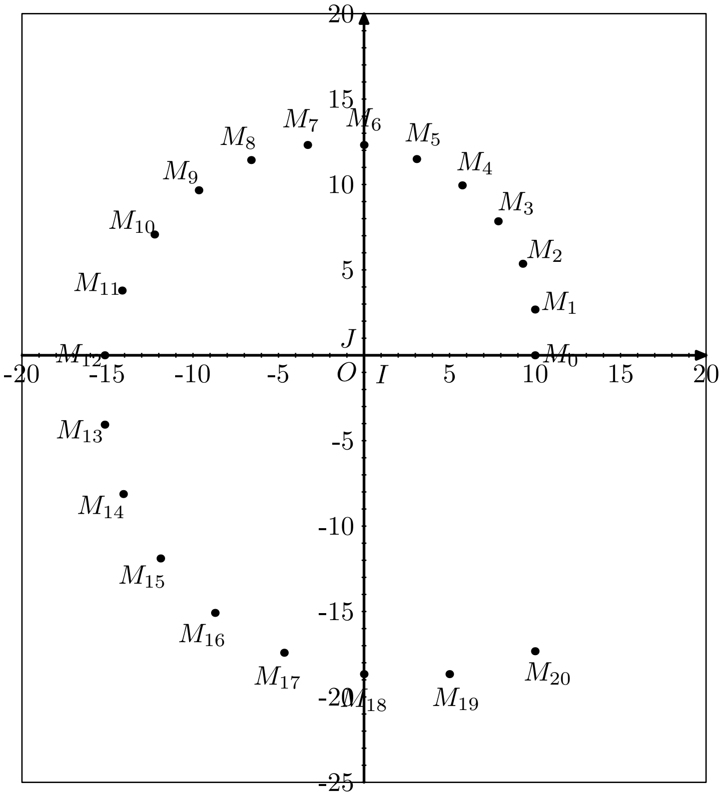
1. Voici la représentation des 21 premiers termes de cette suite :



2. a. Il semble que cette similitude soit directe car elle semble conserver les angles $\left(\overrightarrow{OM_0}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right)$.

b. A l'aide de Geogebra, on obtient les valeurs approchées suivantes :

- $\dfrac{M_1M_2}{M_0M_1} = \dfrac{M_2M_3}{M_1M_2} \simeq 1{,}04$
- $\left(\overrightarrow{M_0M_1}\ ;\ \overrightarrow{M_1M_2}\right) = \left(\overrightarrow{M_1M_2}\ ;\ \overrightarrow{M_2M_3}\right) = 15^o$

La similitude $\mathcal{S}$ semble avoir pour centre O, pour rapport 1,04 et pour angle 15^o.

3. a. Les propriétés d'additions permettent d'écrire :

- $$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}\end{aligned}$$

b. Montrons que cette similitude a pour rapport $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)$, d'angle $\dfrac{\pi}{12}$ et de centre O.

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{aligned}f(z) &= \sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}\cdot z\\ &= \sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{4}+i\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}\right)\cdot z\\ &= \left(\frac{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}+\frac{2\cdot(\sqrt{3}-1)^2}{4}\cdot i\right)\cdot z\\ &= \left(1+\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z\\ &= \left(1+\frac{2\cdot(4-2\sqrt{3})}{4}\cdot i\right)\cdot z\\ &= \left(1+(2-\sqrt{3})\cdot i\right)\cdot z\end{aligned}$$

Déterminons l'image du nombre complexe $x_n+i\cdot y_n$ par la fonction f :

$$\begin{aligned}&f\left(x_n+i\cdot y_n\right)\\ &= \left[1+(2-\sqrt{3})\cdot i\right]\cdot\left(x_n+i\cdot y_n\right)\\ &= x_n+i\cdot y_n+(2-\sqrt{3})\cdot x_n+(2-\sqrt{3})\cdot y_n\cdot i^2\\ &= \left[x_n-(2-\sqrt{3})\cdot y_n\right]+i\cdot\left[(2-\sqrt{3})\cdot x_n+y_n\right]\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f réalise l'égalité :

$$x_{n+1}+i\cdot y_{n+1} = f\left(x_n+i\cdot y_n\right)$$