1. a. M est le barycentre du système :
$\left\{ (A\,;\,t)\,;\,(C\,;\,1-t) \right\}$
La particularité de la pondération de ce système est que la somme des coefficients est égale à 1.
Ainsi, le point M a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{t\cdot x_A + (1-t)\cdot x_C}{t+(1-t)}\ ;\ \frac{t\cdot y_A + (1-t)\cdot y_C}{t+(1-t)} \right) \\ &= \left(\frac{t\cdot x_A + (1-t)\cdot x_C}{1}\ ;\ \frac{t\cdot y_A + (1-t)\cdot y_C}{1} \right) \\ &= \left(t\cdot x_A + (1-t)\cdot x_C\ ;\ t\cdot y_A + (1-t)\cdot y_C \right) \end{aligned}$$

qui correspond à l'égalité vectorielle suivante :
$\overrightarrow{OM} = t\cdot\overrightarrow{OA} + (1-t)\cdot\overrightarrow{OC}$
Geogebra travaillant sur les coordonnées des points comme, on travaille en mathématiques sur les coordonnées de vecteurs, on peut écrire :

```
M=t*A+(1-t)*C
```

2. a. Il semble que le lieu géométrique du point P soit la parabole d'équation $y = x^2$ pour $x \in [0\,;\,1]$.

b. La droite (MN) semble être une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P pour toute valeur de $t \in [0\,;\,1]$.

3. - Les coordonnées du point M sont :

$$\begin{aligned} M &\left(t\cdot x_A + (1-t)\cdot x_C\ ;\ t\cdot y_A + (1-t)\cdot y_C \right) \\ &= \left(t\cdot(-1) + (1-t)\cdot 0\ ;\ t\times 1 + (1-t)\cdot(-1) \right) \\ &= \left(-t\ ;\ t-1+t \right) \\ &= \left(-t\ ;\ 2t-1 \right) \end{aligned}$$

Les coordonnées du point N sont :

$$\begin{aligned} N &\left(t\cdot x_C + (1-t)\cdot x_B\ ;\ t\cdot y_C + (1-t)\cdot y_B \right) \\ &= \left(t\times 0 + (1-t)\cdot 1\ ;\ t\cdot(-1) + (1-t)\cdot 1 \right) \\ &= \left(1-t\ ;\ -t+1-t \right) \\ &= \left(1-t\ ;\ 1-2t \right) \end{aligned}$$

Les coordonnées du point P sont :

$$\begin{aligned} P &\left(t\cdot x_M + (1-t)\cdot x_N\ ;\ t\cdot y_M + (1-t)\cdot y_N \right) \\ &= \left(t\cdot(-t) + (1-t)\cdot(1-t)\ ;\ t\cdot(2t-1) + (1-t)\cdot(1-2t) \right) \\ &= \left(-t^2 + 1 - 2t + t^2\ ;\ 2t^2 - t + 1 - 2t - t + 2t^2 \right) \\ &= \left(1-2t\ ;\ 4t^2 - 4t + 1 \right) \\ &= \left(1-2t\ ;\ (1-2t)^2 \right) \end{aligned}$$

On vient de montrer que les coordonnées du point P vérifient l'équation suivante :
$y = x^2$
Ce qui confirme la conjecture effectuée lors de la question 2. a. .

- Soit $t \in [0\,;\,1]$. Déterminons l'équation cartésienne de la droite (MN) ; son coefficient directeur a pour valeur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} \\ &= \frac{(2t-1)-(1-2t)}{-t-(1-t)} \\ &= \frac{4t-2}{-1} \\ &= 2-4t \end{aligned}$$

Le point P étant le barycentre des points M et N, on en déduit que les points M, N et P sont alignés et sachant que le point P est un point de la courbe $\mathscr{C}$, il reste alors à montrer que le nombre dérivée de la fonction $y = x^2$ en l'abscisse du point P est $2-4t$, ce qui est immédiat.
On vient d'établir la conjecture de la question 2. b. .

Ci-dessous est donnée la représentation graphique demandée aux élèves ; le lieu géométrique $\mathscr{C}$ décrit par le point P lorsque le paramètre t décrit $[0\,;\,1]$ est représenté ci-dessous en pointillés :