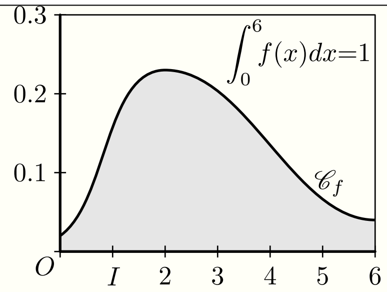
Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **densité de probabilité sur** I toute fonction f définie sur I vérifiant les trois conditions suivantes :

- f continue sur I ;
- f est positive sur I *(pour tout réel de I, $f(x)\geqslant 0$)*;
- l'aire siutée sous sa courbe $\mathscr{C}$ est égale à une unité d'aire :
  $$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$



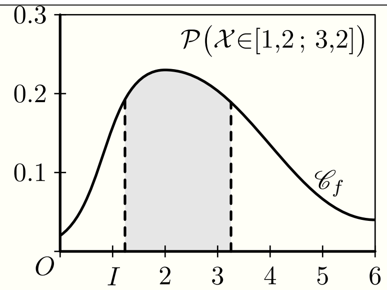
Définition :

On dit qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ à valeurs dans I **suit une la loi de probabilité $\mathcal{P}$ de densité f sur I** lorsque pour tout entier a et b appartenant à I *($a<b$)* :

$$\mathcal{P}\big(\alpha\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On définit l'espérance de cette variable aléatoire par :

$$E(\mathcal{X}) = \int_I t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

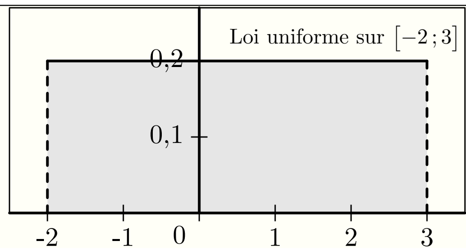


Définition :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$:

On dit qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une **loi uniforme sur l'intervalle** $I=\big[a\,;b\big]$ si la variable $\mathcal{X}$ est continue sur I et admet pour densité la fonction constante f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $I=\big[a\,;b\big]$.

Pour α et β deux réels de de l'intervalle I tels que $\alpha<\beta$, on a :

$$\mathcal{P}\big(\alpha\leqslant\mathcal{X}\leqslant\beta\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\in\big[\alpha\,;\,\beta\big]\big) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[\frac{x}{b-a}\Big]_\alpha^\beta = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

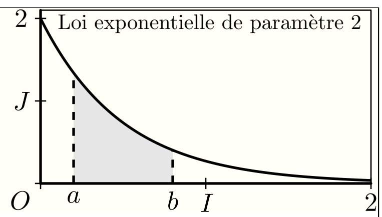
L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = \frac{a+b}{2}$$

Définition :

Soit λ un réel positif. On dit qu'une variable aléatoire suit une **loi exponentielle de paramètre** λ, si la variable $\mathcal{X}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}$$



Proposition :

Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a<b$.

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On a :

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\in[a\,;\,b]\big)$$

$$= \int_a^b \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x = \big[-e^{-\lambda\cdot x}\big]_a^b$$

L'espérance de cette variable aléatoire a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = \lim_{x\mapsto+\infty}\int t\cdot\lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

