérifier à partir du rang 317.

3. La représentation graphique fait penser que ces deux suites sont deux suites adjacentes.

4. a. • Montrons que la suite $\left(v_n\right)$ est croissante :

$$v_{n+1}-v_n=\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\Big)-\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\Big)$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}\geqslant 0$$

La suite $\left(v_n\right)$ est croissante.

• Montrons que la suite $\left(x_n\right)$ est décroissante :

$$x_{n+1}-x_n=\Big(v_{n+1}+\frac{1}{n+1}\Big)-\Big(v_n+\frac{1}{n}\Big)$$
$$=\Big(v_{n+1}-v_n\Big)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{n}{n{\cdot}(n+1)^2}+\frac{n{\cdot}(n+1)}{n{\cdot}(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n{\cdot}(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n{\cdot}(n+1)-(n+1)^2}{n{\cdot}(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n{\cdot}(n+1)^2}$$
$$=\frac{-1}{n{\cdot}(n+1)^2}<0$$

• Etudions la limite de x_n-v_n :
On a les égalités suivantes :

$$x_n-v_n=\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\Big)-\Big(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\Big)$$
$$=\frac{1}{n}$$

On en déduit la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}x_n-v_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n}=0$$

Des trois propriétés précédentes, on en déduit que les deux suites $\left(x_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont adjacentes.

   b. En utilisant la propriété suivante :

   Si deux suites sont adjacentes alors ces deux suites convergent et elles ont la même limite.

   On en déduit que la suite $\left(v_n\right)$ converge.